UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

Tauana Bianchetti

FUNÇÃO DE 1º GRAU: UMA PROPOSTA PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Passo Fundo

Tauana Bianchetti

FUNÇÃO DE 1º GRAU: UMA PROPOSTA PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial e final para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, sob orientação da professora doutora Neiva Ignês Grando.

Passo Fundo

2016

CIP – Catalogação na Publicação

B577f Bianchetti, Tauana

Funções de 1º grau: uma proposta para o 9º ano do Ensino Fundamental / Tauana Bianchetti. – 2016.

118 f. : il. ; 30 cm.

Orientação: Professora Doutora Neiva Inês Grando.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Passo Fundo, 2016.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Funções (Matemática). 4. Educação – Métodos de ensino. I. Grando, Neiva Inês, orientadora. II. Título.

CDU: 51

Catalogação: Bibliotecária Marciéli de Oliveira - CRB 10/2113

Tauana Bianchetti

FUNÇÃO DE 1º GRAU: UMA PROPOSTA PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Banca Examinadora abaixo APROVA a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional da Universidade de Passo Fundo, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na linha de pesquisa Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino de Ciências e Matemática.

Profa. Dra. Neiva Ignês Grando – Orientador
Universidade de Passo Fundo

Profa. Dra. Ocsana Sônia Danyluk
Universidade de Passo Fundo

Prof. Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano

Dedico este trabalho a toda a minha família, em especial aos meus pais, Nelson e Eny, ao meu marido, Frédi e ao meu irmão, Elisson, que sempre estiveram do meu lado, me apoiando e acreditando no meu trabalho. Dedico também à professora Drª. Neiva Ignês Grando, que sempre esteve presente, me auxiliando para que esse trabalho pudesse ter sido realizado, o qual, sem ela, com certeza, não conseguiria ter concluído. Dedico ainda aos meus professores do mestrado, pelos ensinamentos, sempre dispostos a me auxiliar quando precisei. E por fim agradeço aos meus colegas que sempre estiveram ao meu lado, inclusive nos momentos de maior dificuldade.

Agradeço primeiramente a **Deus**, pelas oportunidades oferecidas, por estar sempre comigo, de alguma maneira, me fazendo refletir sobre minhas decisões. Agradeço também por colocar em minha vida pessoas especiais que me auxiliam a seguir meu caminho.

À minha orientadora, a professora **Dra. Neiva Ignês Grando**, pelas inúmeras vezes que me auxiliou, me orientou, me ensinou para que a realização desse trabalho pudesse acontecer, contribuindo de modo considerável. Agradeço muito por ter sido minha orientadora, acreditado na minha capacidade, me incentivado a sempre fazer o certo e buscar sempre mais para me aperfeiçoar, não apenas na minha profissão. Obrigada por acreditar em mim!

Aos professores **Dra. Ocsana Danyluk**, **Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira** e **Dra. Helena Noronha Cury**, pelas contribuições no exame de qualificação. Com certeza foram valiosas para meu trabalho.

Aos meus pais, **Nelson** e **Eny** que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e incentivando, juntamente com meu irmão **Elisson**. Obrigada por tudo. Amo vocês.

Ao meu marido, **Frédi**, que sempre esteve comigo, me apoiando, me ajudando, por ter acreditado em mim e me incentivado com muita compreensão. Obrigada de coração. Amo você.

Aos meus professores do mestrado que sempre buscaram me auxiliar na minha formação, por todo o comprometimento com esse trabalho. Obrigada.

Aos meus colegas que sempre estiveram comigo, em todos os momentos, com palavras de apoio e ajuda. Obrigada por estarem presentes nesse processo tão importante de minha vida.

À UPF, por me conceder a oportunidade de realizar esse curso com uma bolsa de estudos. Com certeza isso foi muito importante para mim. Obrigada.

Agradeço a todos que fizeram parte desse caminho, de uma maneira ou de outra contribuíram para que esse trabalho pudesse ser realizado. Muito obrigada!

Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!

Mario Quintana

RESUMO

As preocupações com as dificuldades dos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos matemáticos, especialmente os do campo algébrico, motivou o desenvolvimento dessa pesquisa, com o tema função de 1º grau no ensino fundamental. Diante dos inúmeros questionamentos que emergem na sala de aula, define-se a seguinte pergunta-síntese: em que medida o desenvolvimento de um produto educacional na forma de uma sequência didática possibilita a aprendizagem de conceitos matemáticos? Seguindo esse questionamento, o objetivo dessa pesquisa foi analisar se os significados referentes ao conteúdo de função de 1º grau, desenvolvido por meio de um produto educacional, foram apropriados pelos alunos, através das interações sociais produzidas pelos participantes do processo ensino-aprendizagem. A presente investigação faz parte da linha de pesquisa Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, e segue a abordagem qualitativa, por priorizar os significados atribuídos no desenvolvimento de uma proposta didático-pedagógica. Os objetos de análise foram planos de ensino e de aula, memórias da professora-pesquisadora, materiais produzidos pelos alunos e gravações em áudio das aulas. Os fundamentos foram buscados principalmente em autores da área de Educação Matemática, da Didática da Matemática, da Teoria Histórico-cultural e da própria Matemática, os quais subsidiaram o planejamento e o desenvolvimento da dissertação, o que incluiu o produto educacional. Na análise foi possível perceber que o desenvolvimento do produto educacional possibilitou interações entre alunos e entre alunos e professora, contribuindo para o processo de formação de conceitos, à vista disso, a professora-pesquisadora teve a oportunidade de refletir sobre a sua prática em sala de aula. Ademais, o estudo de propostas desenvolvidas em sala de aula proporciona uma reflexão crítica sobre o papel do professor e do aluno, ao contribuir para a formação continuada e o desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Educação Matemática. Função de 1º grau. Produto Educacional. Formação de conceitos.

ABSTRACT

The concerns about the difficulties involved in teaching and learning processes of mathematical concepts, especially from the algebraic field, motivated the development of this research, with the theme of 1st degree function in elementary school. Facing several questions that emerge in the classroom, it is defined the following question-synthesis: to what dimension the development of an educational product as a didactic sequence enables the learning of mathematical concepts? Following this question, the objective of this research was to analyze if the meanings related with the subject function of 1st degree, developed through an educational product, were appropriated by the students, throughout social interactions produced by the participants in the teaching-learning process. This research is part of a line of theoretical and methodological fundamentals for the teaching of Science and Mathematics, from the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching from University of Passo Fundo, and it follows a qualitative approach, for prioritizing the meanings assigned in the development of a didactic-pedagogic proposal. The objects of this analysis were lesson plans and classes, the teacher-researcher's memories, materials produced by the students and audio recordings from the classes. The foundations were sought mainly resorting authors from the mathematics education area, the didactics of mathematics, Theory Historical-cultural and mathematics itself, which subsidized the planning and development of the dissertation, which includes the educational product. In the analysis it was revealed that the development of educational product enabled interactions between students and also between students and the teacher, contributing to the process of formation of concepts and the teacher-researcher had the opportunity to reflect on her practice in the classroom. Also, the study of the proposals developed in the classroom provides a critical reflection on the role of teacher and the students, contributing to continuing education and professional development.

Keywords: Mathematics Education. Function 1st degree. Educational Product. Concept formation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Álgebra e Educação Algébrica foram assuntos que sempre me fascinaram, desde minha vida como estudante até a escolha de um tema para minha dissertação de Mestrado. Ao longo da minha curta prática em sala de aula, conteúdos algébricos chamavam minha atenção perante os demais, o que me incentivou a buscar o motivo pelo qual os alunos sempre apresentavam dificuldades em compreendê-lo.

Apesar do meu trabalho de conclusão da Especialização em Educação Matemática não ser voltado a conteúdos algébricos, meu interesse em realizar um trabalho nessa área sempre esteve presente.

Meu primeiro contato com uma turma, como professora regente, foi em uma escola militar, com três turmas de terceiros anos, logo quando me formei na graduação. Desenvolvemos conteúdos algébricos como operações com polinômios, então percebi as dificuldades dos alunos em um conteúdo que fora estudado no Ensino Fundamental. Questionei-me sobre como era possível os estudantes apresentarem tantas dificuldades em algo tão básico na Matemática.

No ano seguinte iniciei meus trabalhos como professora regente da disciplina de Matemática em uma escola da rede particular de ensino com turmas de 6º ao 9º ano, no Ensino Fundamental. Para mim foi um grande desafio, pois tive quatro turmas, cada uma desenvolvendo conteúdos diferentes dentro de uma proposta construtivista.

A partir dessa prática, percebi que gostaria de realizar um trabalho envolvendo conteúdos algébricos, devido à abstração que os alunos devem ter para a sua compreensão. A Graduação e a Especialização contribuíram para minha formação, porém notei que existem diferenças entre ser um professor que aplica uma proposta nos estágios, e, no momento de assumir uma turma. Nessa escola comecei a questionar minha prática e perceber que a Matemática pode sim ter relação com outras disciplinas e com o cotidiano das pessoas.

Além disso, a escolha do tema, bem como o desenvolvimento da proposta, buscou caracterizar a atividade algébrica. Segundo Lins e Gimenez (1997) há duas partes de caracterização da atividade algébrica: uma delas, mais simples, é descrevê-la para que a atividade possa ser identificada e a outra, que segundo os autores é mais complicada, é saber se existem “processos cognitivos peculiares e quais seriam eles” (p. 90).

De fato podemos nos preocupar apenas com o significado do que é uma atividade algébrica, sem pensar em que conhecimentos o indivíduo está adquirindo e em que isso tudo irá ajudá-lo.

Existem inúmeros significados para a descrição da atividade algébrica que, segundo os autores citados anteriormente, se resumem a resolver cálculos com letras. É interessante observar como tudo começou, ou seja, porque houve a necessidade da criação da álgebra e como foi seu desenvolvimento até os dias de hoje.

Ao refletirmos sobre o ensino da álgebra em nosso país, observamos que inicia-se no 6º ano, com algumas ideias a partir de generalizações. Nessas generalizações, os alunos inicialmente utilizam valores numéricos, depois pensam em uma ideia geral para aquele determinado problema. Posteriormente, no 7º ano do ensino fundamental, os alunos já começam a ter um estudo mais aprofundado, ao utilizarem letras na resolução de alguns problemas e, como consequência, nos cálculos. A abordagem, iniciada neste período, segue, no mínimo, até o 3º ano do ensino médio, no qual são desenvolvidos cálculos envolvendo polinômios. Porém, se esse trabalho não for significativo, os alunos podem apresentar dificuldades ao longo do processo de aprendizagem.

Ao longo do tempo, o ensino da Matemática tem sofrido mudanças, com o intuito de melhorar o aprendizado, porém o desempenho dos alunos nessa disciplina, na maioria das vezes, não tem melhorado. Sabemos que o ensino da Matemática é de fundamental importância no cotidiano, na vida escolar e profissional de cada indivíduo. Quando nos deparamos com esse pensamento, nota-se o papel importante e fundamental desse aprendizado.

Percebemos que os alunos apresentam dificuldades quando se deparam com equações, principalmente no 8º ano do ensino fundamental, quando os cálculos são mais corriqueiros e as dificuldades permanecem ao longo do ensino fundamental e médio. De acordo com Booth (1995), as possíveis causas das dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo de conteúdos algébricos tem relação com o foco da atividade algébrica, as notações e convenções algébricas e as variáveis. Para o autor, o foco da aritmética está em encontrar valores numéricos como resposta de determinada atividade, enquanto que na álgebra, o foco está nos procedimentos e como expressar relações de modo mais simplificado. Este objetivo não fica claro quando o aluno se depara com problemas algébricos e não entende que não necessita mais dar uma resposta numérica.

Outra dificuldade citada pelo autor está relacionada à notação utilizada na álgebra, gerando dúvidas nos alunos, como o sinal de igualdade que separa o problema da resposta (WALLE, 2009) ou ainda o símbolo que indica adição está relacionado apenas com a realização da operação.

Segundo Booth "uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização, nessa última, de letras para indicar valores" (1995, p. 30). As letras são utilizadas em aritmética quando é abordado, por exemplo, o sistema de unidade de medida de comprimento, no qual letras são usadas para representar as unidades como, por exemplo, para representar metro utilizamos a letra "m". Contudo, na álgebra, as letras tem o papel de representar números em uma generalização.

Em relação ao conteúdo de função, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) consideram que as dificuldades nesse conteúdo incluem a ideia equivocada que todas as funções são lineares, ou ainda que na função constante, todas as imagens apresentam o mesmo valor. Para os autores, os alunos compreendem mais facilmente uma função quando representada por meio de um gráfico, sendo mais visual para perceber as relações existentes.

Entendemos, assim, que seja necessária uma pesquisa referente ao que acontece com o ensino de determinados conteúdos, neste caso, funções, para respondermos a algumas perguntas referentes a como está acontecendo o ensino da matemática, principalmente em relação a conteúdos algébricos. Como educadores, dispomos de inúmeras alternativas para promover nos alunos o interesse e desafiá-los a interagir com os outros na busca pela aprendizagem. Então, devemos pensar que atividades estão sendo realizadas em sala de aula e quais devem ser aprimoradas, com o intuito de melhorar o ensino que está sendo oferecido atualmente, não apenas em álgebra e não apenas na disciplina de matemática.

Nesse sentido, indagações podem ser feitas ao longo da pesquisa: como promover nos alunos o interesse no estudo de funções no 9º ano do ensino fundamental? Qual a relação que podemos estabelecer entre função e o cotidiano dos alunos? A utilização de *softwares* pode ser útil no desenvolvimento da proposta? Como relacionar a representação algébrica de uma função com sua representação gráfica?

Assim, sob esse viés, a pergunta-síntese ficou assim expressa: Em que medida o desenvolvimento de um produto educacional na forma de uma sequência didática possibilita a aprendizagem de conceitos matemáticos envolvendo função de 1º grau?

Na busca por respostas a essa questão, definimos como objetivo geral, analisar se os significados referentes ao conteúdo de função de 1º grau, desenvolvido por meio de um produto educacional, foram apropriados pelos alunos, através das interações sociais produzidas pelos participantes do processo ensino-aprendizagem.

Como objetos de análise da proposta, foram utilizadas gravações e transcrições das aulas, memórias da professora/pesquisadora, planos de ensino e de aula e materiais produzidos pelos alunos.

Sob esse ponto de vista, a presente investigação está inserida na linha de pesquisa Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino de Ciências e Matemática, pois seu foco está no desenvolvimento de uma proposta didática e sua aplicação em sala de aula na disciplina de matemática.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: após a introdução, no primeiro capítulo, apresentam-se os procedimentos metodológicos gerais da pesquisa, juntamente com a caracterização da instituição e dos sujeitos envolvidos. O segundo capítulo é composto da revisão bibliográfica e de fundamentos teóricos que subsidiaram o desenvolvimento da presente dissertação. Na revisão bibliográfica, buscaram-se subsídios sobre processos e resultados de pesquisas relacionadas à educação algébrica de modo geral e, especificamente, sobre função de 1º grau. Os fundamentos envolveram concepções sobre álgebra e educação algébrica, pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria Histórico-cultural, além de uma caracterização a respeito de sequência didática. A análise do desenvolvimento do produto educacional em sala de aula está escrita no terceiro capítulo, seguida das considerações finais sobre o processo de pesquisa. Na sequência, é apresentada a proposta de produto educacional, na forma de uma sequência didática.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesse capítulo é apresentada a descrição da metodologia utilizada na pesquisa, justificando a escolha da abordagem qualitativa, descrevendo os procedimentos e os objetos para a análise. Também, é apresentado o ambiente no qual a pesquisa de campo foi realizada, contendo informações sobre a escola e os sujeitos participantes.

Sendo assim, este capítulo visa expor a trajetória metodológica na qual a pesquisa foi desenvolvida, trazendo contribuições de alguns autores sobre esse tema.

2.1 Aspectos metodológicos gerais

A presente dissertação tem como finalidade contribuir com o ensino e a aprendizagem da matemática por meio de um produto educacional aplicado em sala de aula. Nesse caso específico, o ambiente da pesquisa foi a sala de aula em que a própria pesquisadora é a professora titular de Matemática da turma do 9º ano do ensino fundamental de uma escola da rede particular de ensino no município de Passo Fundo/RS.

Com base em Bogdan e Biklen (1991), a presente pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa uma vez que a fonte direta dos dados é o ambiente natural de sala de aula e, sendo assim, o investigador é o principal instrumento da pesquisa. Outra característica dessa abordagem de pesquisa diz respeito à coleta e análise dos dados, sendo que "os resultados escritos da investigação contém citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, [...]" (p. 48).

Além disso, na investigação qualitativa, o interesse maior está no processo mais do que nos resultados, o que, segundo Bogdan e Biklen "esse tipo de estudo foca-se no modo como as definições (as definições que os professores têm dos alunos, as definições que os alunos têm de si próprios e dos outros) se formam" (1991, p. 50). Para os referidos autores, os dados são analisados de forma indutiva pelos investigadores, ou seja, "o investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões mais importantes antes de efectuar a investigação" (p. 50). É um processo que não apresenta uma conclusão final já conhecida, mas sim vai se moldando conforme os dados são analisados.

Ainda segundo Bogdan e Biklen (1991), a pesquisa se caracteriza qualitativa também por dar mais importância aos significados atribuídos pelos sujeitos.

> Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflecte uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra (p. 51).

Os investigadores pensam em modos de abordar o sujeito e questioná-lo a respeito de suas ideias, interessados nesse processo de interpretação e conclusão, preocupando-se com o registro dessas informações.

Vindo ao encontro do exposto, Minayo (2010) destaca que pesquisa qualitativa,

> [...] trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes. Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes. O universo da produção humana que pode ser resumido no mundo das relações, das representações e da intencionalidade e é objeto da pesquisa qualitativa dificilmente pode ser traduzido em números ou indicadores quantitativos (p. 21).

Segundo a autora, a importância da pesquisa qualitativa está no significado que é dado ao processo, ao desenvolvimento da pesquisa, dificilmente sendo possível ser representado somente através de números, como é feito na pesquisa quantitativa.

É possível investigar algo que está sendo estudado por meio de pesquisas qualitativas ou quantitativas. A presente pesquisa, caracterizada como qualitativa, configura-se como um estudo de caso, que de acordo com Lüdke e André “quando queremos estudar algo singular, que tenha valor em si mesmo, devemos escolher o estudo de caso” (1986, p. 17).

Essa abordagem foi escolhida, pois de acordo com Gatti e André “as contribuições advindas da utilização dos métodos qualitativos foram, e são, da maior relevância para a compreensão de inúmeras questões ligadas à Educação” (2010, p. 33), o que abrange os processos que estão sendo desenvolvidos no ambiente escolar, ou seja, as relações que existem no cotidiano de sala de aula. Segundo essas autoras, a oportunidade de se relacionar mais profundamente com as realidades investigadas, proporcionando a aproximação entre pesquisador e sujeitos da pesquisa, possibilitou algumas melhorias na educação, devido às intervenções diretas em cada contexto.

Para Borba e Araújo, “pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (2012, p. 25). Vemos, então, que a investigação qualitativa centra-se no processo, descrevendo como os sujeitos envolvidos comportam-se e defendem suas ideias. Para a análise, esse processo torna-se significativo, no qual o pesquisador busca entender como ocorreu o processo como um todo, com base em registros realizados durante a pesquisa.

De acordo com Minayo (2010), a pesquisa qualitativa apresenta um ciclo, constituindo um ritmo próprio, de acordo com o ambiente e os sujeitos envolvidos, denominado ciclo da pesquisa, o qual é iniciado com um questionamento e conclui com um resultado, oportunizando novas interrogações. Na concepção da autora, a pesquisa é constituída de três fases, sendo a primeira chamada de exploratória,

> consiste na produção de pesquisa e de todos os procedimentos necessários para preparar a entrada em campo. É o tempo dedicado [...] a definir e delimitar o objeto, a desenvolvê-lo teórica e metodologicamente, a colocar hipóteses ou alguns pressupostos no seu encaminhamento, a escolher e a descrever os instrumentos de operacionalização do trabalho, a pensar o cronograma de ação e a fazer os procedimentos exploratórios para a escolha do espaço e da amostra qualitativa (2010, p. 26).

Nesse momento são decididos inúmeros passos importantes, como, o processo, espaço e o público envolvidos na pesquisa.

Na sequência, o trabalho de campo é desenvolvido, levando à prática o que foi definido na fase exploratória. “Essa fase combina instrumentos de observação, entrevistas ou outras modalidades de comunicação e interlocução com os pesquisadores, levantamento de material documental e outros” (MINAYO, 2010, p. 26).

E, finalmente, a terceira fase, denominada pela autora como “*análise e tratamento do material empírico e documental*” (p. 26, grifos da autora), na qual são analisados os dados coletados no trabalho de campo. Essa fase refere-se

> [...] ao conjunto de procedimentos para valorizar, compreender, interpretar os dados empíricos, articulá-los com a teoria que fundamentou o projeto ou com outras leituras teóricas e interpretativas cuja necessidade foi dada pelo trabalho de campo. Podemos subdividir esse momento em três tipos de procedimentos: ordenação dos dados, classificação dos dados e análise propriamente dita (p. 26-27).

Busca-se com essa fase, compreender e interpretar as ideias dos informantes, ou seja, dos sujeitos envolvidos na pesquisa, através dos materiais coletados. Também não deve ser concluído, ou seja, tentar considerar a pesquisa como fechada, pois a característica dessa abordagem é gerar novos questionamentos com base no que foi levantado. Desse modo, “[...] valorizamos cada parte e sua integração no todo. E pensamos sempre num produto que tem começo, meio e fim e ao mesmo tempo é provisório” (MINAYO, 2010, p. 27).

Com base nesses autores percebemos que a pesquisa qualitativa é a mais adequada para investigações envolvendo os processos de ensino e de aprendizagem, pois são considerados inúmeros aspectos que na pesquisa quantitativa, por exemplo, poderiam ser desconsiderados. Essa relação mais próxima que existe entre sujeito e investigador, na pesquisa qualitativa, proporciona a ambos, a aprendizagem, o conhecimento e o questionamento daquilo que está sendo vivenciado no ambiente da pesquisa.

Seguindo essas orientações metodológicas, a presente pesquisa foi desenvolvida ao considerarmos a abordagem qualitativa devido à elaboração e análise do desenvolvimento do produto educacional em sala de aula. Em relação à proposta, seu desenvolvimento ocorreu por meio de análise do sequenciamento e redimensionamento conforme as necessidades foram sendo identificadas. Na análise, em que equivaleram os registros da professora, materiais dos alunos e as gravações das aulas, buscamos observar as relações que se estabeleceram em relação aos alunos e a apropriação dos significados matemáticos, com base nas interações que ocorreram ao longo do processo.

2.2 A instituição participante da pesquisa

No início dos estudos, a ideia foi priorizar conteúdos algébricos em uma turma de Ensino Fundamental. O conteúdo de funções foi escolhido de acordo com os planos de estudos da escola em que a proposta seria desenvolvida, optamos, assim, em aplicar o produto educacional em uma turma de 9º ano[1] do ensino fundamental da rede particular de ensino de Passo Fundo/RS, da qual a pesquisadora, autora desta dissertação, era a professora titular. A instituição de ensino é a Escola St. Patrick, fundada em 1994 para atender alunos da Educação Infantil. Em 1998 iniciou o atendimento a alunos do Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano) e em 2005 iniciou as atividades com alunos do Ensino

[1] Nesta escola só há uma turma de cada ano do Ensino Fundamental.

Fundamental II (6º ao 9º ano). Atendendo atualmente[2] aproximadamente 230 alunos, a escola conta com uma classe para cada ano de escolaridade. O objetivo da escola sempre foi possibilitar a participação dos alunos nas diversas situações propostas pelos professores, sendo esses os responsáveis pela organização e planejamento das atividades de ensino e de aprendizagem.

A filosofia da escola está centrada na produção de conhecimento e na capacidade de aprendizagem do aluno, sendo um projeto aberto para transformações. A intenção educativa da escola busca contribuir para que o aluno aprenda a aprender e “que sua repercussão não se limite ao que ele sabe, mas que também ao que sabe fazer e como vê a si próprio” (ESCOLA..., 2013).

A avaliação ocorre ao longo do processo ensino-aprendizagem, no qual o professor deve perceber nos alunos suas conquistas, as dificuldades apresentadas, o processo e a possibilidade de o aluno se reorganizar, com o objetivo de aprender.

Uma das principais metas da Educação Infantil é que os alunos tenham vínculos com professores, funcionários e com situações de aprendizagem vividas no cotidiano extraescolar. Também se espera que os alunos

> adquiram segurança em suas próprias capacidades expressivas, cognitivas, motoras, afetivas e sociais em relação aos outros e ao conhecimento, vivenciando múltiplas oportunidades para o desenvolvimento da criatividade e do prazer pelo conhecimento e cultura (ESCOLA..., 2013).

Outra meta da Escola é a construção de valores como autonomia e cooperação, ao cuidarem dos próprios pertences, dos materiais usados coletivamente, bem como o diálogo para resolver problemas, considerando, assim, o que o outro tem a dizer, tanto entre colegas como com adultos, conversando e, assim, expondo o seu ponto de vista.

Quanto ao espaço físico, a escola conta com duas casas, uma delas de dois pisos, na qual há quatro salas de aulas, uma sala dos professores, a sala da direção, a secretaria, quatro banheiros, duas despensas, uma cozinha, a biblioteca e uma sala de estudos. Na outra casa, há cinco salas de aula, quatro banheiros, o refeitório, a cozinha e a sala da Vice-direção. No espaço do pátio há uma quadra de esportes, uma piscina, um tatame e uma sala de artes.

---

[2] Dados do ano de 2015.

2.3 Os participantes do processo ensino-aprendizagem

A turma na qual foi desenvolvida a proposta do produto educacional para o estudo de Função do 1º grau, cursa o 9º ano do ensino fundamental e é composta por dez alunos, sendo seis meninas e quatro meninos, que apresentam idades entre treze e quatorze anos. No final do primeiro trimestre uma aluna deixou a escola, e na metade do ano, um aluno foi matriculado, voltando a ter dez alunos na turma.

Os alunos dessa turma são oriundos de famílias de classe média/alta, como a maioria dos alunos da escola, e residem no centro ou em bairros nobres da cidade. São alunos críticos em relação ao que acontece no mundo, no meio onde vivem, que buscam compreender o sentido do que acontece ao seu redor, com algumas exceções.

Em termos de aprendizagem, a turma é heterogênea, e, ao longo do trabalho na escola, com essa turma, em anos anteriores, é possível perceber essa característica. Iniciei minhas atividades de ensino com a referida turma no início do 7º ano e percebi que uma parte dos alunos aprendia com facilidade, enquanto a outra parte apresentava muitas dificuldades. Apesar da insistência na cooperação, os alunos não gostavam de se ajudar, e não percebiam que o processo de aprendizagem também ocorre quando interagem com o outro, em função do conhecimento.

Percebemos, ao longo da prática docente, que os alunos apresentaram dificuldades em conteúdos algébricos, como por exemplo, em resolução de problemas, conversão de tabela e gráficos em representações algébricas e vice-versa. Esse fato motivou a escolha do conteúdo de função, além de ser um conteúdo desenvolvido no 1º ano do ensino médio, como ampliação dos estudos no ensino fundamental.

Quanto à professora, sua formação inclui licenciatura plena em Matemática e especialização em Educação Matemática. Seu tempo de atuação no magistério inclui três anos e meio, dentre esses, três anos na escola citada.

3 FUNDAMENTOS DA PESQUISA

Nesse capítulo é realizada uma apresentação de informações necessárias para o desenvolvimento da pesquisa, o qual é composto dos seguintes temas: contribuições de pesquisas relacionadas ao tema Educação Algébrica; aspectos relevantes sobre Álgebra e Educação Algébrica; conceitos que compõem a Educação Algébrica, como sinal de igualdade, variável, raciocínio proporcional e alguns elementos teóricos sobre funções; contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica; sequência didática e Teoria Histórico-cultural.

3.1 Sobre pesquisas desenvolvidas em Educação Algébrica

Nesse item buscamos realizar um levantamento acerca de pesquisas realizadas em sala de aula com abordagens sobre Educação Algébrica, com o objetivo de verificar como conteúdos algébricos estão sendo desenvolvidos e que direcionamento apresentam. Sendo assim, buscamos pesquisas realizadas em sala de aula, com ou sem o desenvolvimento de produtos educacionais, baseando-nos em propostas que envolvam o aluno no processo ensino-aprendizagem.

Em sua pesquisa sobre *Equações no contexto de funções*: uma proposta de significação das letras no estudo da álgebra, Santos (2012) destaca a importância da aprendizagem em álgebra e seu interesse em pesquisar sobre esse conteúdo devido as dificuldades que os alunos apresentam. O trabalho buscou "uma maneira de dar sentido e significado ao uso das letras em Matemática explorando o trabalho com relações entre grandezas a partir de atividades que representem situações reais de várias formas (tabelas, funções, gráficos e equações)" (2012, p. 13).

Para atingir seus objetivos, Santos (2012) elaborou uma sequência didática como produto educacional a um grupo de alunos do terceiro ano do terceiro ciclo de uma escola pública municipal de Porto Alegre/RS. A pesquisa não foi realizada com a turma toda, devido ao fato de a turma de 3º ano selecionada, ser composta de trinta alunos e a falta de computadores em condições ideais. Os alunos foram selecionados com base em dificuldades em compreender o significado das letras em um cálculo matemático. A justificativa para a escolha desses alunos foi de que "conhecer as principais dificuldades apresentadas pelos alunos e uma perspectiva de construção do conhecimento é fundamental para o planejamento de ações pedagógicas e intervenções em sala de aula" (SANTOS, 2012, p. 77).

Santos (2012) apresentou em sua proposta inúmeras atividades envolvendo situações do cotidiano dos alunos e ideias sobre geometria, como relações entre as dimensões de uma figura e sua área. A autora também contribuiu a respeito do uso de tecnologias em sala de aula, como na sua proposta, na qual utilizou o *software Geogebra* no seu planejamento e relacionou com as atividades já desenvolvidas.

> O uso da tecnologia, também abordado no presente trabalho, é de extrema importância e pode melhorar significativamente a qualidade de ensino em nossas escolas. No entanto, para que isso ocorra é necessário que os professores saibam utilizar essa tecnologia de maneira que transforme efetivamente o paradigma educacional vigente (SANTOS, 2012, p. 77-78).

Além disso, para Santos (2012), a teoria sócio-histórica auxilia para que o professor possa entender tais comportamentos dos alunos em sala de aula, como realidade em que estão inseridos, possibilitando assim o planejamento de atividades que estejam relacionadas ao seu cotidiano. Em suas considerações finais, a autora salienta que os resultados esperados foram alcançados, observando um progresso na compreensão dos alunos em relação ao tema proposto.

Ao concluir, a autora destaca que com pesquisas realizadas pelos professores, na busca de aulas que despertem a curiosidade podem ser alternativas para que os alunos apresentem prazer em aprender.

A pesquisa desenvolvida por Schönardie (2011), *Modelagem matemática e introdução da função afim no ensino fundamental*, teve como objetivo "apresentar uma proposta para o ensino de função afim, desenvolvendo-se todas as atividades em turmas de primeiro ano do terceiro ciclo" (p. 6). A pesquisa desenvolveu-se em sua turma de 1º ano do 3º ciclo, equivalente ao 7º ano do ensino fundamental, formada por 28 alunos, de uma escola municipal de Porto Alegre/RS. A proposta girou em torno de investigar planos oferecidos pelas principais operadoras de telefonia, com atividades envolvendo modelagem matemática.

Schönardie (2011) escolheu como metodologia a abordagem e, com base em Borba (2004)[3], destaca que não existe uma metodologia ideal, pois a pesquisa depende dos

---

[3] BORBA, Marcelo. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27, 2004, Caxambu. *Anais*...Caxambu: Anped, 2004. 1 CD-ROM.

elementos que a compõem ou como serão analisados. Assim, ressalta que "se descartou a possibilidade de analisar os dados via pesquisa quantitativa, porque não se almejava a classificação dos dados puramente, mas sim, a melhor forma de analisar como os alunos reagiriam às novas experimentações" (2011, p. 54). De acordo com a autora, o trabalho realizado com modelagem matemática foi positivo, pois houve a compreensão dos conceitos desenvolvidos em sala de aula, bem como o interesse dos alunos em aprender mais sobre o conteúdo. Schönardie (2011) ainda coloca que os objetivos da proposta foram alcançados, inclusive alguns objetivos particulares de alguns alunos foram concretizados.

Na pesquisa intitulada *O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do ensino fundamental*: um trabalho com situações do cotidiano, Seckler (2010) traz como objetivo geral "analisar as possibilidades de trabalhar o conceito de função polinomial do 1º grau com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, a partir da resolução de problemas relacionados ao cultivo de produtos agrícolas" (p. 11). A pesquisa foi realizada com 22 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola rural do município de Candelária/RS.

A metodologia utilizada por Seckler (2010) é de caráter qualitativo, juntamente com Ensino-Aprendizagem-Avaliação para a resolução de problemas. Para a coleta dos dados da pesquisa, foram realizados questionários com os alunos, que são instrumentos tradicionais.

A autora aplicou um questionário com os alunos e solicitou a profissão dos pais, os produtos que eram plantados em suas residências e também que conteúdos matemáticos eram utilizados no seu cotidiano. Em outro questionário, a referida autora solicitou que os alunos respondessem questões como quantidade de hectares plantados, as sacas colhidas e seus valores. A partir dessas informações elaborou alguns problemas referentes às respostas dos alunos.

Em suas considerações finais, Seckler (2010) destacou que os alunos estavam entusiasmados e dedicados perante a proposta, porém, devido as possíveis dificuldades, os alunos só conseguiram chegar ao conceito de função no final da última etapa. Além disso, ao longo do trabalho, os alunos apresentaram dificuldades em problemas que envolviam raciocínio proporcional, pois várias atividades necessitavam desse conhecimento. Por isso, para a autora "[...] a contextualização dos problemas pode ser uma forma de ensinar o conteúdo de funções ou outros para os quais seja possível planejar atividades que envolvam o cotidiano dos estudantes ou de suas famílias" (p. 56).

Santos (2014), em sua pesquisa *Modelagem matemática como ambiente de aprendizagem de conteúdos algébricos no 9º ano do Ensino Fundamental*, visa elaborar e aplicar uma proposta didática, investigando sua aplicação como ambiente de aprendizagem na construção de novos significados de conteúdos algébricos. A aplicação da proposta foi realizada em uma turma de vinte e seis alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública na Paraíba. Para fazer a análise da proposta aplicada, foram feitos registros em um caderno de campo, aplicação de questionários e análise de como conceitos e procedimentos algébricos eram utilizados em atividades práticas.

Segundo o autor, os alunos já haviam tido contato com o conteúdo de funções no início do ano, apesar disso, apresentaram dificuldades em realizar as tarefas da proposta. Ao longo da proposta, os alunos conseguiram desenvolver alguns conceitos, principalmente na construção de funções que representavam relação entre grandezas. Como o trabalho foi realizado em uma escola rural, os alunos estavam familiarizados com alguns cálculos, que foram abordados na proposta de forma mais clara.

Ainda segundo Santos (2014), o objetivo inicial foi alcançado, de modo que os alunos conseguiram associar conteúdos algébricos ao cotidiano rural. A autora considerou o trabalho significativo dentro dos objetivos que foram definidos antes da proposta ser desenvolvida.

Com base nessas pesquisas, percebe-se que todas as propostas foram desenvolvidas em sala de aula, sobre o conteúdo de Funções, que contextualizou a Matemática com outros conteúdos e com o cotidiano dos alunos, ao destacar a importância de seu desenvolvimento em sala de aula.

3.2 Álgebra e Educação Algébrica

Ao refletir sobre matemática, pensamos em uma ciência exata, contudo, são necessários teoremas e axiomas que comprovem essas ideias. Caraça (1998) destaca que, "o objectivo final da Ciência é, portanto, a formação de um *quadro ordenado* e *explicativo* dos fenômenos naturais" (p. 101, grifos do autor). A ciência envolve fenômenos e sua comprovação ocorre por meio de esclarecimento desses acontecimentos e, para isso, duas exigências devem ser respeitadas: uma de compatibilidade e outra de acordo com a realidade. Para ele, quanto mais poder de previsão acerca de fenômenos existir, mais domínio da natureza terá o homem. É claro que em nenhum momento deve haver uma conclusão, algo acabado, apenas devem existir previsões muito próximas da realidade, que satisfaçam as duas exigências colocadas.

O autor nos mostra que os homens, ao longo do tempo, buscam explicações para determinados fenômenos que ocorrem em nosso universo. Apresentam-se em duas características: interdependência, na qual todas as coisas que existem possuem relação umas com as outras e fluência, na qual tudo está em constante transformação, ou seja, nada está em estado intacto. As mudanças podem ocorrer de diferentes modos como, por exemplo, por influência do tempo ou do homem.

Para o autor, quando buscamos estudar algum fenômeno, utilizamos como exemplo um “isolado”, ou seja, um recorte da realidade, para designar um conjunto de elementos, pois um estudo de tudo é inviável, já que tudo o que existe no mundo apresenta a característica de interdependência. Um exemplo relacionado com a matemática é que a adição entre dois números ímpares sempre resulta em um número ímpar. Não foi necessário adicionar todos os números ímpares para que se chegasse a essa conclusão, apenas uma amostra dos números foram testados. É inviável no sentido que se levariam anos para chegar à explicações de fenômenos, porém é possível o estudo de apenas uma amostra dessas coisas.

Por exemplo, para realizar uma descoberta, não é necessário analisar todos os fenômenos que seguem o mesmo padrão. É possível levar em consideração apenas uma amostra, um isolado, estabelecer um padrão e, para todos os fenômenos que apresentam a mesma característica, chegar a uma conclusão, uma ideia única para todos.

Contudo, como consideramos apenas uma parte da realidade, é possível encontrar problemas, fatos inesperados que podem ocorrer por se considerar apenas uma amostra do todo. Segundo o autor, isso constitui um erro, que se refletirá nos resultados obtidos do estudo. Assim, percebemos que o isolado não foi determinado corretamente, outros fatores deveriam ser levados em consideração.

> [...] após ter tomado como *isolado* cada um dos órgãos duma árvore e estudado a sua fisiologia particular, constitui-se um *isolado* superior – árvore e terreno – no qual se estudará a vida fisiológica da árvore. Por sua vez, a árvore pode ser tomada como uma unidade dum novo *isolado* mais largo – uma floresta, – a flora duma região, etc (CARAÇA, 1998, p. 106, grifos do autor).

Então, segundo Caraça (1998), as partes de uma árvore constituem-se um isolado, porém a árvore como um todo ou o contexto no qual ela está inserida constitui-se outro isolado. Há casos em que necessário considerar um isolado como "elemento constitutivo de um outro mais largo" (p. 106), ou seja, existem níveis que podem ser considerados para que não ocorra fatos inesperados que possam influenciar os resultados.

Em um estudo matemático, por exemplo, é necessária a realização de descobertas utilizando um isolado como amostra, como em uma pesquisa realizada com conteúdos algébricos. Logo, as ideias de Caraça (1998) nos auxiliam na compreensão do processo de estudo e desenvolvimento da álgebra, pois explicam como as descobertas foram acontecendo e como foram concluídos determinados axiomas ou teoremas, utilizados tanto no campo da matemática pura e aplicada, como no campo da educação matemática.

Em outra perspectiva, há autores que utilizam as mesmas ideias apresentadas por Caraça, como Walle (2009) e Booth (1995), porém direcionando-as à Educação Algébrica.

Álgebra pode ser descrita sob o seguinte ponto de vista:

> envolve generalizar e expressar essa generalização usando linguagens cada vez mais formais, onde a generalização se inicia na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e virtualmente em toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares (KAPUT, 1999 apud WALLE, 2009, p. 288).

Podemos perceber que o autor cita a álgebra como uma generalização e sua expressão, sendo que essa generalização sempre deve ser mais elaborada, conforme os conteúdos vão sendo aprofundados pelo professor. Em geometria, por exemplo, quando se determina a área do quadrado, é importante generalizar, dependendo do nível de ensino que os alunos se encontram. Conforme o conteúdo vai avançando, o professor solicita a generalização de outras áreas, como a do losango e solicita sua explicação através de uma linguagem matemática.

Segundo Kaput, há cinco formas de raciocínio:

> 1. Generalização da aritmética e de padrões em toda a matemática. 2. Uso significativo do simbolismo. 3. Estudo da estrutura no sistema de numeração. 4. Estudo de padrões e funções. 5. Processo de modelagem matemática, que integra as quatro anteriores (KAPUT, 1999 apud WALLE, 2009, p. 288).

Para Usiskin (1995), álgebra é algo difícil de definir, podendo assumir inúmeras ideias, como realizar diversas operações com números, inicialmente. Para realizar essas operações, existem regras que precisam ser cumpridas, e valem para todos os valores e ainda para letras que representam números. De acordo com o autor, o objetivo do ensino algébrico está relacionado ao uso das variáveis, de maneira intrínseca. "**As finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com*, **concepções** *diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis**" (p. 13, grifos do autor).

A primeira concepção apresentada por Usiskin (1995) é que a álgebra é considerada como aritmética generalizada, ou seja, operações realizadas com números, que, posteriormente, podem ser trocados por letras e a ideia permanece a mesma. Nessa concepção, "as instruções-chave para o aluno são de *traduzir e generalizar*. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética" (p.13, grifos do autor). Além de operações, a generalização envolve a criação de um modelo matemático para representar a relação entre as variáveis, contudo é necessário que o aluno esteja num nível mais avançado no estudo algébrico.

A segunda concepção refere-se à álgebra como o estudo de procedimentos para a resolução de problemas. No item anterior, é apresentada uma generalização, ou seja, uma fórmula matemática que relaciona duas variáveis. Se o objetivo for descobrir uma das variáveis da sentença encontrada, a fórmula se transforma em uma equação e as variáveis são as constantes ou as incógnitas, e essa concepção tem como instrução "*simplificar* e *resolver*" (p. 15, grifos do autor).

A terceira concepção de álgebra, trazida por Usiskin (1995), refere-se às relações entre as grandezas, na qual as variáveis apresentadas em uma fórmula matemática variam de acordo com a situação. Dessa forma, "uma variável é um *argumento* (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um *parâmetro* (isto é, representa um número do qual dependem outros números)" (p. 16, grifos do autor). Aqui as ideias de variável independente e dependente, respectivamente, podem ser observadas.

E por fim, a concepção que refere-se a álgebra como estudo das estruturas, na qual a variável é um "símbolo arbitrário" (p. 18), diferentemente das situações anteriores. Essa concepção diz respeito às ideias utilizadas para fatorar expressões algébricas, por exemplo. O autor afirma que inúmeras vezes o estudo das estruturas não envolve números, contudo as letras representam variáveis. Nesse sentido os alunos podem apresentar dificuldades em compreender os procedimentos. Com base nessas ideias, tais concepções poderiam ser vinculadas no ensino da álgebra em sala de aula. Sobre o ensino algébrico, Walle (2009) destaca que, de uma abordagem com situações hipotéticas, dificilmente vivenciadas no cotidiano, passou-se a priorizar “o tipo de pensamento e raciocínio que prepara os alunos a pensar matematicamente” (p. 287). O desenvolvimento do raciocínio não apenas para o conteúdo que está sendo estudado, mas também a fim de preparar o aluno para os próximos conteúdos, estimulando a generalização.

O estudo algébrico inicia-se, normalmente, no 7º ano do ensino fundamental. Antes disso, os alunos desenvolvem o raciocínio aritmético, porém em inúmeras situações os alunos podem ter contato com a álgebra, por meio das generalizações.

> A álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a ‘aritmética generalizada’. E nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos (BOOTH, 1995, p. 33).

Na concepção de Booth (1995) e Usiskin (1995), álgebra e aritmética não poderiam ser desenvolvidas como conteúdos diferentes, sem ligação, pois um é consequência do outro. É dito ainda que possivelmente, um motivo para as dificuldades encontradas pelos alunos quando estão aprendendo conteúdos algébricos, é a falta de formação quando o conteúdo era aritmético.

Nesse sentido, um dos problemas relacionados à aprendizagem da álgebra está na percepção do aluno da falta de relação entre as duas áreas da Matemática o que ocorre devido a sua abordagem em sala de aula.

Segundo Booth (1995), a aritmética e a álgebra apresentam focos diferentes, porém muitos alunos não conseguem perceber as especificidades de cada campo matemático. Por exemplo, em aritmética, o objetivo é encontrar respostas numéricas, enquanto que, em álgebra, o foco está nas relações e nos procedimentos estabelecidos e na demonstração de forma simplificada. Além dessa diferença, indicada pelo autor, a álgebra é uma linguagem mais complexa do que a aritmética, por ser de natureza mais abstrata. Nesse sentido, o desenvolvimento da linguagem algébrica propiciará ao aluno um tipo de “pensamento novo e mais elevado” (VYGOTSKY, 1998, p. 143).

Quando realizamos generalizações, precisamos utilizar símbolos que representem o que estamos tentando generalizar. Segundo Walle “a fim de fazer generalizações é útil usar simbolismos. Desse modo, as generalizações e uma compreensão de variáveis e do simbolismo são ambas desenvolvidas ao mesmo tempo" (2009, p. 288).

Segundo Ribeiro e Cury (2015), a escrita de um problema algébrico em linguagem corrente pode proporcionar ao aluno refletir sobre a informação que está sendo transmitida e o que está sendo solicitado. A utilização de símbolos por parte do aluno para tentar resolver o problema é o ponto de partida do estudo da álgebra.

> [...] no início do trabalho com Álgebra, podemos expressar um problema em linguagem corrente, pensamos sobre ele, tentamos expressá-lo com ajuda de símbolos – que, dependendo da faixa etária dos alunos, podem ser figuras ou letras – e chegamos à linguagem algébrica que, por sua vez, por meio da generalização, nos permite utilizar o mesmo pensamento em situações-problema (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 14).

De acordo com os autores, esses procedimentos podem ser significativos para a aprendizagem dos conteúdos algébricos, porém os conteúdos aritméticos devem estar bem claros para os alunos, a fim de que não haja problemas com a sua generalização.

Além disso, Demana e Leitzel (1995) mostram que é importante que os alunos saibam a hierarquia das operações para a resolução de uma expressão numérica, para que possam compreender o processo ao determinar o valor numérico de uma expressão algébrica e, assim, relacionar conteúdos algébricos com aritméticos.

Demana e Leitzel (1995) assim como Ribeiro e Cury (2015) identificaram que os alunos apresentam dificuldade em expressar o resultado perante um cálculo que envolve a propriedade distributiva, não sabendo distribuir a multiplicação em relação a uma adição. Os primeiros autores citados defendem a ideia de que cálculos envolvendo parênteses no conteúdo de expressões numéricas, caracterizado por eles como pré-álgebra, seriam importantes para que se evitassem esses tipos de erros.

Com base em suas pesquisas, para Ribeiro e Cury (2015) o foco está na solução, não sendo abordada nenhuma manipulação geométrica, como as realizadas pelos árabes, por exemplo,

> [...] as manipulações geométricas, empregadas por gregos, árabes e hindus, parecem ter sido abandonadas no ensino atual; a ênfase nas soluções gerais e no caráter estrutural das equações pode ser um dos fatores que levam os alunos da educação básica a enfrentarem tantas dificuldades na construção do conceito de equação e na sua solução (p. 78).

Todo o conhecimento matemático envolvido até agora necessitou de suposição e teste de hipóteses até chegar à conclusão de determinada ideia. Para isso, muita investigação foi realizada, a fim de provar teoremas e axiomas. Deste modo, é importante para o professor pesquisar como foi a evolução da álgebra e incentivar seus alunos a investigar suas suposições (RIBEIRO; CURY, 2015).

Sobre a evolução da álgebra, Lins e Gimenez (1997) trazem alguns fatos importantes, informando como foi sua criação e desenvolvimento. Segundo os autores, por volta de 1700 a.C., os babilônios e os egípcios elaboraram regras para resolução de inúmeros problemas da época, porém sem utilizar notação; aproximadamente dois mil anos depois, Diofanto utilizava um símbolo que representava a incógnita, sendo semelhante a utilizada atualmente; por volta do ano de 1550, Vieta estruturou a utilização das letras em expressões algébricas, tendo criado regras, considerando noções de geometria e aritmética. A seguir, supostamente o último passo do desenvolvimento da álgebra,

> seria a gênese da noção de estrutura algébrica, primeiro com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829), de forma “implícita”, até chegarmos a Bourbaki (a partir de 1940), e aí entramos no domínio próprio do “cálculo com letras”, mas num sentido bem mais sofisticado, o da *sintaxe*: um cálculo com regras próprias e ignorantes de qualquer sistema particular que funcione como elas (números, por exemplo). Um mundo, enfim, completamente “abstrato” (p. 91).

Para os autores, o desenvolvimento das chamadas “notações algébricas” (1997, p. 90) nos traz ideias para que possamos compreender o que é a atividade algébrica e como caracterizá-la, com base em uma breve linha do tempo, apresentada anteriormente.

Com base no exposto, percebemos que, ao contrário do que possamos pensar, álgebra e aritmética não são dois campos matemáticos isolados, e, para que o conteúdo de álgebra possa ser desenvolvido, o conteúdo de aritmética precisa, também, estar desenvolvido em um determinado nível, para que o aluno possa estabelecer relações mais abstratas. Como o autor cita anteriormente (WALLE, 2009) a álgebra pode ser entendida, também, como uma generalização da aritmética.

3.3 Conceitos importantes para a Educação Algébrica

Neste item, iremos destacar componentes que fazem parte da compreensão de conteúdos algébricos, como, por exemplo, o sinal de igualdade na aritmética e na álgebra, o conceito de variável, a importância do raciocínio proporcional e sua relação com funções e aspectos teóricos mais específicos sobre esse último assunto.

3.3.1 Igualdade na Aritmética e na Álgebra

Para Socas et al. (1996) as dificuldades apresentadas no estudo de conteúdos algébricos justifica-se pelo fato de os alunos já apresentarem dificuldades em problemas de aritmética, como, por exemplo, o sinal de igualdade na matemática, expresso na forma algébrica.

Segundo Walle (2009), os estudantes são informados que o sinal de igualdade separa o problema proposto (normalmente do lado esquerdo) do resultado (lado direito), ou seja, “no formato escrito ele separa o problema da resposta” (p. 288). Para o autor, os alunos não devem acreditar que o sinal de igualdade representa apenas um resultado que será encontrado, apesar de, por exemplo, uma calculadora associar esse símbolo a um resultado específico. Há muitas propriedades e generalizações matemáticas envolvidas. Essas ideias deveriam ser abordadas com os alunos de forma clara, pois se houve falhas na aprendizagem de conteúdos aritméticos, eles apresentarão dificuldades em conteúdos algébricos.

Walle (2009) chegou a essa conclusão devido a trabalhos realizados com alunos, nos quais grande parte não conseguia preencher o número correto no espaço indicado, como na igualdade oito mais quatro é igual a um número mais cinco. Diversas atividades foram realizadas e constatou que alunos da 6ª série não sabiam como resolver.

Ao contrário do que se possa pensar, a dificuldade em compreender o que representa o sinal de igualdade em uma sentença matemática acompanha os alunos até o final do Ensino Fundamental. De acordo com Kieran, “[...] no contexto do estudo de equações, crianças de doze a catorze anos de idade consideram o sinal de igualdade (=) como um símbolo unidirecional que precede uma resposta numérica” (1981 apud BOOTH, 1995, p. 27).

Ainda de acordo com Booth (1995), para que a compreensão algébrica ocorra, é necessário que o aluno perceba que o sinal de igualdade não está associado apenas ao resultado, mas sim a uma relação de equivalência, também. A percepção das duas noções, uma relacionada com a aritmética e outra com a álgebra, não ocorre de imediato no aluno, ocasionando possíveis dificuldades na compreensão.

Porém, será que apenas na álgebra esse significado é importante? Segundo Walle (2009), é necessário que os alunos compreendam o que representa o sinal de igualdade para o entendimento das relações que existem no nosso sistema numérico. Inúmeras ideias básicas da aritmética estão envolvidas nessas relações, contudo, se o aluno não se apropriar desse conceito, sua dificuldade se estende até o estudo de conteúdos algébricos. Ainda segundo o autor, "quando essas ideias, inicial e informalmente desenvolvidas na aritmética, são generalizadas e expressas de modo simbólico, relações poderosas se tornam disponíveis para trabalhar com outros números de modo generalizado" (p. 288).

Ao encontro das concepções Walle (2009) e Booth (1995), Socas et al. (1996), destaca que o sinal de igualdade está associando um problema numérico com o seu resultado, no qual conhecemos uma parte e a outra deve ser descoberta. Em outros casos, pode estar relacionando dois processos, que resultam em um mesmo valor.

Ainda segundo Socas et al. (1996), há uma importante mudança no sentido do sinal de igualdade da aritmética para a álgebra. Na aritmética, o sinal de igualdade relacionava dois processos, porém, na álgebra, numa equação, por exemplo, o objetivo é descobrir o valor da incógnita para determinar o termo desconhecido para que a igualdade se torne verdadeira.

Com base no que foi exposto, referente às dificuldades apresentadas pelos alunos na aritmética, principalmente com o sinal de igualdade, para que a compreensão de conteúdos algébricos possa, de fato, ocorrer, há necessidade de identificar possíveis dificuldades que persistem em conteúdos aritméticos.

3.3.2 Significado de variável

De acordo com Walle, "as variáveis são um dispositivo de representação extremamente poderoso que permite a expressão de generalizações" (2009, p. 290). O objetivo do aluno é identificar uma expressão genérica, sendo que "as letras podem ser usadas como valores desconhecidos simples (incógnitas) ou como quantidades que variam (variáveis)" (p. 290).

Ainda de acordo com o autor, as letras usadas como valor desconhecido desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento do pensamento relacional. Inicialmente, o professor pode utilizar uma figura para representar um número desconhecido, antes de iniciar utilizando uma letra. É importante questionar que número a letra deveria assumir para que a sentença seja considerada verdadeira.

Segundo Booth (1995) a principal diferença entre aritmética e álgebra é a questão da notação, ou seja, a álgebra utiliza letras para indicar números. Para o autor, uma possível causa das dificuldades na compreensão desse conteúdo seja o uso das letras, ao invés de apenas números. Outro fator que pode ocasionar dúvidas é a escrita de alguma afirmação com uma letra minúscula, indicando uma grandeza e a mesma letra, porém maiúscula, indicando outra como, por exemplo, c para caderno e C para custo. Ou, ainda, em alguns casos, são utilizadas letras que não tem ligação nenhuma com as variáveis abordadas, como, por exemplo, para representar a variável “caneta” usando o símbolo “x”, ao invés de “c”, gerando assim possíveis dificuldades.

Com base em Usiskin (1995), a principal característica da álgebra é a utilização de9 letras que representam números em cada fórmula. Para o autor, o qual destaca ser uma ideia dificilmente questionada, a variável se caracteriza como um símbolo, ao representar elementos de determinado conjunto. Contudo, ainda que as variáveis representem definições ou símbolos, assim como o conceito de álgebra, tentar caracterizar uma variável em uma única concepção pode alterar as ideias referentes aos elementos algébricos, que, por sua vez, compõem cada situação.

Como já foi dito, para esse autor, os objetivos do estudo algébrico dependem da utilização das variáveis em determinada situação, ou seja, a álgebra apresenta diferentes concepções e cada uma diferencia-se de outra pela função que a variável representa em cada caso.

Com base na ideia de que as letras representam números, em alguns casos não há um valor específico ou único para a letra. Isso vai depender do contexto em que a letra está inserida. Segundo Booth (1995), os símbolos que utilizamos na aritmética possuem um valor único, o que pode ocasionar dúvidas quando o assunto de estudo for álgebra, mais especificamente variáveis, as quais podem assumir diferentes valores. Outro equívoco é pensar que cada letra representa um único valor e, então, as letras “x” e “y” não poderiam assumir o mesmo valor numérico, pois na aritmética cada número representa uma única quantidade.

Como já foi mencionado anteriormente, juntamente com as contribuições de Booth (1995), pensa-se que os erros apresentados quando são desenvolvidos conteúdos algébricos ocorrem devido a erros aritméticos que não foram esclarecidos. Essas dificuldades vão se mantendo e o desempenho na álgebra pode ser comprometido.

De acordo com Demana e Leitzel (1995), se o conceito de variável não for compreendido de forma clara desde o início, tudo o que será proposto em relação à álgebra poderá ser afetado.

> Descobrimos que a introdução de variáveis para representar situações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações (p. 74).

Como já vimos, normalmente o estudo algébrico inicia-se com generalizações, então é importante que os alunos compreendam o que as letras representam no processo em cada situação.

As dificuldades que os alunos apresentam no momento de utilizar as variáveis para representar situações podem ser decisivas para que todo o processo de ensino da álgebra não tenha êxito. Para Demana e Leitzzel (1995), o uso das variáveis é de extrema importância para que os alunos percebam a infinidade de valores que podem ser associados à uma situação representada por meio de uma fórmula, por exemplo.

> Descobrimos que a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações. [...] A variável é um instrumento eficaz para expressar todos os casos particulares de uma maneira concisa (p. 74).

Não há necessidade de escrever todos os valores que podem ser utilizados em uma situação, mas sim definir uma variável que possa representar a quantidade de valores que conseguem ser utilizados em determinada situação. Nesse sentido, ao encontro do que foi dito, percebemos se tratar de um isolado, segundo Caraça (1998), no qual apenas alguns valores são testados e, para os demais, sabemos que a ideia irá permanecer.

Outra ideia importante de se destacar é a diferença entre incógnita e variável que, segundo Kieran (1995), pode ser algo complicado para o aluno, pois, segundo pesquisa da autora, os alunos identificam que a letra da equação é incógnita por envolver operações inversas, admitindo um valor. Porém, em uma expressão algébrica, a letra é chamada de variável, pois o raciocínio de operação inversa não pode ser realizado devido à falta do sinal de igualdade.

Notamos que as ideias apresentadas sobre o conceito de variável são importantes, tanto para o professor, que deve ter clareza do seu papel no estudo de conteúdos algébricos, quanto para os alunos, a fim de que percebam a utilização das referidas ideias como representação de uma nova ideia, uma forma geral para se representar uma situação.

3.3.3 Raciocínio proporcional e funções

O estudo de diversos conteúdos depende de como o raciocínio proporcional foi desenvolvido, o qual pode ser considerado como uma base para a construção de ideias algébricas. Podemos citar que "O raciocínio proporcional é considerado a pedra fundamental do currículo elementar e uma base do pensamento algébrico" (LESH; POST; BEHR, 1987 apud WALLE, 2009, p. 382).

O raciocínio proporcional desenvolve capacidades para o entendimento de relações multiplicativas que estão presentes em diversas situações. Segundo Walle (2009), um dos propósitos do Ensino Fundamental é o desenvolvimento desse tipo de raciocínio.

O raciocínio proporcional envolve razões com a comparação entre grandezas, por meio do raciocínio multiplicativo.

> O pensamento proporcional é desenvolvido por atividades que envolvem comparar e determinar a equivalência de razões e resolver proporções em uma ampla variedade de contextos e situações baseadas em resolução de problemas sem recurso à regras ou fórmulas (WALLE, 2009, p. 382).

Tais atividades não devem ter como finalidade que os alunos só apresentem uma coleção de habilidades, mas, principalmente, que visem o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Para Walle (2009), a razão faz uma relação entre duas grandezas, o que pode ser observado em vários contextos. Há razões que envolvem parte de um todo em que as frações são incluídas. Existem razões nas quais são comparadas apenas partes, como a relação entre meninos e meninas em uma sala de aula. Razões também podem expressar taxas, ao comparar medidas e/ou situações diferentes, como, por exemplo, quantos quilômetros um veículo percorre por hora. Também são apresentadas algumas razões no campo da geometria, como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado. De acordo com o autor, conceitualmente,

> [...] razão é um número que expressa uma relação multiplicativa que pode ser aplicada a uma segunda situação onde as quantidades ou medidas *relativas* sejam as mesmas que na primeira situação. Uma proporção é uma declaração de igualdade entre duas relações (WALLE, 2009, p. 383, grifos do autor).

Quando tratamos de situações que envolvem multiplicação, não podemos pensar em algo que simplesmente será adicionado para que se mantenha a proporção, pois, segundo Nunes e Bryant,

> situações que dão lugar a raciocínio multiplicativo são diferentes, pois não envolvem as ações de unir e separar. Distinguiremos três tipos principais de situação multiplicativa: situações de correspondência um-para-muitos, situações que envolvem relações entre variáveis e situações que envolvem distribuição, divisões e divisões ao meio (1997, p. 143).

Considerando o que é colocado por Nunes e Bryant (1997), há algumas situações multiplicativas que se destacam, como a correspondência um-para-muitos: “a correspondência um-para-muitos é a base para um novo conceito matemático, o conceito de *proporção*” (p. 143, grifo dos autores). Nessas situações é necessário um raciocínio multiplicativo, pois, segundo os autores, uma situação aditiva implicaria apenas em adicionar o mesmo valor em cada uma das grandezas, o que não manteria a proporção.

O número de vezes que uma proporção é replicada chama-se fator escalar. Uma proporção só é mantida quando a replicação é realizada, multiplicando-se ou dividindo-se as duas grandezas pelo fator escalar. Logo, vindo ao encontro das contribuições de Walle (2009), razão é o número que relaciona duas grandezas, enquanto uma proporção é a expressão que relaciona duas razões.

Nas situações que envolvem relações entre as variáveis – como os autores citados anteriormente trazem – relações de co-variação, as grandezas se relacionam em dobro ou metades, em triplos ou terças partes. Há casos em que é importante perceber absurdos, como, por exemplo, a ideia de um cachorro ter quatro patas, logo, meio cachorro teria duas patas. Porém, dizer que meio pacote de farinha custa a metade de um pacote de farinha não representa uma ideia absurda.

Na terceira situação apresentada por Nunes e Bryant (1997), chamada de distribuições e cortes sucessivos, a proporção não é conhecida no início, como na correspondência um-para-muitos. Aqui há uma relação da parte com o todo, podendo resultar em frações e as quantidades das grandezas podem ser aumentadas ou diminuídas, formando assim novas relações, como podemos observar nas ideias de Nunes e Bryant, destacando que distribuir,

> [...] é uma ação que se relaciona à operação de divisão e à possibilidade de cortes sucessivos. [...] O número de divisões sucessivas não tem o mesmo sentido que o número de replicações sucessivas: com a replicação não há transformação na relação entre as variáveis, enquanto que com a divisão há transformação na relação parte-todo (1997, p. 149-150).

Percebemos que, na correspondência um-para-muitos, o fator escalar determinava as proporções, porém as variáveis mantinham a mesma razão. Já nas situações que envolvem distribuições, uma análise da parte-todo deve ser observada, pois em cada corte, uma nova relação é formada entre as grandezas.

De acordo com Walle (2009), existem situações em que o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo resolvem determinado problema, porém a indicação de se apresentar raciocínio proporcional é a capacidade de distinguir qual dos dois tipos de raciocínio deve ser utilizado, em cada situação. Ainda segundo o autor, definir o que são os pensadores proporcionais pode ser algo complexo, sendo mais qualitativo do que quantitativo e que possui algumas características, citadas a seguir:

> possuem um *senso de covariação*. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação de outra; reconhecem *relações proporcionais* como distintas de relações não-proporcionais em contextos do mundo real; desenvolvem uma ampla variedade de *estratégias* para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos; compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam (LAMON, 1999 apud WALLE, 2009, p. 384, grifos do autor).

A contribuição do autor vem ao encontro do que já foi dito por Nunes e Bryant (1997), os quais citam sobre a questão da covariação, ou seja, situações em que as grandezas variam conforme um fator escalar. Em alguns casos, na resolução de um determinado problema, não impreterivelmente haja necessidade de um algoritmo para a resolução, estratégias informais podem perfeitamente resolver uma situação.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), o tamanho de um conjunto de valores das grandezas não está relacionado com a mudança da proporção e do fator escalar, pois são valores constantes. Assim, se o número de elementos dos conjuntos das grandezas aumentar de acordo com o fator escalar, a proporção é mantida.

> [...] situações de correspondência um-para-muitos envolvem o desenvolvimento de dois novos sentidos de número: a *proporção*, que é expressada por um par de números que permanece invariável em uma situação mesmo quando o tamanho do conjunto varia, e o *fator escalar*, que se refere ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos mantendo a proporção constante. Deveria estar claro que nenhum destes sentidos se relaciona ao tamanho do conjunto: a proporção e o fator escalar permanecem constantes mesmo quando o tamanho varia (p. 144, grifos dos autores).

Percebemos a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional, uma vez que se configura como base para o estudo de muitos dos conteúdos matemáticos, como, por exemplo, para as funções, que fazem parte da área da álgebra que estuda a relação entre quantidades, ou seja, relação entre grandezas (USISKIN, 1995). E assim, esse raciocínio proporciona uma compreensão acerca das ideias envolvidas no conteúdo de funções.

3.3.4 Fundamentos matemáticos sobre funções

Para podermos entender o que é uma função e seus elementos, é necessário um estudo, como foi dito anteriormente por Caraça (1998), por partes, sendo que alguns aspectos devem ser levados em consideração. O autor nos traz a noção de qualidade, sendo "o conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado, chamaremos as qualidades desse ser" (p. 93).

Se A e B são dois componentes de um isolado, em um primeiro momento, no sentido de A para B, dizemos que tem antecedente A e consequente B e, num segundo momento, no sentido de B para A, dizemos o inverso. O primeiro momento pode ser denotado desta forma: $A \rightarrow B$. "A relação é *uma*, simplesmente os seus dois sentidos têm significados distintos para os respectivos consequentes" (p. 106, grifos do autor). Quando ocorre o mesmo significado, chamamos de relação *simétrica*. As relações que ocorrem em um isolado, quando temos $A \rightarrow B$, são as qualidades de A em relação à B.

Algumas consequências são levadas em conta, como, entre os componentes do isolado, sempre deve existir interdependência. Uma delas diz respeito ao conceito de interdependência, ou seja, os componentes de um isolado devem ter alguma relação entre si. Como segunda9 consequência, o autor mostra que “qualidades são relações orientadas; se os consequentes mudam, mudam-se as relações” (CARAÇA, 1998, p.107), ou seja, por exemplo, a coruja, em relação ao gavião, é a presa, porém em relação ao rato, é o predador. Outra consequência diz respeito às qualidades em relação a um isolado, ou seja, só podemos levar em conta as qualidades de um ser dependendo do isolado em que ele está inserido.

Ainda em relação à qualidades, Caraça (1998) nos apresenta algumas noções importantes. Há casos em que as qualidades não podem ganhar intensidade, como, mais ou menos que outra, tal como se duas retas fossem mais ou menos perpendiculares. O autor traz quantidade como atributo da qualidade e como definições de quantidade, “aquilo que é divisível em dois ou mais elementos integrantes, dos quais cada um é, por natureza, uma coisa una e determinada”, ou “aquilo que é objeto de medida” (p. 109). Em alguns casos pode ser considerada como um atributo de qualidade e não como um objeto. Exemplo: a qualidade coragem é determinada pela quantidade de coragem, ou seja, a “quantidade é um atributo da qualidade e, como tal, só em relação a ela pode ser considerada” (p. 110).

Para Caraça (1998), em um isolado, é natural que ocorram mudanças, ou seja, evoluções, como tudo na Ciência, caracterizando como fenômeno natural a toda evolução que ocorre em um isolado. Podemos considerar um fenômeno natural quando uma roupa molhada seca no sol ou quando há o movimento das folhas de uma árvore por causa do vento. Porém, a lei natural só é considerada no momento em que ocorrem regularidades nessa evolução. Temos dois tipos de lei: a qualitativa e a quantitativa. A lei qualitativa é aquela que diz respeito à variação de qualidade e a lei quantitativa é aquela que diz respeito à variação de quantidade. Questiona-se, no entanto, se a realidade vivida é qualitativa ou quantitativa. O autor defende que, conforme fomos conhecendo a evolução da Ciência, chegou-se à conclusão que seu início ocorreu de forma quantitativa. Para nos aprofundarmos em informações qualitativas é necessário que possamos compreender o quantitativo. Ainda é preciso cuidar do verbalismo, pois a um certo tempo, alguns filósofos desejavam atribuir um nome a cada qualidade de um fenômeno, não estudando se aquilo fazia parte da própria fluência do fenômeno. O que originariam nomes inúteis para a Ciência.

Para que o estudo da lei quantitativa possa ocorrer, é natural que o desenvolvimento de um instrumento seja realizado, porém ele não será algo simples ou acabado, e sim estudado e aperfeiçoado de acordo com as leis quantitativas em questão. Segundo Caraça,

> O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente (1998, p. 119).

Esse instrumento nos auxilia a compreender melhor os resultados encontrados e a chegar a uma generalidade sobre a situação em questão. Complementando essa definição, o conceito de variável é um símbolo que representa qualquer elemento de um determinado conjunto, sendo finito ou infinito. Assim, "uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua *substância,* o seu *domínio* [...]" (CARAÇA, 1998, p. 120, grifos do autor). Nesse ponto chegamos a outra definição importante: o domínio, que, segundo o autor,

> [...] é o conjunto dos números reais compreendidos entre dois números reais *a* e *b* dados, ou, como correntemente se diz: o conjunto dos números reais no intervalo (*a*, *b*); a variável *x* diz-se então *variável real contínua* (o conjunto dos números reais é o equivalente aritmético do contínuo geométrico), ou simplesmente *variável real* (p. 120, grifos do autor).

Com base nesse autor, o domínio também pode ser definido como o "conjunto infinito dos números reais naturais" (p. 120), sendo representado pela letra *n*, pois a variável, neste caso, é inteira. Além disso, especificamente sobre a noção de função e sua representação algébrica, o autor acrescenta que,

> Sejam *x* e *y* duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que *y* é função de *x* e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \to y$. A *x* chama-se variável independente, a *y* variável dependente (p. 121).

Ainda sobre representação analítica, uma função é uma igualdade na qual exista correspondência entre valores de x e y. "[...] uma igualdade, em que a figura *y* igualado a uma expressão analítica em *x*, contém uma *lei matemática* ligando as duas variáveis; essa lei matemática define a correspondência que existe entre *x* e *y* e faz, portanto, que *y* seja função de *x*” (CARAÇA, 1998, p. 123, grifos do autor).

Sistema de referência também é um modo de representar uma função, como o sistema cartesiano de referência, representado por duas retas concorrentes, perpendiculares. Cada eixo representa uma variável: eixo 0x o conjunto dos números reais que representa o *domínio* da variável *x* e 0y o conjunto dos números reais que representa o *domínio* da variável *y*.

Quando temos um sistema cartesiano e nele está representada uma curva, por exemplo, podemos saber se é ou não uma função traçando retas paralelas aos eixos e percebendo se o número do eixo 0x é correspondente a apenas um número no eixo 0y. Essa correspondência chama-se unívoca, pois a cada elemento de 0x corresponde a apenas um em 0y.

Esses elementos que apresentaram correspondência, chamamos de coordenadas, sendo representado, por exemplo, o elemento do eixo 0x por *a* e do eixo 0y por *b* e representado da seguinte forma: (*a*, *b*). O elemento *a* é chamado de abscissa e *b* de ordenada. Para indicar que um ponto é formado por esses elementos, por exemplo, o ponto P, é representado da seguinte forma P (*a*, *b*).

Quando representamos o ponto P e demais valores de acordo com uma determinada lei, obtemos um conjunto de pontos. A esse conjunto de pontos é dado o nome de “imagem geométrica ou representação geométrica da função *y*(*x*)” (p. 127). Em toda a função é possível obter uma representação geométrica.

Nas funções existe uma relação entre as leis analíticas e as leis geométricas, sendo que quando é fornecida uma lei analítica é possível perceber a representação desta lei no campo geométrico. “[...] a imagem geométrica da função é a tradução, no campo geométrico, daquela lei analítica que a expressão analítica implica” (p. 130).

Para Iezzi e Murakami, função pode ser definida da seguinte forma:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ (1993, p. 81, grifos dos autores).

Esses autores apresentam um teorema a respeito do gráfico da função afim: “O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma reta” (p. 100, grifos dos autores).

Ainda sobre função afim, é importante esclarecermos o que representa o *a* e o *b* na função. “O coeficiente *a* da função $f(x) = ax + b$ é denominado *coeficiente angular* ou *declividade* da reta representada no plano cartesiano. O coeficiente *b* da função $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear* (p. 106, grifos dos autores)”. Sabemos então que o coeficiente angular também pode ser denominado de declividade, ou seja, pode ser expresso pela tangente de um ângulo. Já o coeficiente linear é “a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo *y*” (p. 106).

Dentre as definições sobre função constante e função identidade trazidas por Iezzi e Murakami (1993), destacamos a função linear, “quando a cada elemento de $x \in$ R associa o elemento $ax \in$ R em que $a \neq 0$ é um número real dado” (p. 98, grifos dos autores), ou seja, o coeficiente linear é nulo. Destacamos também a função afim, “quando cada $x \in$ R associa o elemento $(ax + b) \in$ R em que $a \neq 0$ e *b* são números reais dados. Segundo os autores, a função linear “é um caso particular de função afim” (p. 100), pois quando *b* assume como valor o zero, passa de função afim para linear. O conceito de zero da função afim, pode ser entendido como “a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos *x*” (p. 109). Nesse ponto, a abscissa tem imagem zero, sendo que em funções afins a imagem são todos os valores reais (p. 105).

Quando o gráfico de uma função afim é construído, alguns aspectos são analisados, como, por exemplo, se a função é crescente ou decrescente.

> A função f: $A \to B$ definida por definida por $y = f(x)$ é *crescente* no conjunto A_1 C A se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. A função F: $A \to B$ definida por definida por $y = f(x)$ é *decrescente* no conjunto A_1 C A se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ (IEZZI; MURAKAMI, 1993, p. 110 e 111, grifos dos autores).

Os conceitos apresentados até aqui sobre funções estão sob uma perspectiva dos fundamentos matemáticos. Agora, serão caracterizados alguns conceitos apresentados sob uma visão didática, ou seja, uma forma metodológica de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Em relação ao ensino fundamental, Walle (2009), acrescenta que “para esses alunos o conceito de função evolui melhor a partir de situações contextualizadas em que uma mudança de uma coisa (variável independente) cause uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente)” (p. 303). Uma linguagem mais informal nesta etapa do ensino, ao mostrar as mudanças de uma variável em relação à outra, pode ser mais compreensível aos alunos.

O conteúdo de funções pode ser representado de várias formas, por meio de contextualizações, de tabelas, da linguagem de expressões para funções, de gráficos e de equações.

Na representação por contextualização, há diferentes formas de relacionar elementos, sendo que na linguagem matemática, esses elementos são chamados de variáveis. É importante que essa contextualização faça sentido para os alunos, caso contrário o trabalho não terá significado. Walle (2009) destaca que é importante o contexto no qual o conteúdo de funções é desenvolvido com os estudantes, pois em alguns casos é difícil estabelecer uma relação entre duas variáveis como, por exemplo, relacionar a medida do comprimento do antebraço com a altura de uma pessoa, pois há variações entre essas medidas em cada indivíduo.

Por meio da organização de tabelas, também é possível estabelecer relação entre as variáveis. O autor relaciona o número de cachorros-quentes com o lucro em uma tabela, destacando que o contexto vivido deve ser levado em consideração, como a venda de 10.000 cachorros-quentes em um dia, por um único vendedor, o que pode ser considerado absurdo.

Temos ainda a linguagem de expressões que podem ser traduzidas para funções, como, por exemplo, a relação entre a quantidade de gasolina que há no carro, está em função da distância a ser percorrida. Ou ainda, o tempo de uma viagem está em função da velocidade que o motorista conduz o veículo. Apesar dos dois exemplos tratarem de grandezas diretas e inversamente proporcionais, respectivamente, referem-se à função, pois uma variável depende de outra.

Na representação gráfica de funções, a imagem relaciona as variáveis e com isso várias questões podem ser levantadas. O autor traz o exemplo da venda de cachorros-quentes, em que uma questão levantada foi a venda de 10.000 unidades e mostra alguns cuidados que devem ser observados no momento dessa representação:

> O gráfico é outro modelo matemático que, em termos do contexto, não faz sentido para todas as partes da imagem. Se a linha for estendida indefinidamente, existem valores onde as vendas seriam negativas. Isso claramente não faz sentido. Nem é razoável conversar sobre vendas de milhões de cachorros-quentes embora o gráfico possa se estender até onde for desejado (WALLE, 2009, p. 306).

E, por fim, temos equações que podem representar funções, que são formas mais abstratas de representação. Porém, o autor destaca que essa forma é mais abstrata, mas pode ser trabalhada quando as propriedades foram bem compreendidas pelos alunos. A utilização de equações para resolver os valores da função, para representar o gráfico se torna um método útil para os alunos.

Além da representação de gráficos de modo manual, a utilização de *softwares* de computação gráfica pode ser útil no ensino de funções em sala de aula, sendo uma ferramenta rápida quando os conceitos envolvidos já foram compreendidos pelos alunos.

> Os pacotes de softwares de computação gráfica são instrumentos de ensino que têm potencial para acentuar, reforçar e construir conceitos e habilidades técnicas da álgebra envolvendo gráficos. Utilizando esse tipo de *software* em sala de aula, o professor pode planejar ambientes de ensino que levem o aluno a conceituar representação gráfica, a manipular funções e expressões, a explorar gráficos de funções e a resolver problemas gráficos (FRISKE, 1995, p. 208-209, grifos do autor).

Se as ideias principais já foram compreendidas, é interessante que, além de executarem os comandos para a construção de gráficos, por exemplo, os alunos também percebam as possibilidades envolvendo a construção pelo computador, como a precisão e a alteração dos valores dos coeficientes de modo rápido, para sua análise.

Na visão de Gravina e Santarosa (1998), ambientes informatizados são uma possibilidade de mostrar a matemática de modo visual, permitindo "realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a conseqüente construção de conceitos e relações" (p. 9). Como já foi dito, uma das vantagens da utilização de *softwares* no ensino da matemática é a rapidez com que gráficos, por exemplo, são construídos e a precisão auxilia na análise dos referidos.

Na concepção de Friske (1995) a análise da inclinação da reta, construída através de um *software*, deve ser considerada, pois várias retas podem ser traçadas em um mesmo plano, de modo rápido, com o objetivo de estudar o papel do coeficiente angular e suas variações. A utilização de *softwares* auxilia no processo de apropriação de significados matemáticos, sendo possível agilizar esse processo. "Os suportes oferecidos pelos ambientes não só ajudam a superação dos obstáculos inerentes ao próprio processo de construção do conhecimento matemático, mas também podem acelerar o processo de apropriação de conhecimento" (p. 21).

Segundo Friske (1995), o uso de *softwares* de construção de gráficos de funções auxilia em pesquisas, individuais ou em pequenos grupos, ao disponibilizar um questionamento e permitir que os alunos o resolvam com o auxílio do programa. Desse modo, “o uso de *softwares* gráficos para o ensino de álgebra deve ser planejado para complementar o currículo existente e o estilo de trabalho do professor. Este deve se familiarizar bem com o *software*, para inspirar confiança ao operar com ele” (p. 212).

De acordo com a autora, percebemos que o professor dispõe de inúmeras ideias para que suas aulas, nesse caso a respeito do conteúdo de função, sejam produtivas e que o aluno compreenda os conceitos envolvidos. O estudo do conteúdo de função pode ser desenvolvido utilizando situações vivenciadas pelos alunos, os quais poderão interagir mais com as aulas e relacionar o que está sendo aprendido em sala de aula com ações do cotidiano.

3.4 Noções sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Estudamos conteúdos matemáticos por meio de suas representações. Segundo Duval (2003), desenvolver capacidades como visualização, análise e raciocínio são objetivos que devem ser alcançados no ensino da matemática. Para alcançarmos esses objetivos é necessário a utilização de diferentes representações para o estudo de um objeto matemático. A evolução no pensamento na área da matemática só foi possível devido à ampliação das representações semióticas elaboradas ao longo da história da ciência.

O autor apresenta dois tipos de registros em matemática: os registros multifuncionais, que podem ser uma representação discursiva, como a língua natural ou não discursiva, como figuras geométricas; os registros monofuncionais, que podem ser discursiva, como sistemas de escritas e cálculo ou não discursiva, como gráficos cartesianos.

Para Duval, “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (2003, p. 14). Assim, para se alcançar os objetivos da área da matemática e compreender o objeto em questão, é necessária a utilização de, no mínimo, dois tipos diferentes de registros e ainda que o indivíduo tenha a capacidade de realizar a transição de um registro para outro sem dificuldades. Para uma informação ser transmitida a outra pessoa, é necessário que exista um meio de representação semiótica e ainda que com esse meio a pessoa compreenda o que se quer transmitir. Porém, não é apenas para isso que esses meios existem. Segundo o autor, os meios de registro de representação semiótica também fazem parte do desenvolvimento das representações mentais e funções cognitivas, ligadas à produção de conhecimento, em cujo processo cada indivíduo representa um objeto de uma maneira diferente.

Para a compreensão de um objeto matemático qualquer, há representações que podem ser utilizadas, porém não são todas as representações que são cabíveis a todos os objetos. Matematicamente, existem diferentes representações de um mesmo objeto, entretanto, o sujeito precisa identificar qual será o modelo mais adequado em cada caso. De acordo com Duval, “tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor” (DUVAL, 2009, p. 37).

Nessa teoria, existem dois tipos de transformação de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Quando uma representação semiótica é transformada em outra, porém, permanece no mesmo sistema, trata-se de um tratamento. O procedimento de adição de duas frações não é o mesmo quando essas frações são representadas em número decimal. O tratamento em cada caso será diferente, apesar do resultado, representar a mesma quantidade, por exemplo. Na conversão, assim como no tratamento, há transformação de uma representação semiótica em outra, contudo o sistema muda, mas é conservado o objeto. Essa conversão é independente do tratamento, ou seja, dependendo de como o objeto foi convertido será feito o tratamento. Um exemplo de conversão é quando a escrita algébrica de uma equação é transformada em uma representação gráfica.

Para Duval (2003), “a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento adequado em um registro determinado, necessariamente discursivo” (p. 16). Para o autor, a conversão não ganha o destaque necessário no processo de compreensão da atividade matemática, contudo, “do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (p. 16).

Conforme citação do autor,

> a conversão é então uma **transformação externa em relação ao registro da representação de partida.** A ilustração é a colocação em correspondência de uma palavra, de uma frase, ou de um enunciado com uma figura ou com um de seus elementos. A passagem inversa, da imagem a um texto, pode ser uma descrição ou uma interpretação. A colocação em equação dos dados de um enunciado do problema é a conversão de diferentes expressões linguísticas de relações em outras expressões dessas relações no registro de uma estrutura simbólica (DUVAL, 2009, p. 59, grifos do autor).

Apesar da necessidade de um objeto ser representado de duas ou mais maneiras diferentes, com o objetivo de auxiliar na sua compreensão, os alunos dificilmente conseguem reconhecê-lo, quando representado de outras formas. No entanto, para Duval (2003), “a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve confundir um objeto e sua representação*” (p. 21, grifos do autor). Ao contrário de outras áreas, o objeto matemático não pode ser visualizado, apenas representado e esse acesso é realizado apenas por meio dos registros de representação semiótica.

De acordo com Duval (2003), representando um objeto matemático através de pelo menos dois registros de representação é a única possibilidade de não confundir o objeto matemático em estudo com sua representação. Nas palavras do autor, “[...] duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo” (p. 22). Para o autor, é por meio da articulação dos registros de representação que é possível ter acesso ao objeto matemático.

Duval (2009) ainda apresenta conceitos como semiósis e noésis, intimamente ligados às representações semióticas. A semiósis é a apreensão ou produção de uma representação semiótica enquanto a noésis é a apreensão conceitual de um objeto. Para a compressão de um conceito, é importante que o objeto matemático apresente várias representações, sendo então possível escolher um registro que melhor o defina, tendo o cuidado de não confundir a representação com o objeto matemático. Em relação às representações, “formação, tratamento e conversão são as atividades cognitivas fundamentais da *semiósis*” (DUVAL, 2009, p. 54, grifo do autor).

Em relação às representações, de acordo com Duval, “há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato” (2003, p. 31). Percebemos que um objeto matemático pode apresentar inúmeras representações, porém não a mesma que outro objeto. Ainda de acordo com o autor, apesar dos registros de representação semiótica não consistirem em uma atividade muito comum para o estudo de um objeto matemático, é importante a sua utilização e, mais ainda, a diversidade de registros para a representação de cada objeto.

3.5 Contribuições da Teoria Histórico-cultural

O processo de formação de conceitos em um mundo no qual vivemos, em constante avanço tecnológico, se torna complexo e muitas vezes difícil de ser realizado. Para isso, Vygotsky (1998) contribuiu com ideias para esse processo, através da teoria histórico-cultural, na qual o meio em que o indivíduo está inserido é fonte de informações e conhecimentos. Para o autor, o início do processo ocorre na infância, porém o amadurecimento das capacidades intelectuais necessárias para a formação de conceitos culmina na adolescência.

> O desenvolvimento dos processos que finalmente resultam na formação de conceitos começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais que, numa combinação específica, formam a base psicológica do processo de formação de conceitos amadurece, se configura e se desenvolve na puberdade (p. 72).

O início do desenvolvimento cognitivo ocorre na infância, quando a criança utiliza a fala para expressar suas ideias a respeito da resolução de um problema. Contudo, somente o fato de o indivíduo amadurecer não é sinônimo de desenvolvimento do pensamento, pois, para Palangana (2001), o seu desenvolvimento cognitivo, assim como seu próprio comportamento, só são possíveis por meio das interações sociais com indivíduos mais experientes. Contudo, para que isso de fato ocorra, é fundamental a utilização da fala, uma vez que, de acordo com Vigotski,

> *o momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento, convergem* (2007, p. 11-12, grifos do autor).

O uso da fala é uma característica unicamente humana, fazendo uso de instrumentos para sua relação com o ambiente e signos, para o desenvolvimento de seu intelecto. Vigotski (2007) percebeu que em atividades práticas a fala estava intimamente ligada à ação, ou seja, a criança necessitava falar enquanto agia. Segundo o autor, a fala é tão importante quanto a ação, pois as duas juntas buscam a solução para o problema. Para o autor, se não for dada uma oportunidade para a criança falar sobre o problema em questão, talvez nem consiga resolvê-lo.

> No processo de solução de um problema a criança é capaz de incluir estímulos que não estão contidos no seu campo visual imediato. Usando palavras (uma classe desses estímulos), para criar um plano de ação específico, a criança realiza uma variedade muito maior de atividades, usando como *instrumentos* não somente aqueles objetos a mão, *mas procurando e preparando tais estímulos de forma que os torne úteis para a solução da questão e para o planejamento de ações futuras* (2007, p. 14, grifos do autor).

A criança poderá não utilizar estímulos que estão prontamente à disposição dela, mas sim elaborar um plano de ação por meio da fala, que possibilite resolver o problema proposto.

Nesse sentido, o estabelecimento e o desenvolvimento de um plano de ação tem relação com o que Polya define como fases necessárias para a resolução de problemas.

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (1995, p. 3-4, grifos do autor).

Notamos a aproximação existente entre o plano de ação de Vigotski (2007) e a ideia do estabelecimento de um plano na resolução de problemas, de Polya (1995). Inicialmente é necessário interpretar o problema; a seguir, elabora-se o plano, com o objetivo de prever que ações serão realizadas, na sequência, o plano é colocado em prática e, por fim, é realizada uma retomada para verificar se o plano de fato funcionou.

Essa ideia de plano também pode ser observada quando necessitamos ir a algum lugar e traçamos uma rota de qual será o caminho a ser seguido. Nesse caso, estamos elaborando um plano de ação, antes de executá-lo.

Ao encontro disso, Vigotski (2007) destaca que a interação social é algo importante para o aprendizado de um indivíduo. Assim, não necessariamente que o processo de resolução de um problema tenha que ser feito sozinho e sim com o auxílio de pessoas mais capacitadas ou entre seus pares.

O fator mais importante para que possa ocorrer interação entre indivíduos é a linguagem, de acordo com Palangana (2001). Segundo a autora, “para interagir com o mundo, a criança dispõe de instrumentos que mediam tal interação. Esses instrumentos, para Vygotsky, podem ser de duas naturezas, física e simbólica” (p. 97).

Segundo Vigotski (2007), os signos e os instrumentos são mediadores do relacionamento do indivíduo com o mundo, ou seja, a relação do sujeito com o mundo ocorre de forma mediada, por meio de símbolos. Os signos são representações de alguma coisa, referindo-se à atividade psicológica, de acordo com fatores socioculturais. Enquanto que os instrumentos são ferramentas que auxiliam o indivíduo na sua relação com o mundo, modificando-os. Nesse sentido, Vygotsky (1998) ressalta que o signo é essencial para o processo de formação de conceitos, sendo que a palavra tem significativa importância, além de representar uma generalização.

Para Grando e Marasini (2014), o processo de formação de conceitos não inclui apenas a apropriação dos significados, mas também o desenvolvimento do pensamento. A justificativa dessa afirmação vem de Vygotsky, para o qual “a formação dos conceitos é resultado de uma complexa atividade em que todas as funções intelectuais fundamentais participam” (1998, p. 72-73).

Conforme a criança vai crescendo, pessoas mais capazes que vivem com ela proporcionam momentos de aprendizagem por meio da linguagem, como o significado dos objetos. Palangana (2001) salienta que a intervenção de um adulto possibilita à criança “organizar sua percepção” (p. 99), para posteriormente desempenhar a tarefa sozinha, através da linguagem, controlando o ambiente que está inserida e, futuramente, seu próprio comportamento.

Tudge e Rogoff (1995) destacam que a teoria de Vygotsky está centrada na interação social, que por intermédio da fala, constitui um meio para que a criança compreenda outros pontos de vista em relação a cada situação de aprendizagem. Além disso, a interação com pessoas mais qualificadas contribui para a aprendizagem e, como consequência, o desenvolvimento da criança.

Para Palangana (2001), seguindo as ideias de Vygotsky, “o desenvolvimento do pensamento é determinado pelos instrumentos lingüísticos e pela experiência sócio-cultural da criança” (p. 106). Ainda que a interação social se configure como algo de extrema importância a linguagem é a principal responsável pelo processo de aprendizagem e desenvolvimento. A seguir, a autora faz uma análise dos estudos de Vygotsky sobre a linguagem.

> Seus estudos orientam-se no sentido de explicar a relação desenvolvimento/aprendizagem, ressaltando o importante papel da competência lingüística na interação entre esses dois processos, já que é por meio da apreensão e internalização da linguagem que a criança se desenvolve (PALANGANA, 2001, p. 128).

Com base na linguagem e nas interações sociais, o indivíduo busca se apropriar do significado de um conceito, porém, segundo Vygotsky (1998), talvez não será na primeira vez que isso ocorra. São necessárias várias etapas para seu aprendizado e, como consequência, seu desenvolvimento.

> Quando uma criança aprende alguma operação aritmética ou algum conceito científico, o desenvolvimento dessa operação ou conceito apenas começou. [...] a curva do desenvolvimento não coincide com a curva do aprendizado escolar; em geral, o aprendizado precede o desenvolvimento (VYGOTSKY, 1998, p. 127).

Para que o desenvolvimento intelectual no aluno ocorra, é importante que ocorra a aprendizagem, e, para isso acontecer, há um caminho a ser percorrido, longo ou curto, dependendo do desenvolvimento cognitivo de cada indivíduo.

E nesse processo de apropriação do significado de um conceitos ou realização de determinadas tarefas, uma ideia de Vigotski (2007) é considerada fundamental para essa análise: a zona de desenvolvimento proximal. O indivíduo consegue desempenhar determinadas tarefas de modo independente, ou seja, sem o auxílio de outras pessoas, e esse nível é denominado de desenvolvimento real. Quando uma criança consegue realizar determinadas tarefas, entretanto com o auxílio de uma pessoa mais capacitada, seja um professor ou seus pares, estamos diante do nível de desenvolvimento potencial. Nesse sentido, o autor considera que os alunos já chegam à escola com conhecimentos prévios, ou seja, suas vivências possibilitaram um aprendizado muito antes do seu contato com a escola, configurando-se em um nível de desenvolvimento real. Assim, a zona de desenvolvimento proximal é a distância entre os níveis apresentados anteriormente, o potencial, no qual o indivíduo necessita de ajuda de outra pessoa, e o real, no qual o indivíduo é capaz de realizar tarefas de forma independente. Em outras palavras, zona de desenvolvimento proximal é

> *[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes* (VIGOTSKI, 2007, p. 97, grifos do autor).

Isso só será possível se o indivíduo já iniciou o processo de desenvolvimento de alguma capacidade, do contrário, não faz sentido para ele, por estar muito distante das funções psicológicas naquele momento. Para o autor, o que hoje é nível de desenvolvimento potencial, amanhã será nível de desenvolvimento real, ou seja, o que necessitava de auxílio num momento anterior, agora já consegue realizar de modo independente. Nesse sentido, a escola desempenha importante papel no desenvolvimento de capacidades nas crianças, porém o ponto de partida deve ser o nível de desenvolvimento real.

Segundo Tudge e Rogoff (1995), é na interação social que observamos a zona de desenvolvimento proximal, pois os alunos vão tentar resolver situações mais complexas com o auxílio de outra pessoa, para que depois tenham condições de realizá-las sozinhos.

Para Vygotsky (1998), o desenvolvimento do pensamento ocorre em três fases: sincrético, por complexos e por conceitos. O pensamento sincrético diz respeito às impressões das crianças sobre os objetos, nos quais o agrupamento ocorre pelas percepções que elas têm naquele momento, ou seja, “agrupamentos sem qualquer fundamento” (p. 74). No pensamento por complexos, a criança agrupa determinados objetos por meio de ideias mais concretas, de acordo com seu contato com o mundo. “O pensamento por complexos já constitui um pensamento coerente e objetivo. [...] as ligações entre seus componentes são *concretas e factuais*, e não abstratas e lógicas” (p. 76-77, grifos do autor). No pensamento por conceitos, além da generalização, é necessária a abstração e a palavra é considerada um signo com o intuito de mediar a formação de conceito.

Em relação à fala e à escrita, Vygotsky (1998) destaca que os dois processos são diferentes, no funcionamento e na estrutura. A escrita constitui uma tarefa mais abstrata, na qual a criança deve substituir seu ato de falar por imagens que representem as palavras.

> Uma fala apenas imaginada, que exige a simbolização de imagem sonora por meio de signos escritos, deve ser naturalmente muito mais difícil para a criança do que a fala oral, assim como a álgebra é mais difícil que aritmética. Nossos estudos mostram que o principal obstáculo é a qualidade abstrata da escrita, e não o subdesenvolvimento de pequenos músculos ou quaisquer outros obstáculos mecânicos (p. 123).

Como já foi citado anteriormente, a álgebra é considerada como a generalização de aritmética, e esse processo torna-se difícil para a criança. Para Vygotsky (1998), esse processo de generalização, por mais difícil que possa ser, é de extrema importância no desenvolvimento cognitivo da criança, pois seu pensamento é ampliado e elevado e os conceitos aritméticos são vistos “sob uma perspectiva mais ampla” (p. 143).

Ao encontro do que foi exposto, uma fase importante para o desenvolvimento do indivíduo é o que Vygotsky (1998) chama de imitação. O papel da imitação é importante no sentido de poder desenvolver a tarefa sozinha, em outro momento, seguindo a ideia de zona de desenvolvimento proximal.

> Vygotsky observou que as crianças podem imitar ações que vão muito além de suas capacidades reais ou afetivas. Numa atividade coletiva, ou sob a orientação dos adultos, elas podem aumentar suas capacidades de desempenho, pois a imitação de atos ou habilidades cujo conteúdo vai além da capacidade real da criança cria zonas de desenvolvimento proximal. É, também, neste fato que Vygotsky se apóia quando defende a tese que a aprendizagem antecede o desenvolvimento (PALANGANA, 2001, p. 130-131).

Palangana (2001) cita novamente Vygotsky quando se refere ao ensino e como ele deve acontecer em relação ao desenvolvimento do indivíduo, destacando que “de acordo com a proposta teórica de Vygotsky, o ensino não tem de aguardar o nível de desenvolvimento necessário para a assimilação, devendo, ao contrário, produzi-lo” (p. 152). Percebemos que, para que ocorra uma elevação no nível de desenvolvimento, é necessário que o ensino provoque esse desenvolvimento, de acordo com situações próprias para isso.

Partindo da premissa que a aprendizagem estimula o desenvolvimento, a escola tem o papel fundamental junto ao objetivo de promover a formação de conceitos nos indivíduos que nela estão inseridos. A principal ideia de Vygotsky para a formação de conceitos centra-se na interação social e, com base nisso, percebemos outros elementos importantes para o desenvolvimento do indivíduo. Cabe ao professor promover situações de aprendizagem que busquem a interação social, a fim de que os alunos possam se desenvolver cognitivamente, por meio de troca de ideias e interiorização de significados.

3.6 Sobre sequência didática

Em seu planejamento, o professor pode elaborar um sequenciamento das atividades que gostaria que fossem realizadas em sala de aula, com a finalidade de organizar suas ideias para a aula, previamente. Para Amaral, “seqüências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa” (2009, p. 1). Essas atividades são planejadas de acordo com o objetivo do professor para determinado conteúdo, a ser desenvolvido em sala de aula. De acordo com a autora, as sequências didáticas envolvem atividades que possibilitem a aprendizagem e a sua avaliação.

De acordo com Gauthier et al. (2013), o planejamento da aula deve partir desde os objetivos até o ambiente educativo, passando pelos conteúdos e atividades de aprendizagem, estratégias de ensino e avaliação. Os objetivos do planejamento devem ser colocados como prioridade, para que a prática do professor seja eficaz. Em relação aos conteúdos e atividades de aprendizagem, os autores consideram que as tarefas que são solicitadas pelo professor têm uma influência direta na aprendizagem do conteúdo proposto. Para que o aluno obtenha êxito na aprendizagem, é necessário que as atividades sejam preparadas com antecedência pelo professor e apresentadas com clareza para o aluno em sala de aula. Segundo os autores, além de atividades que apresentam níveis diferentes de dificuldades, o professor pode possibilitar aos alunos alguns níveis de motivação, extrínseca ou intrínseca: extrínseca no sentido de fornecer recompensa, esperando assim um determinado comportamento do aluno e intrínseca no sentido de o aluno obter algum prazer em resolver a atividade proposta, seja por curiosidade ou interesse.

Em relação às estratégias de ensino, Gauthier et al. (2013) destacam que uma aula na qual os alunos sejam bem sucedidos em relação à sua aprendizagem é aquela em que o professor planeja suas atividades de modo a interessá-los naquilo que está sendo estudado. Quanto à avaliação, os autores destacam a importância do planejamento desse item para um aprendizado eficiente. E por fim o planejamento do ambiente educativo mostra-se importante, pelo fato de pesquisas mostrarem que alunos obtém melhor desempenho quando o ambiente de aprendizagem também faz parte do planejamento do professor.

Nesse sentido, para esses autores,

> os bons planejamentos se caracterizam pela minúcia, mas também pela flexibilidade. Isso permite que os professores permaneçam sensíveis às necessidades que as crianças possam externar. A identificação dessas necessidades passa por um conhecimento cada vez maior dos alunos pelos professores que reúnem muitas informações a respeito deles (2013, p. 207).

Ao longo do desenvolvimento de uma proposta, o professor tem a possibilidade de conhecer o aluno e suas necessidades e, com isso, realizar novos planejamentos que possam suprir essas carências e proporcionar êxito no seu aprendizado.

Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly, a sequência didática configura-se como "um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito" (2004, p. 82). De acordo com os autores, a sequência didática está estruturada inicialmente com a apresentação da situação, seguida pela produção inicial e produção final. Após a realização da produção inicial, são oferecidas várias atividades, caracterizadas como módulos, para que o aluno tenha os instrumentos necessários para o domínio do gênero em questão. Na apresentação da situação, o professor descreve as tarefas de uma maneira minuciosa, para que os alunos possam produzir o que está sendo solicitado. Na produção inicial, o professor pode observar quais as dificuldades apresentadas pelos alunos e, então, nos módulos, planejar atividades de modo a aprofundar aquilo que está sendo desenvolvido em sala de aula. Por fim, na produção final, o professor pode avaliar o progresso, percebendo se os alunos põem em prática o conhecimento adquirido. Vemos que as considerações apresentadas podem ser adaptadas à educação matemática, com a finalidade de auxiliar o professor para a organização de seu planejamento.

Para Coll et al. (1995), sequência didática foi escolhida como uma unidade de observação, análise e interpretação do que ocorre no andamento da investigação. É um processo capaz de identificar os principais itens do processo de ensino e aprendizagem:

> objetivos educacionais concretos, utilização de um determinado material, determinadas atuações do professor cujo destinatário é o aluno, determinadas atuações do aluno sobre o material em torno dos objetivos e conteúdos propostos pelo professor, determinadas expectativas do professor a propósito das atuações do aluno, possibilidade de proceder a uma evolução das atividades do aluno em função das expectativas do professor. Assim pois, para poder falar de uma sequência didática teremos que identificar inequivocamente seu início, seu desenvolvimento e sua finalização (COLL, 1983, apud COLL et al., 1995, p. 207, tradução nossa).

Além dos inúmeros itens que formam uma sequência didática, é necessário que seja planejada com esses itens e que apresente uma introdução, um desenvolvimento e uma conclusão, com a ideia de que o professor necessita organizar seu planejamento para qualquer conteúdo. Para os autores, é a melhor forma de organizar um planejamento com a interação entre professor e alunos e também, para, posteriormente, realizar a análise das atividades.

Nesse sentido, a realização de um planejamento é fundamental para que se obtenha êxito na aprendizagem, desde a elaboração das atividades e do direcionamento da aula do professor até o ambiente em que esse planejamento for executado. Percebemos assim a importância da organização do professor, por meio de uma sequência didática, para que a apropriação dos significados pelos alunos possa acontecer.

As ideias apresentadas na revisão bibliográfica e nos fundamentos teóricos têm como finalidade de buscar contribuições para o desenvolvimento do processo de pesquisa, que envolve o processo ensino-aprendizagem de conteúdos algébricos, mais especificamente, o conceito de função do 1º grau.

4 PRODUTO EDUCACIONAL DESENVOLVIDO EM SALA DE SALA

Na primeira parte do capítulo, é realizada a descrição da proposta, relatando o processo de aplicação do produto educacional. Na segunda parte do texto, apresentamos a análise do processo ensino-aprendizagem e destacamos algumas interações que contribuíram para esse processo e registros que interviram na apropriação dos significados desenvolvidos.

4.1 Descrição do desenvolvimento da proposta do produto educacional

Para a elaboração do produto educacional, inicialmente foi realizado um estudo teórico de materiais e pesquisas atuais envolvendo o conteúdo de função de 1º grau, a fim de buscar fundamentação para a presente proposta. Também foram considerados valores qualitativos importantes para a escola em que a proposta de produto educacional seria desenvolvida, como autonomia e cooperação. Em relação à avaliação, as conquistas e as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem também fizeram parte do planejamento.

O produto educacional foi elaborado de acordo com o seguinte plano de ação geral: na primeira parte estava envolvido o conceito de função, propriamente dito e, na segunda parte, as representações gráficas, manuais e por meio de *softwares*. O conceito de função teve início com a ideia de raciocínio proporcional, que envolveu identificação e relação entre grandezas, com respectiva representação das informações, na forma de tabelas. Também foi feito a primeira generalização entre as grandezas, com a distinção entre situações que representam função, das situações sem dependência de variáveis.

A proposta como um todo foi desenvolvida em vinte encontros e consideramos uma ordem das ideias pensadas antes de sua aplicação. As atividades, inicialmente planejadas, foram sendo aplicadas e avaliadas semanalmente, com os redimensionamentos necessários ao desenvolvimento de uma proposta didático-pedagógica. Esse processo envolveu tanto a reelaboração como a elaboração de novas atividades que se mostraram necessárias para a aprendizagem do conteúdo em questão.

Em um primeiro momento, a professora conversou com os alunos a respeito da aplicação de uma proposta envolvendo um conteúdo que seria estudado na sequência dos estudos. Em outro momento, foi entregue aos alunos o Termo de Consentimento Livre e

Esclarecido (TCLE) em duas cópias, uma para ficar com seus responsáveis e outra para ser assinada pelos próprios e entregue à professora. Nesse termo consta a proposta, os objetivos e a justificativa para a participação no projeto de pesquisa.

Em todas as atividades da proposta os alunos foram dispostos em grupos, para que as interações em cada situação pudessem ser analisadas posteriormente. Apenas a avaliação final foi realizada de forma individual. Todas as atividades foram desenvolvidas em folhas avulsas, que após sua digitalização, foram devolvidas aos alunos para que colassem em seus cadernos.

Inicialmente, a proposta apresentava três situações, duas delas envolviam raciocínio proporcional e a terceira, combinação. Para resolvê-las, os alunos interagiam entre si e com a professora. Na aula seguinte, foram retomadas as três situações, com o objetivo de discutir a respeito das conclusões dos grupos. Nessa mesma aula foi solicitado aos alunos que entrevistassem pessoas de seu convívio, a fim de identificar situações do cotidiano nas quais houvesse relação entre grandezas. Também foi solicitado que essas grandezas ficassem organizadas, de modo que qualquer pessoa pudesse entender. O objetivo dessa atividade era iniciar, implicitamente, com algumas ideias a respeito do conceito de função.

Na aula seguinte, inicialmente houve a socialização das informações obtidas nas entrevistas e a seguir os alunos responderam algumas questões sobre elas. Registraram a situação em linguagem corrente e descreveram como as grandezas se relacionavam, indicaram o que era função, de acordo com seus conhecimentos prévios e escreveram as sentenças que representavam as situações trazidas da tarefa extraclasse.

Ainda em relação à entrevista, após a escrita da sentença, os alunos identificaram o significado das grandezas, ou seja, se as duas grandezas envolvidas possuíam o mesmo significado e identificaram também qual delas estava em função de outra, dependendo de outra. Na sequência, analisaram se as variáveis da situação poderiam assumir valores negativos ou nulos, justificando e também analisando se as sentenças que encontraram apresentavam uma forma geral.

Antes da correção das respostas dos alunos, foram discutidas ideias que estavam envolvidas na pesquisa realizada por eles, como consumo de água, limites de velocidade e fontes de energia. No grande grupo foram comentadas opiniões dos alunos referentes aos assuntos citados, bem como uma conversa sobre a importância conscientização e ideias de como evitar desperdício.

No momento da correção das questões, os alunos participaram e discutiram a respeito da forma geral das situações trazidas por eles, relacionando a representação algébrica de equações, de primeiro e segundo grau, com a forma geral de uma função de primeiro grau.

Na sequência das atividades, foi proposto para os alunos o jogo Batalha Naval, no plano cartesiano, no qual os alunos marcaram pontos em um plano desenhado no papel quadriculado e outro colega tentava acertar esses pontos e previam os possíveis pares ordenados. Para isso, cada aluno marcou cinco objetos, cada um com determinado número de pontos: com um ponto, dois pontos, três pontos, quatro pontos e cinco pontos, distribuídos nos quatro quadrantes, sendo que um deles seria repetido. O limite em cada quadrante foi de cinco unidades de distância da origem e as coordenadas dos pares representavam apenas números inteiros. O jogo foi realizado em duplas e o objetivo era encontrar todos os objetos marcados pelo adversário.

Na aula seguinte o gráfico da situação do número de pedaços de pizza, da primeira aula, foi traçado no quadro, pela professora, com base na discussão com a turma sobre a forma de representação gráfica ao trazerem ideias do jogo realizado na aula anterior. Como tarefa extraclasse, foi solicitado aos alunos que construíssem o gráfico da situação de combinação simples da primeira aula.

Na outra aula realizou-se a discussão da relação que existia entre a representação gráfica da situação de combinação simples e a da situação do número de pedaços de pizza. Com base nisso, os alunos construíram o gráfico da situação trazida por eles, individualmente, respondendo algumas questões, propostas pela professora, referentes à possibilidade de interpretação de situações por meio de gráficos, identificação de pares ordenados, justificativa da possibilidade de ligar os pontos e análise do traçado que a função apresentaria. Além disso, os alunos opinaram a respeito da utilidade do gráfico de uma função em cada situação. A seguir, foi solicitado que, para a próxima aula os alunos trouxessem gráficos presentes nos meios de comunicação.

Na sequência, a aula teve como foco a análise dos gráficos trazidos pelos alunos sendo que, além de observar suas características, também foram debatidos os assuntos presentes nos gráficos, como PIB, mercado futuro, características dos países. A discussão foi retomada na aula seguinte, levantando alguns aspectos que não haviam sido observados na aula anterior, como informações que não estavam presentes nos gráficos, que comprometeram seu entendimento. Como tarefa extraclasse, os alunos deveriam realizar um estudo sobre o plano cartesiano, incluindo a origem, construção, conceitos envolvidos e seu papel para a representação gráfica de uma função.

Para dar continuidade, na aula seguinte foi feito um estudo sobre a tarefa realizada, com o objetivo de abordar alguns aspectos da nomenclatura a respeito do plano cartesiano, que os alunos ainda não haviam aprendido, pois um estudo mais geral sobre o assunto já havia sido feito anteriormente. Foram analisados também os números indicados nos eixos para identificar a qual conjunto numérico pertencia e o sinal de cada eixo nos quatro quadrantes.

Na aula seguinte, os alunos receberam um material que continha questionamentos a respeito do que foi estudado no conteúdo de função de 1º grau, como grandezas e variáveis, gráficos, plano cartesiano, dentre outros.

Na sequência, foi solicitado aos alunos que fizessem o *download* do *software Geogebra*, para a construção de gráficos. Cada aluno construiu o gráfico referente à situação da entrevista, que havia realizado com uma pessoa de seu convívio, respondendo perguntas sobre a diferença entre a construção manual dos gráficos e com o software, tais como, tipo de traçado e interceptação nos eixos.

Foi solicitado que cada um dos alunos pesquisasse a respeito dos valores cobrados pelos planos das empresas de telefonia que utilizava, conversasse com seus pais a respeito do consumo de combustível do automóvel da família e pesquisasse também sobre os valores cobrados por uma ou mais empresas de aluguel de carro da cidade.

A aula seguinte iniciou com a discussão a respeito da pesquisa extraclasse, começando com a empresa de telefonia, quando os alunos explicaram como eram as cobranças de ligações para outras operadoras. Na sequência, determinaram quanto custava uma ligação de dez minutos e de meia hora, considerando a quantia de catorze reais, e, também qual seria a duração da ligação, de acordo com os valores trazidos por eles. Por fim, escreveram uma sentença matemática algébrica que relacionava o custo de uma ligação com sua duração.

A seguir, responderam três perguntas envolvendo aluguel de carro na cidade: escreveram uma sentença que relacionasse o preço a ser pago pelo aluguel e os dias alugados e determinaram o valor a ser pago pelo aluguel de uma semana. Para finalizar, calcularam o número de dias que seria possível alugar um carro com a quantia de quinhentos e oitenta reais.

Sobre as informações obtidas com o automóvel da família, inicialmente os alunos teriam que determinar quantos litros restariam no tanque de combustível se o automóvel percorresse setenta e cinco quilômetros e identificar as grandezas que estavam envolvidas na situação. Além disso, construíram o gráfico da situação e, por fim, determinaram quantos quilômetros deveriam ser percorridos para zerar a quantidade de gasolina no tanque.

Na sequência, os alunos responderam mais duas questões, que não envolviam os assuntos da pesquisa realizada por eles, mas que rodearam o conteúdo de função de 1º grau. As situações referiam-se a uma piscina que seria esvaziada e a uma loja de instrumentos musicais, que oferecia descontos no pagamento à vista. Nas duas situações, os alunos teriam que identificar a sentença que relacionava as grandezas envolvidas.

Na aula seguinte, foi entregue aos alunos duas folhas, com um gráfico cada, na qual os alunos determinaram a lei da função com base nos dois pontos que cada gráfico apresentava. Uma das atividades foi realizada em sala de aula, porém a outra ficou como tarefa extraclasse. Os alunos não compreenderam como encontrar a forma geral, então a professora os auxiliou, realizando a atividade no quadro, com o acompanhamento dos próprios.

Na sequência, os alunos receberam três atividades de análise de gráficos e uma de análise das atividades anteriores. Como havia apenas um computador disponível, a professora solicitou que os alunos construíssem os gráficos em folha A4 no mesmo plano cartesiano, alterando o coeficiente linear, os coeficientes angulares e, por fim, construíram o gráfico de duas funções afins, uma crescente e uma decrescente. Por fim, analisaram as três situações.

Foi solicitado, como tarefa extraclasse, que pesquisassem, na cidade, qual era a tarifa cobrada pelos taxistas, perguntando se todos cobravam o mesmo valor, de bandeirada e por quilômetro rodado, e também os valores nos estacionamentos, fixo e por tempo determinado.

Como apenas dois alunos realizaram a tarefa, as informações trazidas foram socializadas e discutidas com os demais. A seguir, os alunos responderam questões a respeito da pesquisa realizada e sobre conceitos envolvidos no conteúdo de funções. Inicialmente construíram o gráfico que representava a situação extraclasse e analisaram os possíveis valores que as grandezas poderiam apresentar. Na continuidade, compararam a sentença obtida por meio da pesquisa extraclasse com as sentenças da situação obtida por meio da entrevista e da situação da pizza, estudada na primeira aula, observando se havia alguma semelhança ou diferença entre elas, com respectiva justificativa.

As demais questões eram conceituais, a respeito de valor constante, função afim e função linear, descrevendo suas principais características. Também foi solicitado aos alunos que respondessem se uma função afim poderia ser função linear ou vice e versa. Para responder as questões, os alunos poderiam utilizar dicionário matemático online ou livros didáticos.

As duas questões seguintes envolviam situações reais. A primeira referia-se a um vendedor, que recebia um salário fixo de R$ 750,00 com um acréscimo de 9% do total das vendas de um mês. Os alunos indicaram uma sentença que representava o salário mensal do vendedor e fizeram cálculos com base nas informações fornecidas na situação. A segunda situação referia-se a um *spa*, que anunciava perdas de peso de até 2,5 quilogramas por semana. Os alunos encontraram uma fórmula que relacionava as duas grandezas e realizaram cálculos envolvendo as informações.

Nessa mesma aula, os alunos construíram o gráfico das duas situações apresentadas anteriormente e buscaram identificar que traçado estava sendo representado. Para finalizar, elaboraram um pequeno texto sobre função de 1º grau, envolvendo as noções estudadas até o momento.

As atividades da aula seguinte circundaram a construção de gráficos de quatro funções, com o objetivo de analisar se elas eram crescentes ou decrescentes. As funções se caracterizavam como duas lineares e duas afins, uma crescente e uma decrescente, respectivamente. Os alunos construíram os gráficos e, para a discussão, a professora projetou no quadro a construção de cada um deles, utilizando o *software Geogebra*.

Na aula anterior à avaliação geral do conteúdo, na forma de uma prova, foi realizada uma revisão dos conceitos estudados sobre função de 1º grau.

Na última aula sobre o conteúdo, foi realizada uma avaliação individual escrita sem o uso de material, para análise da aplicação da proposta e da aprendizagem dos alunos nesse período.

4.2 Desenvolvimento do produto educacional em sala de aula

Para realizar a análise, seguiu-se a mesma ideia da elaboração da proposta, em dois momentos. O primeiro referiu-se ao raciocínio proporcional (ampliação e formação) e discussão de alguns aspectos a respeito de função e, o segundo, envolveu representações gráficas, manuais e por meio de *softwares*. Os materiais utilizados para a análise da proposta foram sequência didática, transcrições das gravações de áudio de cada aula, material dos alunos e memórias de aula da professora titular da turma.

Com base em Walle (2009), a proposta teve início com a retomada da noção de raciocínio proporcional, com o propósito de ampliá-la ou formá-la, uma vez que a referida faz parte, intrinsecamente, do conceito de função. Para isso, foram entregues aos alunos três situações, duas delas envolvendo raciocínio proporcional e outra envolvendo combinação simples. De acordo com o autor, o raciocínio proporcional possibilita a compreensão de situações do campo multiplicativo, enquanto os conhecimentos aritméticos desenvolvem o campo aditivo. O conhecimento das relações multiplicativas é considerado a base para o pensamento algébrico.

A primeira situação diz respeito a compra de pizza na cantina da escola, cujo pedaço custa R$ 3,50. Os alunos responderam os seguintes questionamentos:

1) Na cantina da escola, um pedaço de pizza custa R$ 3,50.

a) Qual será o valor de três pedaços de pizza?

b) Quanto será pago por, 2, 5, 10, 12 e 15 pedaços de pizza.

c) Quais são as grandezas envolvidas nessa situação?

d) Como podemos organizar os dados dos itens anteriores (a e b)?

e) O valor total do número de pedaços de pizza aumenta ou diminui? Seguindo qual ideia?

f) Como seria representada essa situação, para qualquer número de pedaços de pizza, por meio de uma sentença matemática?

g) Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra?

h) Poderíamos dizer que essas grandezas variam? Justifique.

Em relação à primeira situação, os alunos não apresentaram dificuldades em determinar os valores de alguns pedaços de pizza, discutindo em seu grupo a respeito de cálculos mentais envolvidos.

Para identificar as grandezas envolvidas, os alunos apresentaram dificuldades, e solicitaram inúmeras vezes o auxílio da professora. No diálogo a seguir, podemos perceber como um grupo de alunos que não tinha o domínio do conceito de grandeza não conseguia identificá-las.

1. A_3: Dinheiro (risos).
2. A_6: (risos) dinheiro. Dinheiro, queijo, massa.
3. A_3: Calabresa.
4. A_6: Calabresa (risos). Tá, as grandezas.
5. A_3: Grandezas não é centímetro, decímetro?
6. A_6: Pois é, não faz sentido isso.
7. A_3: É, tipo ...
8. A_6: Tauana isso não faz sentido.
9. A_3: É. Dinheiro é uma grandeza?
10. A_6: É, grandezas.
11. P (Tauana): O que é grandeza? Vimos no 7º ano.
12. A_3: Sim, é decímetros, centímetros, metros.
13. A_6: Valor. Tá a gente põe dinheiro?
14. P: A gente viu o que é grandeza no 7º ano.
15. A_6: Valor é dinheiro, centavos, reais. Real, dólar.
16. P: Tá isso tudo são grandezas, valor, é dinheiro. Só uma está envolvida aí.
17. A_3: Valor.
18. A_6: Dinheiro.
19. P: Tá, e o que mais?
20. A_2: Tamanho.
21. A_3: Decimal.

[...]

22. A_5 – O que a gente pode medir.
23. P – Isso, tudo o que pode ser medido. Que grandezas que podem ser medidas naquela situação?
24. A_6 – Pedaços e dinheiro.

Devido às interações que ocorreram entre os alunos e, entre eles e a professora, foi possível retomar o conceito de grandeza. Porém, a maioria dos alunos não respondeu de forma completa ou geral, como podemos perceber no diálogo anterior. Alguns alunos responderam apenas “pedaços de pizza e dinheiro” (A_6) ou ainda “real e centavo” (A_7 e A_9), ao invés de identificar as grandezas de forma geral, como, por exemplo, “número de pedaços de pizza” e “preço”.

A organização dos dados foi realizada pelos alunos utilizando a ideia de tratamento da informação. Houve muita discussão a respeito da organização, até que os alunos chegaram à conclusão de que uma tabela seria a melhor forma de organizar os dados.

De acordo com Post, Behr e Lesh (1995), diferentes representações podem caracterizar o raciocínio proporcional e os conteúdos algébricos, sendo que “tabelas, gráficos, símbolos (equações), desenhos e diagramas são maneiras importantes pelas quais se podem representar as ideias algébricas" (p. 92). A ideia dos autores, de fornecer uma tabela e solicitar a escrita de uma equação que relacione os valores das grandezas envolvidas na situação, possibilitando o vínculo entre o raciocínio proporcional e a álgebra, vem ao encontro das ideias de Duval (2003), que defende a utilização de, no mínimo, dois registros de representação semiótica para a aprendizagem matemática.

De acordo com o que foi apresentado até aqui, podemos dizer que a noção geral de proporcionalidade foi compreendida pelos alunos, porém a ideia de que as grandezas são variáveis e que existe uma relação de dependência entre elas não estava clara para todos. O diálogo a seguir mostra a dificuldade dos alunos, do grupo 2[4], em representar uma sentença, relacionando as variáveis.

1. A_6 – Como seria representada essa situação, para qualquer número de pedaços de pizza, por meio de uma sentença matemática? Aí não sei, tenho que pensá. Como assim, tipo uma fórmula?
2. P – Uma sentença matemática, para qualquer número de pedaços de pizza.
3. A_6 – Seria um x?
4. P – Pode ser.
5. A_6 – P.
6. A_3 – P!
7. A_6 – Tá, como a gente vai fazer isso?
8. A_3 – Px = dx. Não.
9. A_6 – Não sei.
10. A_3 – Px.
11. A_6 – Por que px?
12. A_3 – Px = 3,50x.
13. A_2 – Eu acho que entendi a lógica.
14. A_3 – Assim ó, pizza vezes a incógnita, se a incógnita for 2, 3, sei lá, vai ser a pizza vezes 3,5 que vai ser pizza vezes o 3,5 entendeu?
15. A_6 – Faz sentido.
16. A_2 – É, faz sentido.
17. A_6 – Tá então põe. Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra? A quantidade de pizza, o valor depende da quantidade de pizza. Poderíamos dizer que essas grandezas variam? Pois como o valor é cobrado por pedaços, quanto mais pedaços, mais valor. Sei lá, o que tu escreveu?
18. A_3 – Sim, pois o valor varia de acordo com a quantidade de pizza.

[4] Grupo 1: A_1, A_4, A_7 e A_8; grupo 2: A_2, A_3 e A_6 e grupo 3: A_5, A_9 e A_{10}.

Com base nesse diálogo podemos trazer à tona uma discussão sobre a diferença entre a linguagem aritmética e algébrica, sendo que a álgebra difere da aritmética, principalmente, por utilizar letras para indicar valores em uma dada situação. Porém, esses dois campos matemáticos não podem ser estudados separadamente, de modo que a álgebra é também considerada uma generalização da aritmética (BOOTH, 1995).

Nesse sentido, Demana e Leitzel (1995) destacam que a compreensão do papel das variáveis em uma situação é importante para o entendimento de conteúdos algébricos e a dificuldade que os alunos possam apresentar nesse processo pode significar um fracasso na compreensão da álgebra. Para os autores,

> [...] a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações (p. 74).

As variáveis têm papel fundamental na generalização e possibilitar aos alunos situações de representação, utilizando as variáveis, é importante para o desenvolvimento nos conteúdos algébricos, como função.

Em relação a esse último diálogo, percebemos que um dos alunos (A_3), no momento de sua fala (turnos 8, 10, 12 e 14), estava organizando seu pensamento. Seu plano de ação, ou seja, o planejamento da solução do problema, não estava elaborado desde o início, e sua conclusão final foi sendo realizada no diálogo com os colegas (VIGOTSKI, 2007). Podemos ver que a ideia geral sobre a relação entre as grandezas foi perpassada no diálogo e, mesmo com a dificuldade em expressar a situação em termos algébricos, os alunos foram fechando o cerco em torno da generalização, na forma de linguagem verbal.

Destacamos aqui a importância de o professor propiciar momentos de interação social entre os próprios alunos para que eles compreendam outros pontos de vista em relação a cada situação de aprendizagem (TUDGE; ROGOFF, 1995).

Outro grupo de alunos (grupo 3) percebeu com mais clareza a relação entre as grandezas envolvidas para representar a situação por meio de uma sentença matemática de maneira simplificada e geral, como vemos na sequência.

1. A_{10} – X é igual a número de pizzas, número de pedaços.
2. A_5 – Pera, que que é?

3. A_{10} – É isso que to falando, x é igual a número de pedaços, que você vai colocá, daí vezes trint...,3,50 igual a y e y é igual valor a pagar.
4. A_5 – Que?
5. A_9 – Não entendi nada!
6. A_{10} – Não, não. X é o igual a número de pedaços. Daí coloca y igual a valor que você tem que pagar. X vezes 3,5 é igual a y.
7. A_5 – Y é o valor...
8. A_9 – Tá, não entendi.
9. A_5 – Ai meu Deus.

[...]

10. A_{10} – X é igual a número de pedaços.
11. A_9 – X é igual a 3,5?
12. A_5 – Não, não é isso.

Notamos neste último diálogo que um dos alunos (A_{10}), de forma consciente, tentou esclarecer seu raciocínio a respeito da situação, porém seus colegas não compreenderam. Para Vygotsky "utilizamos a palavra *consciência* para indicar a percepção da atividade da mente – a consciência de estar consciente" (1998, p. 114, grifos do autor). Podemos inferir que, pelo modo com que o referido aluno estava tentando se fazer entender pelos colegas, estava consciente do seu pensamento.

O que foi exposto até o momento foram conclusões parciais dos alunos nas discussões em seus grupos. Num segundo momento a situação-problema foi retomada com toda a turma, com o objetivo de elaborar sínteses mais gerais sobre o conteúdo em questão. A seguir, apresentamos parte do diálogo com todos os alunos, o qual mostra o avanço nas discussões proporcionado pelas interações entre os participantes do processo ensino-aprendizagem.

1. A_7 – Como seria representada essa situação para qualquer número de pedaços de pizza por meio de uma sentença matemática?
2. P – O que vocês colocaram?
3. A_1 – 3,50 vezes x. A incógnita é o número de pizzas (aluno do grupo 1).
4. A_6 – x vezes p igual a 3,50 vezes x (aluno do grupo 2).
5. P – Alguém colocou diferente?
6. A_{10} – x vezes p. Ãh?
7. A_6 – p é pizza.
8. A_5 – A gente botou x é igual a número de pedaços de pizza. Y valor que tem que pagar (aluno do grupo 3).

9. P – E como ficou a sentença?
10. A_{10} – x vezes ... é 3,50 vezes x igual a ... (aluno do grupo 3).
11. A_5 – Não. É 3,50x é igual a y.
12. P – Tá, aqui tem três respostas diferentes. Qual será que está correta?
13. A_6 – Não. Está faltando o outro lado da igualdade.
14. P – Tá, o 3,50 multiplicado pelo número de pedaços de pizza vai me dar o que?
15. A_7 – Dinheiro. O preço total.
16. P – Então nós igualamos ao preço total.
17. A_6 – Tá, mas se você for ver é outro p (referindo-se à conclusão do seu grupo – grupo 2).
18. P – o que é p?
19. A_3 – Pedaço de pizza.
20. P – E o x?
21. A_6 – É a quantidade de pedaços de pizza.
22. P – Mas então p é x?
23. A_6 – Isso.
24. P – E onde está o valor total?
25. A_5 – O nosso está certo.
26. A_6 – O p é tipo um número e o x é os pedaços de pizza.
27. A_3 – É a quantidade.
28. P – Quantidade não é o número de pedaços de pizza?
29. A_6 – Sim.
30. A_5 – O x é o número de pedaços de pizza, não tem o p.
31. P – Tu tá confundindo (falando com A_6).
32. A_6 – x é a quantidade, p é a pizza.
33. A_{10} – p e x é a mesma coisa (o aluno está querendo dizer que a incógnita, nessa situação, pode ser tanto p como x).
34. P – O grupo colocou x e p, e eles significam a mesma coisa. Porque a grandeza é o número de pedaços de pizza.
35. A_6 – Deixa só o p.

[...]

36. A_7 – A gente pode confundir o p com pedaços de pizza ou valor a pagar.

Comparando os diálogos dos pequenos grupos com esse último diálogo, vemos que alguns alunos (A_3 e A_6, nos turnos 4, 17 e 26) ainda estavam com dificuldade de compreender a situação para que pudessem representá-la na forma algébrica. Acompanhando a discussão, um dos alunos (A_7, turno 36) percebeu que a representação escolhida para a variável pode causar confusão no momento de identificar a sentença matemática que representa uma dada situação. É importante destacar que, a exemplo dessa situação, a retomada da discussão dos pequenos grupos, entre os alunos e o professor minimizam as dificuldades e potencializam a ampliação dos significados. Nesse sentido, para Booth (1995) um dos problemas no estudo dos conteúdos algébricos está no uso das variáveis e o que elas estão representando, sendo que "[...] se os alunos já estão familiarizados com o uso das letras, pode-se discutir a vantagem de usar determinadas letras como variáveis em uma determinada situação" (p. 31) ou ainda sugerir uma legenda, utilizada por alguns alunos nessa pesquisa.

A segunda situação referia-se a uma receita de limonada, que serve 20 pessoas. Com essa informação, os alunos responderam as questões a seguir.

a) Quantas receitas são necessárias para servir 10 pessoas?
b) Quantas receitas seriam necessárias para servir 50 pessoas?
c) Como você serviria uma quantidade de pessoas, sabendo que o número de receitas não seria exato, por exemplo, 25 pessoas?
d) Quais são as grandezas envolvidas nessa situação?
e) Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra?
f) Poderíamos dizer que essas grandezas variam? Justifique.
g) Se são gastas 3 latas de concentrado (de suco) para fazer uma receita, quantas latas devem ser compradas para fazer 15 receitas? Essa quantidade daria para servir quantas pessoas?
h) Considerando a informação anterior, quantas latas devem ser compradas para fazer *n* receitas?

Ao contrário da situação anterior, na qual os alunos apresentaram dificuldades para conceituar e determinar as grandezas, nessa situação houve muita discussão, como na situação anterior e, aparentemente, os alunos estavam mais seguros no que se refere à interpretação e a identificação das grandezas.

Percebemos também que os alunos compreenderam a ideia de proporcionalidade envolvida e a relação que as grandezas apresentaram entre si, como no item que solicitava se uma grandeza dependia de outra. Tanto na primeira situação como na segunda, os alunos responderam corretamente, percebendo que se existe a relação de proporcionalidade entre as grandezas, uma depende de outra.

Destacamos também o item que solicitava quantas latas seriam necessárias para *n* receitas[5]. No momento da correção notamos que os alunos compreenderam a ideia da generalização, pois todos conseguiram expressar de uma maneira correta, devido ao seu conhecimento em relação a conteúdos algébricos estudados em anos anteriores.

A última situação dessa parte inicial corresponde a uma combinação simples, na qual os alunos deveriam comparar com as duas anteriores, analisando se as três possuíam o mesmo tipo de relação matemática. A situação apresentava quatro camisetas, uma de cada cor: branca, azul, preta vermelha, e três calças, uma de cada cor: preta, branca e azul. Com essas informações, responderam as questões a seguir.

a) Quais são as diferentes maneiras que você pode se vestir usando uma camiseta e uma calça de cada vez?
b) Essa situação é semelhante às anteriores? Por quê?

A seguir, apresentamos o diálogo de um dos grupos (grupo 3) e a professora.

1. A_{10} – Tô na 3. Suponha que você tenha quatro camisetas, uma de cada cor: branca, azul, preta e vermelha, e três calças, uma de cada cor: preta, branca e azul. Quais são as diferentes maneiras que você pode se vestir usando uma camiseta e uma calça de cada vez? É 12. Essa situação é semelhante às anteriores?

[...]

2. A_9 – O que que é a b da 3?
3. A_{10} – Sim, porque são funções.

[...]

4. A_9 – Eu posso responder na última: não porque uma trata de roupa e a outra de comida?
5. P – Você lembra que nas questões anteriores você colocou que uma depende da outra? E nessa? Tá, envolve grandezas, mas aqui vocês colocaram que, quanto mais pedaços...A ideia era essa, quanto mais pedaços eu comprar, mais eu vou gastar. Mas agora?
6. A_4 – Quanto mais calças eu tiver...
7. P – É a mesma relação?
8. A_4 – Não.
9. A_{10} – Quer dizer que quando ganha uma camisa, vai ganhá uma calça. Não tem uma combinação que é só camisa. E não tem uma combinação que é só calça.
10. P – Mas eu quero saber se depende, se uma depende de outra. A calça vai depende da camiseta?
11. A_{10} – Pois não (para o aluno, pois não, representa uma resposta negativa).

[5] "*n* receitas" indica uma ideia, uma generalização, podendo se configurar como qualquer quantidade, representada por um número racional positivo.

Nesse diálogo, percebemos que alguns alunos da turma não compreenderam o que fora solicitado e buscaram auxílio da professora. O momento da interação social, tanto dos alunos com o professor quanto dos alunos entre si, caracteriza-se como um meio de ampliação de sua aprendizagem, no qual Tudge e Rogoff (1995) se apropriam dessa ideia de Vygotsky relacionada à sua teoria em relação ao processo de formação de conceitos.

Notamos também que um dos alunos (A10, turno 1), não compreendeu o que estava sendo solicitado, pois deveria ter sido indicado as possíveis combinações, não o número de combinações. Da retomada do estudo da situação de combinação simples comparada as duas anteriores, no grande grupo, destacamos as seguintes falas:

1. P – A_{10}, lê a b da 3.
2. A_{10} – Essa situação é semelhante as anteriores? Por quê? Não, porque não é função (grupo 1).
3. P – A_5 (a professora se dirige ao aluno A_5, solicitando a resposta do seu grupo).
4. A_5 – Não, elas não dependem uma da outra nessa situação. Nas outras dependiam (grupo 3).
5. A_1 – Eu botei que as grandezas não dependem uma da outra (grupo 1).

Tais respostas, representativas dos grupos, foram socializadas por alguns alunos (A_1, A_5 e A_{10}) no grande grupo. Como já dissemos, o objetivo das três primeiras situações foi de fazer uma retomada sobre raciocínio proporcional, ampliando-o ou formando-o. Com base nas interações, percebemos que os alunos apresentaram algum conhecimento sobre o assunto, sendo que a maioria respondeu ao que foi proposto, inclusive questões mais complexas, como os itens que envolviam identificação de grandezas e generalização abstrata com base em situações particulares.

As situações estudadas sobre raciocínio proporcional fazem parte do cotidiano das pessoas, porém suas ideias nem sempre são compreendidas. Como os alunos apresentaram noções sobre o assunto, foi necessário um fechamento das ideias envolvidas. Isso só foi possível por meio das interações que ocorreram ao longo do processo. Essa transição, segundo Vigotski (2007), de uma atividade que o aluno desenvolve com a ajuda de outro - nível de desenvolvimento potencial, até o novo nível de desenvolvimento real - quando o aluno desempenha tarefas de maneira independente, é denominado zona de desenvolvimento proximal.

Como o objetivo era formar ou ampliar a noção de raciocínio proporcional no estudo de funções, Walle contribuiu ao afirmar que “toda situação proporcional dá lugar a uma função linear (linha reta) com um gráfico que passa na origem. A relação constante na proporção é a inclinação do gráfico" (2009, p. 287-288). Vemos, então, que a noção de raciocínio proporcional está intrinsecamente relacionada ao estudo do conceito de função, por se tratar de uma situação proporcional.

Na sequência da proposta, foi solicitado aos alunos que entrevistassem pessoas de seu convívio a fim de identificar duas situações reais nas quais houvesse relação entre grandezas. Também foi solicitado que os alunos respondessem quais relações essas grandezas representavam e que as informações obtidas fossem organizadas de tal forma que outras pessoas pudessem compreender.

O objetivo dessa segunda parte da proposta era o de que os alunos identificassem e compreendessem elementos/ideias fundamentais no conceito de função, tais como, a relação de dependência entre as grandezas, valores que as variáveis podem assumir e a forma geral de uma função de 1º grau.

Para isso, os alunos analisaram as situações obtidas através das entrevistas com pessoas de seu convívio e, a partir disso, responderam questões que envolviam conceitos que compõem o conteúdo de função de 1º grau. Em relação ao processo de formação de conceitos, na concepção de Vygotsky (1998) a interação do indivíduo com o meio em que vive possibilita a troca de ideias, o que potencializa a aprendizagem. Para o autor, uma atividade intelectual como a formação dos conceitos "é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte" (p. 72-73).

Foi solicitado que os alunos representassem a situação em linguagem corrente, configurando-se um tipo de registro, segundo Duval (2003). O autor defende que a atividade matemática tem mais significado quando são apresentados, no mínimo, dois registros diferentes de representação e ainda com a possibilidade de realizar a troca de um registro de representação semiótica para outro.

Questionados sobre o conceito de função, ao relacionarem com o cotidiano das pessoas, os alunos apresentaram dificuldades na sua interpretação, conforme podemos ver no diálogo em um dos grupos:

1. A_7 – Eu não entendi o que é função.
2. P – O que é função pra ti?
3. A_7 – É algo que alguém determina (o aluno faz referência a alguém que determina algo que o outro deverá fazer).

4. A_6 – Agora vamos pensar de um modo prático, o que seria uma função, não apenas em matemática, mas sim no cotidiano das pessoas. Será que esse conceito utilizado no dia a dia tem alguma relação com a matemática? Por quê? Como assim função?

[...]

5. P – Lembram que ontem nós vimos aquelas questões? Olha o que diz: qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra? O que é função então? O que é alguma coisa estar em função de outra?
6. A_6 – Dependência?
7. P – Isso.
8. A_6 – Tá, então o que tem que escrever?
9. P – Escrever o que seria função no dia a dia.
10. A_6 – Vou botar função no cotidiano significa a dependência entre duas coisas.

A professora fez a retomada de uma questão que os alunos haviam respondido na primeira aula, com o propósito de que essas informações pudessem auxiliá-los. Para a professora, naquele momento os alunos deveriam compreender que o conceito de função está relacionado a uma relação entre as variáveis, de modo que, alterando-se uma delas, a outra também será alterada, de maneira proporcional. Nesse sentido, em relação ao ensino fundamental, o autor Walle, acrescenta que "para esses alunos o conceito de função evolui melhor a partir de situações contextualizadas em que uma mudança de uma coisa (variável independente) cause uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente)" (2009, p.303). Uma linguagem mais informal nesta etapa do ensino, mostrando as mudanças de uma variável em relação a outra, pode ser mais compreensível aos alunos.

Quando um aluno estuda determinado conceito ele se apropria de seu significado, segundo Vygotsky (1998), porém, não é na primeira vez que isso acontece. São necessárias várias etapas para seu aprendizado e, como consequência, seu desenvolvimento. "Quando uma criança aprende alguma operação aritmética ou algum conceito científico, o desenvolvimento dessa operação ou conceito apenas começou" (VYGOTSKY, 1998, p. 127).

A seguir, apresentamos um diálogo referente ao momento da troca de ideias entre os alunos sobre o conceito de função, na interação do grande grupo.

1. P – O que vocês colocaram na função?
2. A_7 – Eu não sei.
3. A_{10} – Quando tem mais que outro negócio lá.
4. P – Tá, mas no cotidiano das pessoas.
5. A_{10} – Por exemplo, qual a sua função na fábrica? Fazer pão.

6. P – A_8, fala.
7. A_8 – Quando alguma coisa depende de outra coisa.
8. A_1 – Foi isso que eu botei, quando uma função depende de outra.
9. P – Isso. Então, no caso da pizza, o valor depende da quantidade de pizza. O valor está em função.

Vemos que a professora poderia ter explorado um pouco mais ao questionarem os alunos, a fim de que eles elaborassem suas respostas de forma mais completa. Com base nas colocações dos alunos, a professora fez uma conclusão, pois os próprios estavam com dificuldades para sistematizar suas ideias. Percebemos que um dos alunos (A_{10}, turno 3), não apresentava uma ideia correta sobre o questionamento da professora (turno 1), o qual uma situação é função quando um único elemento do domínio possuir correspondência com mais de uma imagem, o que representa uma relação, mas não se caracterizando como função. É importante frisar que essa situação não foi explorada pela professora.

Para que um aluno possa compreender algo, Tudge e Rogoff (1995) destacam que inúmeras mudanças podem ocorrer, até se chegar à síntese do que está sendo estudado. Para os autores, Vygotsky contribui com a ideia de mediação, processo que ocorre por meio de signos, sendo a palavra um exemplo principal. As palavras têm o mesmo significado em uma determinada comunidade, na qual o processo de interação social ocorre entre jovens e adultos, para a sua apropriação.

Além da definição de função, os alunos tinham que elaborar uma sentença para a situação trazida por eles, por meio da entrevista, não apresentando dificuldades em representá-la. Na sequência, os alunos responderam ao seguinte questionamento: nessa sentença que foi encontrada, as letras têm um significado, além de representarem as grandezas. Vocês conseguem descobrir qual é? A letra que está em um membro da igualdade tem o mesmo papel que a letra que está no outro membro?

1. A_4 – [...] Na sentença encontrada, as letras têm um significado. Vocês conseguem descobrir qual é?

[...]

2. A_4 – A letra que está em um membro da igualdade tem o mesmo papel que a letra que está no outro membro?
3. A_9 – Não, porque respectivamente representa quantidade de caderno ou quantidade de matéria (a situação relacionava quantidades de caderno e matéria).
4. P – Tá, algo mais?
5. A_7 – Eu botei sim e não.
6. P – Mas não era a mesma pergunta?

7. A_7 – Não, tinha duas perguntas.
8. P – Mas queria dizer a mesma coisa.
9. A_7 – Ah.
10. P – [...] em cada uma dessas situações, nós temos duas grandezas, certo? Duas grandezas, eu quero que vocês pensem o seguinte: elas têm a mesma função?
11. A_7 – Não.
12. P – Isso aqui era custo e isso aqui era o quê?
13. A_4 – Bolo, caramba (a situação relacionava quantidade de pedaços de bolo e valor a ser pago por pedaço).
14. P – Bolo. Então olha só, aqui o custo está o quê? Dependendo de quem?
15. A_7 – Da multiplicação.
16. P – Então tem a mesma função essas duas letras?
17. A_7 – Não.
18. A_{10} – Elas tão em uma função.
19. P – O que é função pra ti?
20. A_{10} – São dois valores. [...] Duas incógnitas estão relacionadas.
21. P – Isso. Duas variáveis. Tem diferença.

Por meio das falas, percebemos que os alunos compreenderam a relação de dependência entre duas grandezas, porém apresentavam dificuldades em formalizar sua ideia. A seguir mais um diálogo, no qual a ideia principal estava em identificar a representatividade de cada variável (dependente e independente).

1. P – Aqui nós temos o custo. Quem depende de quem?
2. A_9 – A quantidade depende do custo.
3. A_{10} – O custo que depende.
4. P – O custo depende da quantidade de bolo. Isso aí são variáveis. Duas variáveis. Elas não têm a mesma função ali. Cada uma delas representa uma coisa. Uma delas seria a variável o quê? Em relação a outra?
5. A_7 – Variável...
6. P – Aqui, em relação ao batom, o y é o custo total. Se eu comprar um batom vou gastar 80, se comprar dois batons vou pagar quanto?
7. A_1 – 160.
8. P – Se eu comprar 3?
9. A_{10} – 240.
10. P – Quem está dependendo de quem?
11. A_5 – O custo depende do batom.
12. P – Tá, o batom, essa variável, eu não estou colocando valores aleatórios? (A palavra “aleatório” foi utilizada pela professora com o significado de variação de valores).
13. A_7 – Sim.

14. P – Então, ela seria a variável o quê?
15. A_7 – Aleatória. Independente.
16. P – Independente. Então, nós temos duas variáveis. Uma variável, ela se chama o que?
17. A_7 – Independente.
18. P – Porque eu vou lá e troco ela por qualquer valor. E a outra?
19. A_{10} – A outra você não pode ir lá trocar.
20. A_7 – A outra é a dependente.

Nessa discussão, percebemos que um dos alunos compreendeu a ideia em relação ao papel que cada variável desempenha em uma função (A7, turnos 15, 17 e 20). Após a discussão, os alunos registraram sua compreensão sobre a característica de cada variável.

Por meio do contexto de cada situação estudada foi possível compreender o significado de cada variável em uma função e que a relação de dependência entre duas grandezas caracteriza uma função. Nesse tipo de relação, em que uma variável depende de outra, conceitualmente "uma função deve definir exclusivamente o valor de uma variável em termos de outra" (WALLE, 2009, p. 305).

Em relação aos valores que as variáveis podem assumir, como valor nulo ou negativo, alguns alunos compreenderam que era possível que uma das variáveis apresentasse valor nulo. Como consequência, a outra variável, de acordo com a situação trazida por eles, também seria nula, como podemos perceber no diálogo a seguir.

1. A_7 – Alguma das variáveis pode assumir valor nulo? O que acontece?
2. P – É sempre em relação às situações que vocês trouxeram. Alguma das variáveis pode ser nula, pode ser zero?
3. A_5 – Sim.
4. A_6 – Não.

[...]

5. A_6 – A minha não pode porque é caderno e matéria.
6. A_5 – Se eu não comprar nenhuma bala, não tem gasto, não vou pagar nada.
7. P – É se você não compra nenhuma bala não tem gasto. Então pode ser?
8. A_5 – Pode.
9. A_7 – O meu pode.
10. A_6 – A quantidade de caderno depende da quantidade de matéria.
11. A_7 – Se você não tiver nenhum caderno?
12. A_{10} – Então não vai ter matéria.
13. A_5 – Sim, eu posso não comprar nenhuma balinha.

Nas situações trazidas por esses alunos, observamos que quando uma das variáveis assume um valor nulo, a outra também assume. A ideia utilizada pelos alunos, que o nulo, o zero, equivale a nada, auxiliou na discussão e na conclusão do questionamento.

Nesse caso, em que os alunos planejavam suas ações através da fala, nos remete a Vigotski (2007), para o qual, em determinado estágio de desenvolvimento, a fala é um auxiliar, se deslocando para o início da atividade, e não depois que a ação já foi realizada. De acordo com o autor,

> Num primeiro estágio, a fala *acompanha* as ações da criança e reflete as vicissitudes do processo de solução do problema de uma forma dispersa e caótica. Num estágio posterior, a fala desloca-se cada vez mais em direção ao início desse processo, de modo que, com o tempo, *preceda* a ação (p. 16, grifos do autor).

Ao responder se alguma das variáveis poderia assumir valor negativo, a maioria dos alunos compreendeu que, de acordo com as situações trazidas por eles, não era possível que as grandezas apresentassem valor menor que zero. Por meio da linguagem, é possível pensar nas ideias, elaborar um plano de ação para que a solução do problema proposto possa ser efetivada (VYGOTSKY, 1998).

Sobre a forma geral de função de 1º grau os alunos deveriam elaborar uma sentença que representasse cada situação da entrevista. Ao observar as dificuldades dos alunos, a professora solicitou que pensassem na forma geral da equação de 1º e de 2º grau. Como equação de 2º grau era um conteúdo mais recente, os alunos lembraram facilmente da sua forma geral.

1. P – Vocês lembram qual era a forma geral de uma equação de 2º grau?
2. A_{10} – Sim.
3. A_7 – Tem que ser x²...
4. P – Mas tinha um número com ele.
5. A_7 – a.
6. P – ax². Lembram da forma geral?
7. A_{10} – ax², bx, c, é igual a parábola.
8. A_7 – igual a zero.

[...]

9. P – Tá, mas qual era a forma geral da de 1º grau? Essa é de 2º.
10. A_7 – ax + bx. Não, ax + c.
11. A_6 – ax + c.

12. A_{10} – Não, é ax + b.
13. [...]
14. P – Olha a forma que tá isso aqui. É sempre uma letra em função de outra, uma letra em função de outra. E aí? Como descobrir a forma geral?
15. A_7 – x risquinho assim de, tipo, x uma linha.
16. P – Mas olha o que tem aqui.
17. A_3 – x igual a não existe.
18. A_7 – x flechinha...
19. P – Não.
20. A_9 – c = b?
21. P – Mas olha as letras que estamos usando. Aqui é sempre x e que coeficiente estamos usando?
22. A_6 – a igual a bx.
23. P – Mas viram que tem sempre uma letra antes?
24. A_6 – a?
25. A_4 – Não tem como fazer.
26. A_6 – x igual a...
27. A_7 – y igual a...
28. P – y igual...sempre tem uma letra que depende. Olha, esse aqui, é o número...
29. A_7 – abx.
30. A_{10} – É o coeficiente.
31. P – É o coeficiente. Olha sempre tem um número junto com a letra, não tem?
32. A_7 – Sim. [...] y igual a ax mais b.

Observamos várias discussões a respeito do questionamento em relação à forma geral, a participação dos alunos e a intervenção da professora. Sobre a participação da professora, é possível perceber que na tentativa de auxiliar os alunos a identificarem o coeficiente angular na sentença matemática, ela traz tanto situações particulares como gerais, ou seja, ora referindo-se a número, ora referindo-se à letra (turnos 4, 21 e 31).

Pelo diálogo vemos que apesar de já terem estudado a forma geral da equação de 1º grau, os alunos estavam com dificuldade para determinar a forma geral de uma função de 1º grau, o que foi, de certa forma, sanada por meio da interação entre todos os participantes.

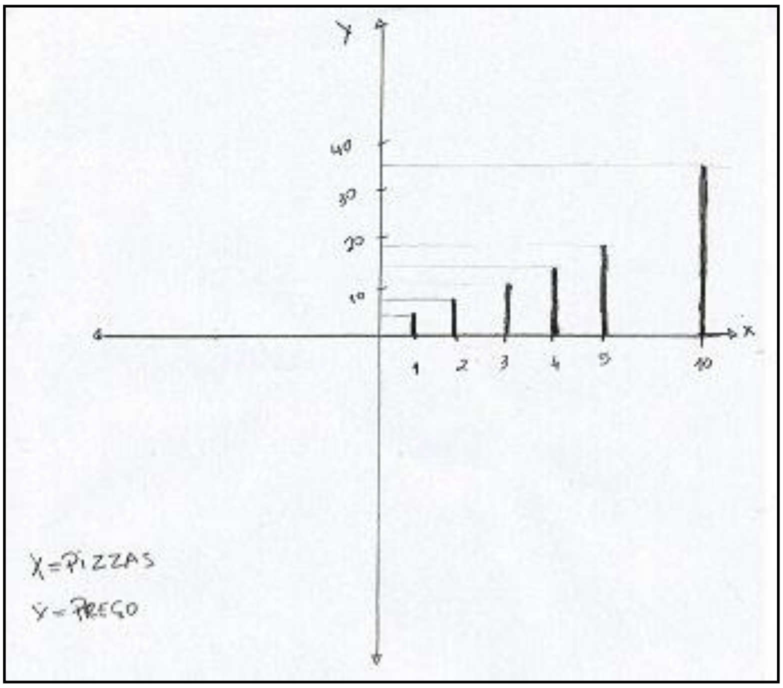
Outra vez percebemos a importância de o professor planejar suas aulas propondo momentos para que todos os envolvidos na sala de aula pudessem interagir, como forma de discutir e trocar ideias a respeito do tema estudado.

Na sequência da proposta, representação gráfica foi o foco dos estudos, com o objetivo de identificar a relação existente com o que fora estudado até o momento. Para isso, algumas atividades foram propostas, inclusive com o uso do *software* Geogebra.

Remetendo-nos à descrição da proposta, havia três situações, duas envolvendo raciocínio proporcional e uma de combinação simples. Para iniciar as representações gráficas, foram retomadas duas situações, uma de raciocínio proporcional e a de combinação para a construção gráfica. A professora construiu com os alunos o gráfico da situação da pizza e como tarefa extraclasse foi solicitado que os alunos construíssem o gráfico da situação da combinação das camisetas com as calças. Com base nos gráficos, foi analisada com os alunos a diferença entre uma situação que se caracteriza como uma função e outra que representa uma relação qualquer. Os alunos já haviam discutido em outro momento a diferença em relação à dependência, agora interpretaram o gráfico e, por meio dele, discutiram porque uma situação representa uma função e a outra não.

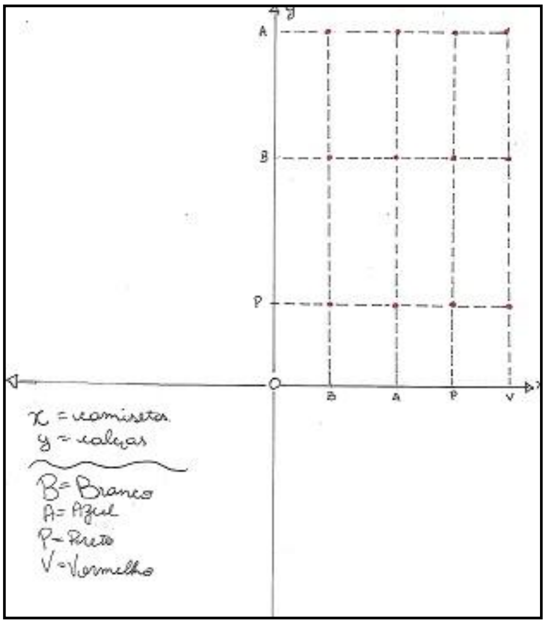
Para que o leitor possa compreender as falas no diálogo a seguir, apresentamos exemplos de gráficos das duas situações, sendo que o primeiro é uma cópia do gráfico construído pela professora no quadro e o segundo, uma elaboração de um dos alunos.

Figura 1: gráfico referente à situação envolvendo número de pedaços de pizza.



Fonte: da pesquisa.

Figura 2: gráfico referente à situação envolvendo combinação simples (A5).



Fonte: da pesquisa.

1. P – Então, qual é a diferença no gráfico? O que vocês estão observando aqui?
2. A_1 – É porque esse não depende uma da outra e esse depende. Tu pode saber pela diagonal.
3. P – Sim, aqui poderia seguir. Ligar aqui? Por que eu não posso ligar aqui?
4. A_1 – Ahh, porque vai ter meio e coisa.
5. P – Isso. Vão ter valores decimais aqui. Olha, no problema a gente sabe que aquela grandeza lá, no caso daquela situação, as grandezas não dependem uma da outra. Mas se olhasse só pro gráfico, o que tem de diferente no gráfico? (Situação referente à combinação simples).

[...]

6. A_3 – É que esse daí é só um ponto no negócio, entendeu? E aquele lá tem três pontos pro negócio.
7. P – Tá. A_{10}.
8. A_{10} – É porque o valor dependente não pode ter...é...uma, uma...o valor dependente não pode ter dois valores independentes.
9. P – É isso. O que a A_3 falo também está correto. Fala de novo.
10. A_3 – Assim ó, no primeiro é um pedaço de pizza, é...são duas grandezas juntas. E lá é um monte das mesmas na verdade, mais ou menos. E elas tão tipo, lá só é um ponto.

Com base no diálogo apresentado, vemos que inicialmente os alunos discutiram a respeito de valores decimais para número de pedaços de pizza, o que, segundo eles, não era possível. A ideia de unir todos os pares ordenados em um gráfico não pode ser considerada nesse caso, devido ao contexto da situação só possibilitar comprar pedaços de pizza inteiros. Segundo Walle, não faz sentido traçar uma linha reta, incluindo todos os pares ordenados, tanto das abscissas quanto das ordenadas ou ainda prolongando esse traço à esquerda do eixo. Para o autor, “o gráfico é outro modelo matemático que, em termos do contexto, não faz sentido para todas as partes da imagem” (2009, p. 306).

No diálogo apresentado, é possível perceber que dois dos alunos (A_3 e A_{10}) compreenderam, na análise do gráfico, porque uma das situações representa uma função e a outra não. Já outro aluno (A_3, turno 6) apresentou dificuldades em expor suas ideias, ou seja, elaborar uma síntese mental do seu raciocínio. Como vimos anteriormente, de acordo com Tudge e Rogoff (1995) até se chegar a uma síntese do que está sendo estudado há um processo de desenvolvimento. No caso desse último aluno citado, é possível dizer que o referido possuía um acúmulo de ideias e pensamentos, porém não se configurando em uma síntese geral, mas em processo de elaboração.

Na sequência da proposta, os alunos realizaram uma pesquisa sobre o plano cartesiano, com o objetivo de tomar conhecimento da origem, da formação e dos conceitos envolvidos. Com base nessas informações, foram debatidas ideias pesquisadas pelos alunos, com o objetivo de se apropriar de significados de conteúdos desconhecidos, em relação à nomenclatura dos eixos, justificativa de criação e por quem foi criada a representação gráfica cartesiana. Também foram retomadas ideias utilizadas anteriormente, no jogo denominado Batalha Naval, relacionando-as com a localização dos pares ordenados no plano cartesiano.

Consideramos que a construção manual de gráficos é importante para observar os vários aspectos que devem ser considerados para que a representação seja a mais fiel possível em relação aos dados de cada situação. No entanto, a utilização de tecnologias nos traz uma perspectiva diferenciada e dinâmica, principalmente no que tange ao comportamento dos gráficos quando alteramos os valores dos coeficientes.

Quando ocorrem alterações na equação, há alterações no gráfico que a representa, pois “o coeficiente independente *b* é responsável pela posição da reta no eixo das ordenadas; o coeficiente *a* é responsável pelo ângulo que a reta forma com os eixos” (MORETTI, 2003, p.152). De acordo com o autor, essa ideia pode ser percebida mais claramente pela precisão da construção de gráficos com a utilização de *softwares* de computação gráfica.

Assim, a professora propôs que os alunos explorassem o *software Geogebra*, de modo a estabelecer relações com o que havia sido estudado. Inicialmente, fizeram o *download* do *software*, com o propósito de conhecer o programa, ou seja, as ferramentas existentes, as funções que apresenta em relação ao tema estudado e, descobrir quais dos comandos permitia a construção de gráficos de funções e explorá-los.

Na sequência, os alunos receberam um material, no qual deveriam determinar a lei da função a partir de um gráfico, no qual estavam marcados os pares ordenados (0, 3) e (5, 0), apresentando dificuldades em realizar a atividade, necessitando do auxílio da professora.

A proposição desse tipo de atividade foi baseada em Duval segundo o qual “há por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros” (2003, p. 17). Os alunos ainda apresentavam dificuldades em articular as variáveis, pelas tentativas de resolver o que foi proposto.

Como foi dito, nem sempre será num primeiro contato com determinado conceito que seu significado seja apropriado pelos alunos. De acordo com Vygotsky (1998), o significado das palavras, que representam conceitos, evolui de forma diferente para cada indivíduo. Segundo suas pesquisas, crianças com a mesma faixa etária podem ir além de sua capacidade ou, pelo contrário, não serem capazes de resolver problemas referentes às crianças com faixa etária inferior. O diálogo apresentado na sequência mostra a tentativa dos alunos em resolver a atividade.

1. A_{10} – É a mesma coisa que descobri a razão de semelhança de duas figuras.

[...]

2. A_6 – Então é zero igual a “a” vezes 5?
3. P – Isso Zero igual ao *a* vezes o 5 mais *b*. E isso é o que? Zero igual a 5*a* mais *b*.

[...]

4. A_7 – Dá zero sobre 5...
5. P – Aqui eu não troquei o ponto 5 e zero? Tá, eu não posso trocá o ponto zero e 3?
6. A_7 – Pode.
7. P – Tá, e como vai ficar?
8. A_7 – 3 igual a zero vezes a, mais b. Mas tipo...
9. P – Vocês entenderam como eu cheguei nisso?
10. A_7 – x não pode ser zero. Senão é 3 igual a b.
11. P – Mas aqui é um ponto.
12. A_7 – Mas é 3 igual a b então?
13. P – 3 igual a b. O b é quanto?
14. A_7 – 3.

Inicialmente, os alunos identificaram os dois pares ordenados marcados no gráfico construído, $(0{,}3)$ e $(5{,}0)$ e, a seguir, com base na forma geral, $y = ax + b$, substituíram o primeiro par ordenado, $(0{,}3)$, nas variáveis correspondentes. Como resultado, obtiveram a seguinte equação: $3 = a \cdot 0 + b$. Um dos alunos da turma (A_7, turnos 8, 10 e 12) apresentou dificuldades em expor a sequência de cálculos que havia realizado, pois acreditou que o valor correspondente a variável "x" não poderia ser zero (turno 10). Por fim, ele compreendeu que o valor correspondente ao coeficiente "b" era 3 (turnos 12 e 14). Na sequência, substituíram o segundo par ordenado, $(5{,}0)$ e o coeficiente "b", obtido no cálculo anterior, cujo valor correspondia a 3 unidades e obtiveram a seguinte equação: $0 = a \cdot 5 + 3$. Com isso, isolaram o termo em "a" obtendo inicialmente $-3 = 5a$ e, a seguir, o valor correspondente ao coeficiente "a", ou seja, $a = -\frac{3}{5}$.

No diálogo a seguir, notamos que um dos alunos da turma (A_{10}) percebeu que existia outra maneira de encontrar o valor do coeficiente "b".

1. A_{10} – Dava pra descobrir o b só tipo descendo a linha reta. Tipo, que ela comece no ponto zero.
2. P – Explique melhor.
3. A_{10} – Por exemplo, ó, tá aí no y, a reta, se a reta for, ela tem que começar, tipo, no ponto zero ali, só que ela tá no 3, não, 5 acima do ponto zero, então vai soma mais 3, independente do valor de x. E tu sabe que é mais 3.

Esse aluno (A_{10}, turnos 1 e 3) apresentou dificuldades em expor suas ideias, mas de modo geral, concluiu que era possível determinar o valor do coeficiente "b" apenas observando o valor em que a reta intercepta o eixo y. A discussão a respeito do papel do coeficiente linear no gráfico foi realizada na sequência.

1. P – O que é coeficiente linear?
2. A_{10} – É onde encontra o b no y.
3. P – Tá. Olha esse número aqui no y. Olha o número que tem aqui e olha o número que encontramos para b. Que número está aqui no y, número para b? (Seguindo o que um dos alunos (A_{10}, turno 2) havia observado, a professora indica que o ponto no qual a reta intercepta o eixo y (x apresenta abscissa zero) é o coeficiente linear "b").
4. A_1 – Vai ser sempre o que o y vai ser.
5. A_{10} – Quando x é zero.
6. A_1 – Quando x é zero.

[...]

7. A_7 – Eu coloquei: y sempre será igual qual o número que está na linha ordenada.
8. A_1 – Mas só quando x for zero.
9. A_7 – É.

[...]

10. A_1 – Então o coeficiente linear é o b?
11. A_6 – É.

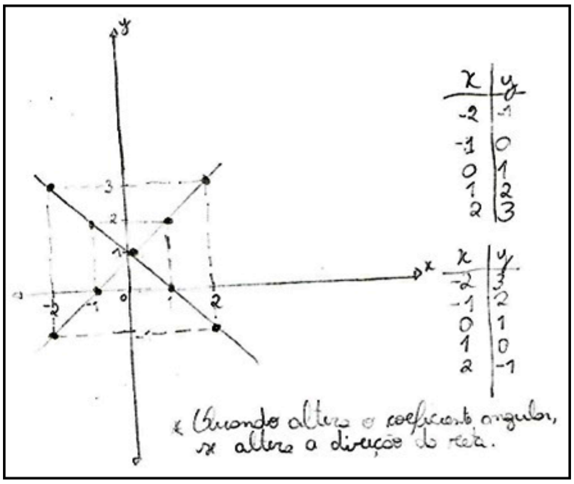
De acordo com esse diálogo, vemos que alguns alunos da turma (A_1, A_6, A_7 e A_{10}) se envolveram na discussão sobre o papel do coeficiente linear e o comportamento do gráfico em função da sua alteração, enquanto outros não se manifestaram. Essa constatação nos faz pensar sobre a interação social em sala de aula e o cuidado que o professor deveria ter no sentido de verificar se os alunos que silenciam estão de fato acompanhando a discussão.

Para a ampliação do conhecimento sobre função, estabelecendo relações entre a representação gráfica e algébrica, a professora se valeu de um gráfico que estava representado no quadro para mostrar que a inclinação da reta tem relação com o coeficiente angular, expressão nova para os alunos. De acordo com a explicação da professora, por meio do gráfico, os alunos concluíram que na equação o coeficiente angular está representado pela letra “a”, coeficiente de “ax”.

Nas três atividades seguintes, os alunos construíram gráficos no *software Geogebra* e alteraram os valores dos coeficientes, angular e linear, e analisaram cada troca, e, ainda, as três atividades como um todo, com o objetivo de identificarem o papel de cada coeficiente em uma função. Contudo, como havia apenas um computador disponível, as atividades foram realizadas em folha A4. Fazemos aqui uma observação: se a atividade com o *software* era considerada importante para a aprendizagem, a professora deveria ter se organizado e reservado previamente os computadores para essa aula, evitando que os alunos elaborassem os gráficos manualmente, pois já haviam construído dessa forma na etapa anterior da proposta.

A representação, a seguir, mostra a mudança do gráfico como consequência da alteração do coeficiente angular de uma função de 1º grau.

Figura 3: representação gráfica de uma função crescente e uma decrescente (A6).



Fonte: da pesquisa.

A respeito da análise sobre a questão, que se referia ao coeficiente linear, apresentamos o diálogo a seguir, envolvendo alguns alunos da turma.

1. A_6 – O que a gente observa nesses gráficos, tu que terminou A_{10}?
2. A_{10} – Que quando se altera os coeficientes lineares, se altera a posição da reta.
3. P – O que você observou?
4. A_6 – Que quando troca o coeficiente linear, a reta muda de posição.

[...]

5. A_6 – O que é pra escrever sobre comportamento dos gráficos?
6. A_7 – Quando se altera os coeficientes...
7. A_6 – Não, da outra folha. [...] O que eu boto?
8. A_7 – Quando se altera o coeficiente angular, muda-se a direção da reta.

Um dos alunos (A_6, turnos 4 e 7), nesse diálogo, apenas se "apropriou" da ideia do colega, talvez sem compreender as informações e sem analisar o que estava sendo solicitado. Nesse sentido, Vygotsky (1998) traz o conceito de imitação que, como podemos observar nesse último diálogo, tem relação com a ação de um dos alunos (A_6).

Para o autor, a imitação desempenha um papel importante junto à aprendizagem, pois o que um aluno pode fazer hoje com auxílio, futuramente terá condições de realizá-lo sozinho, passando do nível de desenvolvimento potencial para um novo nível de desenvolvimento real.

Apesar desse aluno (A_6), envolvido nos dois diálogos apresentados, não manifestar a sua análise, a respeito do papel de cada coeficiente no gráfico das funções, os outros alunos envolvidos no debate (A_7 e A_{10}, turnos 2, 6 e 8) conseguiram alcançar o objetivo das atividades, em que “o coeficiente independente *b* é responsável pela posição da reta no eixo das ordenadas; o coeficiente angular *a* é responsável pelo ângulo que a reta forma com os eixos” (MORETTI, 2003, p. 152).

No momento da discussão com o grande grupo, percebemos que outras ideias referentes às atividades foram levantadas pelos demais alunos.

1. A_9 – Analise os 3 gráficos construídos. O que você observa em relação aos 3 gráficos?
2. P – Tá, e aí? O que vocês observaram?
3. A_5 – Eles se acompanham todos em uma diagonal, mas um está sempre acima do outro, ou seja, paralelo ao outro.
4. P – Isso aí. Vai mudar o ângulo? Vai mudar a inclinação dessa reta?
5. A_{10} – Não.

[...]

6. A_2 – As retas são paralelas. Mudam apenas a posição.

Como as atividades foram realizadas em grupos, entendemos também que cada um expôs a ideia de cada grupo, no qual alguns alunos da turma participaram mais, como podemos observar. A interação social mostra-se importante na maioria das atividades desenvolvidas em sala de aula, pois, como já foi dito, Tudge e Rogoff (1995) consideram que um dos benefícios da interação é a possibilidade de troca de ideias pelos alunos. A possibilidade de compreender outras ideias torna-se o benefício mais importante, seja pela observação ou pela participação direta na solução de uma situação-problema.

Em relação ao gráfico, no qual os coeficientes angulares deveriam ser alterados, também houve uma discussão importante, como podemos observar a seguir.

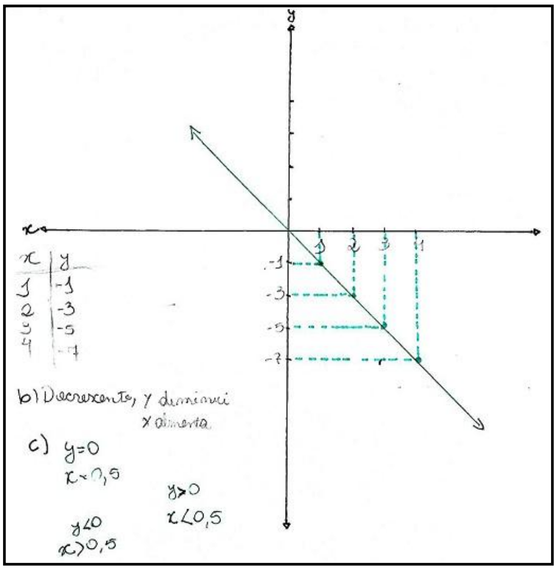
1. P – O que mais que elas têm de particularidades?
2. A_4 – Elas se cruzam.
3. A_{10} – Elas são retas.
4. A_4 – As duas são retas só que viradas para lados diferentes.
5. P – Por que? É exatamente isso. Por que elas são viradas, uma para cá...
6. A_4 – Por que uma é negativa e a outra é positiva e uma vai para baixo e outra pra cima.
7. P – É quase. [...] Por que elas estão assim?
8. A_{10} – Porque mudou o coeficiente angular.

Notamos que um dos alunos da turma (A_4, turnos 4 e 6), que estava envolvido no diálogo, compreendeu o papel do coeficiente angular em uma função de 1º grau, porém não conseguiu formalizar a ideia, mas foi auxiliado por outro aluno (A_{10}, turno 8). Nesse diálogo é necessário observar, também, a linguagem da professora (turno 5), no sentido de que nessa etapa ela deveria utilizar a linguagem matemática já veiculada em sala de aula, em relação à reta crescente e decrescente no plano cartesiano.

Como tarefa extraclasse, os alunos pesquisaram na cidade a respeito da tarifa cobrada pelos taxistas, bandeirada e valor por quilômetro e valores de estacionamento, fixo e por tempo. Em sala de aula, foi analisada a possibilidade de valores negativos para as variáveis das duas situações da tarefa e sua relação com a obtida na entrevista e a situação dos pedaços de pizza. Na sequência, realizaram uma pesquisa sobre funções linear, afim e constante, utilizando livros didáticos e dicionários matemáticos *online*.

Os alunos analisaram gráficos de duas funções lineares e duas funções afins e determinaram se as referidas eram crescentes ou decrescentes, justificando. A seguir, o material de um aluno, que mostra o gráfico e sua análise.

Figura 4: análise do gráfico (A5).



Fonte: da pesquisa.

Observamos que os alunos não apresentaram dificuldades em analisar o gráfico, pois o estudo do crescimento ou decrescimento da função já havia sido estudado anteriormente.

Como finalização do desenvolvimento da proposta foi indicada uma revisão dos conceitos estudados sobre o conteúdo de função de 1º grau, com o objetivo de rever possíveis ideias que não foram totalmente compreendidas pelos alunos. Na sequência, a proposta foi finalizada com uma avaliação escrita individual, com o objetivo de verificar se os alunos compreenderam as ideias envolvidas na proposta.

Na avaliação final (apêndice C), foram apresentadas questões que envolviam situações do cotidiano, com o objetivo de identificar as grandezas, a lei que representava cada função e o papel de cada variável. Também foram apresentadas questões relacionadas à representação de uma função por meio da linguagem algébrica e geométrica, com o objetivo de mobilizar as representações, de um registro a outro, simultaneamente. Além disso, as questões apresentavam oportunidades de os alunos analisarem o comportamento de cada gráfico construído, como a declividade, por exemplo.

A maioria dos alunos obteve resultado satisfatório, conseguindo responder as questões propostas na avaliação. Quando solicitado para indicar as variáveis envolvidas nas situações e escrever a lei da função correspondente, os alunos não apresentaram dúvida em sua determinação. Um das questões que envolvia a determinação da área de uma figura e que solicitava a identificação da lei da função ocasionou dúvidas na maioria dos alunos, principalmente no momento de interpretar o enunciado. Foi possível perceber que a ideia de determinar a lei de uma função a partir do gráfico, trouxe dificuldades para alguns alunos, pois determinaram os pares ordenados que estavam representando no gráfico, porém não conseguiram efetuar o cálculo que era necessário. Ainda, em relação à análise do gráfico, um pequeno grupo de alunos apresentou dificuldades em determinar os valores da variável x, quando y era maior, menor ou igual à zero. A última questão da avaliação exigiu mais atenção dos alunos, sendo que alguns não conseguiram concluir, pois uma sucessão de ideias sobre o conceito de função estava envolvida. Mesmo diante de algumas dificuldades apresentadas na referida avaliação, que envolveu um conteúdo desenvolvido com os alunos pela primeira vez, o desempenho apresentado pela turma sobre função pode ser considerado aceitável, considerando que esse conteúdo deverá ser ampliado no 1º ano do ensino médio.

Ao longo da análise, percebemos que a interação entre os próprios alunos aconteceu principalmente nas primeiras atividades da proposta. Na sequência de atividades, as interações foram ampliadas no sentido de maior participação, também, da professora titular da classe.

Na sequência de atividades do produto educacional, vimos que foram consideradas as ideias trazidas pelos alunos como forma de interagir com a proposta, na busca por mais significado no processo de formação dos conceitos envolvidos no conteúdo de função de 1º grau. Também foram consideradas situações que tinham como finalidade a possibilidade de realizar trocas de registro de representação semiótica, o que de acordo com Duval (2003), para se alcançar os objetivos da área da matemática e compreender o objeto em questão, é necessária a utilização de, no mínimo, dois tipos diferentes de registros e ainda que o indivíduo tenha a capacidade de realizar a transição de um registro de representação para outro.

As diferentes ideias dos alunos a respeito das atividades propostas, bem como os materiais produzidos por eles, por meio das interações possibilitaram a análise de seus pontos de vista e de seu processo de formação de conceitos.

Para que um aluno se aproprie de um significado, é necessário fazer a análise de vários fatores que influenciam nesse processo, como as interações em sala de aula e as situações didáticas desenvolvidas. Atividades que proporcionem discussões entre os alunos e entre os alunos e o professor e que promovam a interação social que, de acordo com Vigotski (2007) é algo fundamental para o aprendizado de um indivíduo.

Assim, no processo ensino-aprendizagem, cada indivíduo tem um papel: o professor, que planeja suas aulas, considera a metodologia que será utilizada em sua proposta e possibilita momentos de discussão dos temas desenvolvidos e, o aluno, que participa desse processo, não como um mero espectador, mas sim como protagonista de sua própria aprendizagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação teve como objetivo analisar se os significados referentes ao conteúdo de função de 1º grau desenvolvido, por meio de um produto educacional, foram apropriados pelos alunos, através das interações sociais produzidas pelos participantes do processo ensino-aprendizagem. A partir disso, apresentamos as considerações, nas quais algumas contribuições e aspectos relevantes foram considerados, referentes ao tema da pesquisa.

De acordo com os autores referenciados no estudo, os conteúdos algébricos propostos no ensino fundamental fazem parte de um processo de desenvolvimento cognitivo elevado, comparado ao que havia sido estudado até o momento, por se tratar de uma natureza mais abstrata. Inicialmente, no ensino fundamental, são desenvolvidas atividades que envolvem o raciocínio aritmético, em que são apresentadas ideias referentes às operações, apenas com números. O foco no raciocínio algébrico, em geral, vem na sequência, com a concepção de álgebra como aritmética generalizada. E então, nessa transição, ocorrem as dificuldades dos alunos para compreender o que é a álgebra e seus procedimentos envolvendo problemas relacionados a esse campo da matemática.

Consideramos, assim, que um dos problemas na aprendizagem da álgebra está relacionado à falta de compreensão dos procedimentos que envolvem o raciocínio aritmético, em geral desenvolvido como algo distante do raciocínio algébrico, que, por sua vez, ocasionam dificuldades no aluno em compreender a relação entre os conteúdos desses dois campos.

Um estudante do 9º ano do ensino fundamental dispõe de muitas informações, tendo a possibilidade de acessá-las no momento que lhe for conveniente. Contudo, informação não se caracteriza como conhecimento e então, nesse momento, a escola tem papel fundamental, ao proporcionar aos alunos diferentes situações que desenvolvam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, aprendam a se tornarem pessoas críticas em relação ao que acontece na sociedade que estão inseridos. Nesse sentido, as atividades que foram desenvolvidas na proposta buscavam envolver situações do cotidiano dos alunos, considerando, em algumas situações, a responsabilidade de cada indivíduo em relação à economia, tanto de energia elétrica quanto de água, sendo um momento de reflexão a respeito de sustentabilidade.

Para a elaboração da proposta de produto educacional, na forma de sequência didática, consideramos importante o estudo a respeito das pesquisas em educação algébrica, especialmente as que envolvem função de 1º grau, com o propósito de perceber como esse conteúdo vem sendo abordado em sala de aula. Além disso, os fundamentos matemáticos também servem como base para a elaboração das atividades que foram desenvolvidas. Ainda, após a aplicação da proposta, consideramos indispensável uma fundamentação teórica que sirva como suporte para análise do processo de formação de conceitos.

A análise da aplicação da proposta buscou observar o processo de formação de conceitos de função de 1º grau, apropriando-se das ideias de Vygotsky, o qual considera que a interação social é um aspecto importante para o desenvolvimento cognitivo. Nesse sentido, a proposta foi organizada no sentido de promover a interação entre os indivíduos em sala de aula, ao exporem suas ideias em relação a cada atividade.

Ao longo da análise, a resolução de problemas ganhou destaque, por envolver os alunos na busca pela compreensão de cada conceito, promovendo a interação social, com o objetivo de que o aluno pudesse avançar, situando-se numa nova zona de desenvolvimento proximal, seguindo as ideias de Vygotsky.

Inúmeros são os fatores que influenciam no processo ensino-aprendizagem e cada vez mais o professor deve estar preparado para proporcionar aos alunos um processo significativo de apropriação de conceitos, ao envolver ideias já desenvolvidas e situações de seu cotidiano. Todos os indivíduos possuem conhecimento sobre determinado assunto e o papel do professor está em utilizar esse conhecimento, já existente em seus alunos, e aproveitá-lo para o processo de formação de conceitos.

O profissional da área da educação tem papel fundamental no processo de apropriação dos significados, por parte dos alunos, tornando-se um trabalho complexo, que exige preparação e dedicação, não apenas para desenvolver as atividades de forma a considerar as teorias abordadas, mas também conhecê-las para que seu planejamento possa ter como finalidade esse processo de formação de conceitos.

A importância de pesquisas que envolvam educação algébrica deve ser considerada como forma de compreender a complexidade do processo de ensino-aprendizagem. Novas questões de pesquisa irão surgir com base na pesquisa desenvolvida, com a finalidade de buscar as respostas necessárias para que nossos alunos percebam um significado para o estudo desses conteúdos. Nesse sentido, respostas a questionamentos como estes poderão ser buscadas: de que forma os alunos envolvidos nessa pesquisa utilizarão os conhecimentos desenvolvidos nesse produto educacional, em sua vida, na escola e fora dela? Como promover debates envolvendo sustentabilidade no estudo de conteúdos algébricos? De que forma promover o interesse dos alunos no estudo de conteúdos algébricos, possibilitando maior interesse nesse campo da matemática?

Finalizamos essas considerações refletindo a respeito da importância do papel do professor, que tem o papel de planejar suas aulas de modo a possibilitar a apropriação dos significados por parte dos alunos. Nesse sentido, seu planejamento deve proporcionar interações entre os participantes do processo ensino-aprendizagem, procurando esclarecer as dificuldades que os mesmos apresentam nos conteúdos matemáticos.

Com base no exposto, buscamos proporcionar uma reflexão sob o nosso ponto de vista do ensino de funções, mostrando ideias que possam auxiliar o professor no momento de seu planejamento. Pensamos que é importante que o professor repense sua prática, principalmente no ensino de conteúdos algébricos no ensino fundamental, considerando ideias e metodologias que foram utilizadas na elaboração dessa dissertação.

6 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Apresentamos a seguir o presente produto educacional, na forma de uma sequência didática para o ensino de função do 1º grau, no ensino fundamental.

Observações para o professor: As situações apresentadas acima buscam formar ou ampliar a ideia de raciocínio proporcional nos alunos. Organizar os alunos em pequenos grupos para a troca de informações.

A – Atividades envolvendo a relação entre raciocínio proporcional e o conceito de função

I. Resolver as seguintes situações-problema:

1) Na cantina da escola, um pedaço de pizza custa R$ 3,50.

a) Qual será o valor de três pedaços de pizza?

b) Quanto será pago por, 2, 5, 10, 12 e 15 pedaços de pizza.

c) Quais são as grandezas envolvidas nessa situação?

d) Como podemos organizar os dados dos itens anteriores (a e b)?

e) O valor total do número de pedaços de pizza aumenta ou diminui? Seguindo qual ideia?

f) Como seria representada essa situação, para qualquer número de pedaços de pizza, por meio de uma sentença matemática?

g) Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra?

h) Poderíamos dizer que essas grandezas variam? Justifique.

2) Uma receita de limonada serve 20 pessoas[6].

a) Quantas receitas são necessárias para servir 10 pessoas?

b) Quantas receitas seriam necessárias para servir 50 pessoas?

c) Como você serviria uma quantidade de, por exemplo, 25 pessoas, sabendo que o número de receitas não seria exato?

d) Quais são as grandezas envolvidas nessa situação?

e) Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra?

f) Poderíamos dizer que essas grandezas variam? Justifique.

g) Se são gastas 3 latas de concentrado (de suco) para fazer uma receita, quantas latas devem ser compradas para fazer 15 receitas? Essa quantidade daria para servir quantas pessoas?

---

[6] Questão adaptada de Walle (2009).

h) Considerando a informação anterior, quantas latas devem ser compradas para fazer n receitas?

3) Suponha que você tenha quatro camisetas, uma de cada cor: branca, azul, preta vermelha, e três calças, uma de cada cor: preta, branca e azul.

a) Quais são as diferentes maneiras que você pode se vestir usando uma camiseta e uma calça de cada vez?

b) Essa situação é semelhante às anteriores? Por quê?

Observações para o professor: É importante que o professor discuta com os alunos o conceito de grandeza, inclusive no momento da correção, analisando cada uma das situações propostas, pois na terceira as grandezas envolvidas se relacionam seguindo a ideia de vários para vários ou ainda um para vários, não envolvendo raciocínio proporcional.

B – Atividades específicas sobre o conceito de função de 1º grau

II. Tarefa extraclasse: entrevistar pessoas de seu convívio buscando identificar duas situações reais em que se possa identificar relações entre grandezas.

a) Dizer que relações essas grandezas representam.

b) Organizar as informações de cada relação de tal forma que outras pessoas possam compreender.

Observações para o professor: Nessa fase, com base nas apresentações, serão identificadas as relações e respectivas grandezas das situações trazidas por cada dupla. De acordo com a entrevista, os alunos deverão responder aos questionamentos a seguir.

III. Responder aos seguintes questionamentos a respeito das informações obtidas na entrevista:

1) Escrever em linguagem corrente como se relacionam matematicamente, os valores das grandezas.

2) Agora vamos pensar de um modo prático, o que seria uma função, não apenas em matemática, mas sim no cotidiano das pessoas. Será que esse conceito utilizado no dia a dia tem alguma relação com a matemática? Por quê?

3) Escrever uma sentença que represente a situação encontrada por você.

4) Nessa sentença que foi encontrada, as letras têm um significado, além de representarem as grandezas. Vocês conseguem descobrir qual é? A letra que está em um membro da igualdade tem a mesmo papel que a letra que está no outro membro?

5) Qual das grandezas está em função de outra, ou seja, depende de outra?

6) Alguma das variáveis pode assumir valor nulo? O que acontece?

7) Alguma variável pode assumir valor negativo? Por quê?

8) Analisar as sentenças das situações trazidas por você. Elas apresentam alguma forma geral? Qual?

Observações para o professor: é importante discutir com os alunos a respeito dos temas trazidos por eles na entrevista, vivenciados em seu cotidiano.

C – Atividades envolvendo representações gráficas de funções

Observações para o professor: apresentar aos alunos o jogo batalha naval com o objetivo de retomar conceitos como par ordenado, plano cartesiano, entre outros que sejam pertinentes para o sequenciamento do planejamento.

IV. Jogo Batalha naval (com o objetivo de rever ideias envolvendo o plano cartesiano)

Material necessário: papel quadriculado, régua, lápis, borracha e caneta colorida.

Desenvolvimento: Os alunos são dispostos em duplas. Cada um terá que desenhar no papel quadriculado um plano cartesiano, sendo que a distância máxima da origem será cinco unidades. Cada um deverá posicionar oito objetos no plano cartesiano, dois em cada quadrante. Três objetos deverão ter quatro pontos, três objetos deverão ter três pontos e os outros dois deverão ter dois pontos. Na sequência é jogado como o jogo tradicional. Ganha o jogo quem conseguir completar a esquadra completa do outro jogador.

V. Atividades envolvendo construção manual de gráficos:

1) Construir o gráfico da situação do número de pedaços de pizza e o gráfico da situação da combinação.

2) Construir um gráfico que represente a função relacionada a uma das situações-problema obtida na entrevista.

3) É possível interpretar as situações escolhidas, ou seja, é possível compreender do que se trata cada situação após a construção do gráfico? Como?

4) Considerar o gráfico construído no item 2).

a) É possível identificar os pares ordenados dessa situação?

b) Em caso afirmativo, quais são?

c) É possível ligar os pontos dos pares ordenados? Por quê?

d) E em outras situações? Justificar sua resposta.

5) Se pudéssemos ligar os pares ordenados, que tipo de traçado teríamos?

6) Em sua opinião, para que serve o gráfico de uma função?

Observações para o professor: é importante discutir com os alunos como eles fariam para a construção do gráfico, questionando a respeito da obtenção das variáveis. nesse momento, serão abordados alguns conteúdos, podendo questionar os alunos a respeito do plano cartesiano. Discutir com os alunos se todas as funções apresentam o mesmo traçado, inclusive um exemplo de função constante. Se nenhum dos alunos levar esse exemplo, é sugerido que o professor o apresente.

VI. Tarefa extraclasse: trazer modelos de gráficos que apareceram em jornais. (Obs.: comparar e analisar os gráficos com os alunos em sala de aula).

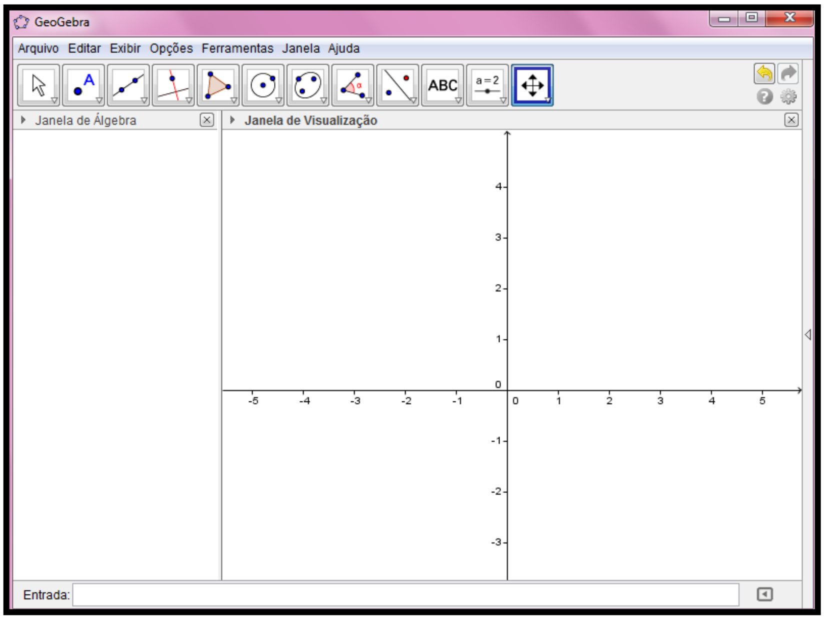
Observações para o professor: é interessante que o professor promova a discussão de gráficos estatísticos com seus alunos, com o objetivo de mostrar que os gráficos estão presentes no cotidiano das pessoas e da importância da sua interpretação. Elementos como a transmissão de informações e a autossuficiência dos gráficos são assuntos interessantes para o debate.

VII. Tarefa extraclasse: Realizar um estudo sobre o plano cartesiano, incluindo origem, construção, conceitos envolvidos e seu papel para a representação gráfica de uma função.

Observações para o professor: solicitar uma tarefa em que os alunos possam pesquisar os conceitos que envolvem o plano cartesiano é uma forma de incentivar a busca pelas informações e, posteriormente, a discussão com a turma.

Observação: nesse momento é importante realizar com os alunos uma revisão, de acordo com as discussões que ocorreram em sala de aula, como as ideias envolvendo grandezas, variáveis, função, coeficientes, gráficos e conceitos envolvidos no plano cartesiano.

VIII. Atividades envolvendo a construção de gráficos utilizando o *software Geogebra*.



Fonte: janela do *Geogebra*.

1) Observar a construção manual dos gráficos e a construção no *software*? Existe diferença entre eles? Justificar sua resposta.

2) Que traçado foi construído? E nas outras funções, que gráfico resultou?

3) O que significa quando o gráfico intercepta o eixo y? E o eixo x?

Observação para o professor: proporcionar aos alunos acesso ao *software Geogebra* para que possam perceber a sua relação com a construção manual, questionando-os sobre por que a reta intercepta os eixos.

IX. Tarefa extraclasse

1) Fazer uma pesquisa sobre os planos da empresa de telefonia utilizada por você. Tomar nota das tarifas cobradas, em ligações para a mesma ou outras operadoras.

2) Pesquisar na cidade de Passo Fundo se há opção de aluguel de carro, quais os procedimentos e valores cobrados pelo serviço.

3) Conversar com seus pais a respeito do consumo de combustível do automóvel da família.

4) Organizar as informações de tal forma que outras pessoas possam compreender.

X. Com base na pesquisa realizada por você, responder:

1) A respeito da empresa de telefonia utilizada por você.

a) Como são feitas as cobranças de ligações para outras operadoras?

b) Quanto custa uma ligação com duração de 10 minutos? E de meia hora?

c) Se determinada ligação custou R$ 14,00, qual foi a sua duração?

d) Escreva uma sentença que relacione o custo de uma ligação com sua duração.

2) A respeito da opção de aluguel de carro.

a) Qual é a sentença matemática que relaciona o preço a ser pago pelo aluguel com os dias alugados?

b) Qual será o valor a pagar se o carro for alugado por uma semana?

c) Com um valor de R$ 580,00, é possível alugar o carro por quantos dias?

3) Com base nas informações obtidas sobre o automóvel de seus pais, responda:

a) Após ter percorrido 75 quilômetros, quantos litros de gasolina ainda haverá no tanque?

b) Quais são as grandezas apresentadas?

c) Construa um gráfico para essa situação.

d) Para zerar a quantidade de gasolina no tanque, quantos quilômetros deverão ser percorridos?

4) Uma piscina possuía inicialmente 1500 litros de água e será esvaziada, para limpeza, na vazão de 20 litros por minuto[7].

a) Após 30 minutos do início do esvaziamento, quantos litros de água ainda haverá na piscina?

b) Qual é a sentença que relaciona a quantidade de água na piscina com o tempo de esvaziamento?

c) Quanto tempo levará para a piscina ser esvaziada completamente?

5) O anúncio de uma loja de instrumentos musicais informa que o preço de qualquer instrumento terá 10% de desconto no pagamento à vista[8].

a) Organize os dados com alguns valores (que você vai supor) dos instrumentos e o preço pago com desconto.

b) Qual é a sentença matemática que relaciona as duas grandezas do problema?

---

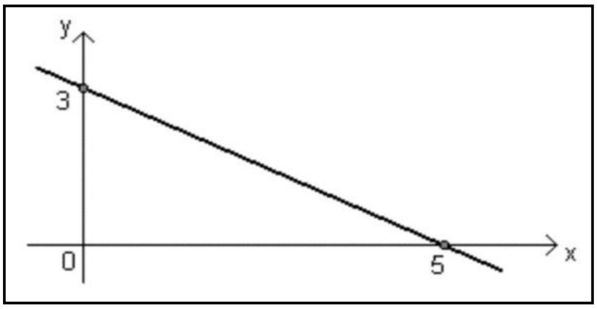
[7] Questão extraída de Araribá Plus (2014).
[8] Questão extraída de Araribá Plus (2014).

c) Quanto uma pessoa gastará se comprar um instrumento que custa R$ 700,00 e pagar à vista?

Orientações para o professor: Considere a situação a seguir. A sugestão é que seja resolvido no quadro, com a participação dos alunos e a ajuda do professor, pois pode haver dificuldades na sua resolução, por se tratar de um sistema.

XI. Determinar a lei da função dos gráficos apresentados a seguir (Obs.: auxiliar os alunos nessa atividade)[9].

a)



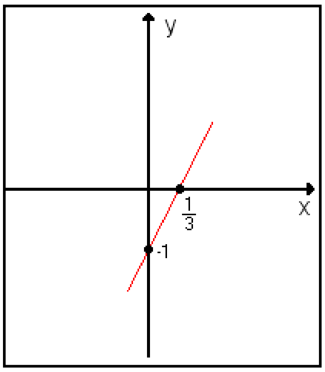
Percebemos que a reta intersecciona o eixo das abscissas em um ponto e o eixo das ordenadas em outro. O ponto no qual $x = 5$, percebemos que $y = 0$. O ponto no qual $x = 0$, percebemos que $y = 3$. Sabemos também que a forma geral de uma função de 1º grau é $y = ax + b$. Logo, vamos trocar cada um dos pontos na forma geral, obtendo duas equações:

$(5,0) \rightarrow 0 = 5a + b$ (I)

$(0,3) \rightarrow 3 = 0x + b$ (II)

Resolvendo a equação (II), obtemos $b = 3$. Substituindo o valor de b na equação (I), obtemos $a = -\frac{3}{5}$. Para escrever a forma geral para esse gráfico, utilizamos os valores encontrados para a e b: $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

b)



[9] Disponível em <http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1.php>.

Para resolver, usamos a mesma ideia da atividade anterior. Os pontos são $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $(-1{,}0)$. Substituímos os pontos na forma geral, obtendo duas equações:

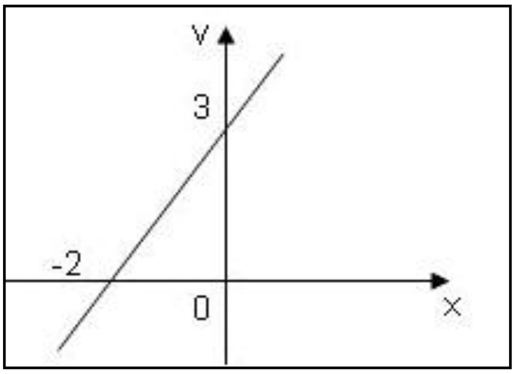
$\left(\frac{1}{3}, 0\right) \rightarrow 0 = \frac{1}{3}a + b$ (I)

$(0, -1) \rightarrow -1 = 0a + b$ (II)

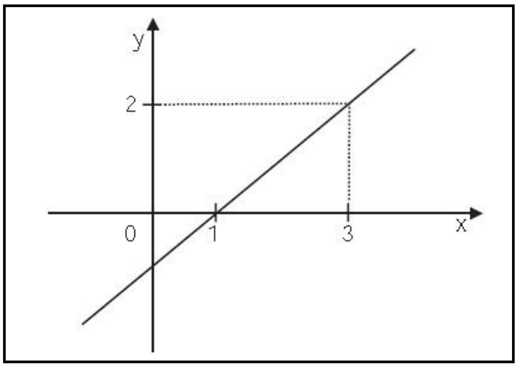
Resolvendo a equação (II), obtemos $b = -1$. Substituindo b na equação (II), obtemos $a = 3$. Assim obtemos a lei da função que está sendo representada pelo gráfico: $y = 3x - 1$.

XII. Determinar a lei de cada uma das funções a seguir. Elaborar uma situação que represente cada função[10].

a)



b)



Orientações para o professor: Nesse momento utilizar o *software Geogebra*, solicitando que os alunos considerem o gráfico de uma função e depois de observá-lo no programa, alterar os coeficientes angular e linear, a fim de perceber a mudança de comportamento do gráfico, ou seja, qual é a função de cada coeficiente.

[10] Disponível em <http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=194>.

XIII. Utilizar o *Geogebra* e seguir as instruções a seguir.

1) Considerar a função $y = x + 1$.

a) Construir seu gráfico.

b) Na mesma janela, construir o gráfico da função alterando o coeficiente linear para – 1.

c) Ainda na mesma janela, construir o gráfico da função com o coeficiente linear 2.

d) Analisando os três gráficos construídos, o que é observado em relação aos três gráficos?

2) Sejam as funções $y = x + 1$ e $y = -x + 1$.

a) Construir o gráfico de cada função na mesma janela.

b) Descreva o comportamento desses dois gráficos.

3) Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $y = x$

b) $y = 2x$

c) $y = 4x$

4) O que você observa entre os gráficos dessas três funções e os gráficos das funções anteriores? Observando as atividades 1, 2 e 3, o que podemos concluir?

Observações para o professor: nesse momento discutir com os alunos a respeito do papel que cada coeficiente exerce no momento que seus valores são alterados e representados no plano cartesiano.

XIX. Tarefa extraclasse

1) Pesquisar na cidade qual é a tarifa cobrada pelos taxistas, perguntando inclusive se todos eles cobram o mesmo valor, de bandeirada e por quilômetro rodado.

2) Pesquisar em algum estacionamento da cidade quais são as condições para deixar o carro em um determinado período: valores, fixo e por tempo.

3) Organizar as informações de tal forma que outras pessoas possam compreender.

Orientações para o professor: discutir com a turma as informações trazidas e solicitar que os alunos escrevam a sentença matemática que relaciona as grandezas.

XX. Atividades envolvendo a tarefa extraclasse.

1) Construir o gráfico da função identificada na tarefa extraclasse. É possível ter valores negativos, para alguma das grandezas? Por quê?

2) Comparar a sentença referente ao problema do táxi com as outras duas: uma das situações trazida por você e o problema da pizza. Existe alguma semelhança ou diferença? Justificar.

3) O que é um valor constante?

4) É possível construir um gráfico com valores constantes para o eixo das abscissas ou para o eixo das ordenadas? Exemplificar.

5) Pesquisar em um dicionário matemático e em livros didáticos o que é função afim e função linear. Descrever suas características.

6) Uma função afim pode ser chamada de função linear? E uma função linear pode ser chamada de função afim? Justificar suas respostas.

7) Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 750,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão 9% do total de vendas que ele faz durante o mês[11].

a) Escrever a equação que represente o salário mensal desse vendedor.

b) Calcular o salário do vendedor, sabendo que nesse mês ele vendeu R$60000,00 em produtos.

c) Considerando que, num determinado mês, o salário do vendedor foi de R$1380,00, determinar o valor das vendas efetuadas por ele nesse mês?

8) Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156 kg, decide ir a um *spa* que anuncia perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Supondo que isso realmente ocorra[12]:

a) Encontrar uma fórmula que relacione as grandezas do problema.

b) Calcular o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no *spa* para sair de lá com menos de 120 kg.

9) Construir o gráfico das funções das questões 7 e 8. Que traçado aparece nos gráficos?

10) Escrever um pequeno texto com as ideias apresentadas até aqui sobre função de 1º grau.

Observações para o professor: é importante que os alunos pesquisem em materiais como dicionário matemático e livros didáticos termos como função linear, função afim e função

[11] Questão extraída de Bonjorno (2006).
[12] Questão extraída de Bonjorno (2006).

constante. É interessante também que os alunos realizem um pequeno texto unindo todas as informações relacionadas com função estudadas até o momento.

XXI. Atividades envolvendo o *Geogebra*

1) Considerar a função $y = 2x + 1$.

a) Construir seu gráfico.

b) De acordo com o gráfico, a função é crescente ou decrescente? Justificar.

c) Para quais valores de x temos $y = 0$, $y > 0$ e $y < 0$?

2) Seja a função $y = -2x + 1$.

a) Construir seu gráfico.

b) De acordo com o gráfico, a função é crescente ou decrescente? Justificar.

c) Para quais valores de x temos $y = 0$, $y > 0$ e $y < 0$?

3) Sejam as funções $y = 3x$.

a) Construir seu gráfico.

b) De acordo com o gráfico, a função é crescente ou decrescente? Justificar.

c) Para quais valores de x temos $y = 0$, $y > 0$ e $y < 0$?

4) Sejam as funções $y = -\,3x$.

a) Construir seu gráfico.

b) De acordo com o gráfico, a função é crescente ou decrescente? Justificar.

c) Para quais valores de x temos $y = 0$, $y > 0$ e $y < 0$?

Observações para o professor: Nesse momento, realizar uma discussão com todos os alunos, observando os gráficos construídos no *Geogebra*. Incentivar os alunos a chegarem às conclusões sozinhos, fazendo a análise do gráfico.

XXII. Atividades de retomada do conteúdo

1) Responda as questões envolvendo o quadro a seguir.

X	Y
1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

6	...
7	12
8	...
...	

a) Quando x é 2, qual é o valor de y?

b) Quando x é 6, qual é o valor de y?

c) Quando x é 8, qual é o valor de y?

d) Quando x for 800, qual será o valor de y?

e) Escreva, com suas palavras, a regra que leva cada x no y correspondente.

f) Escreva agora essa regra, usando apenas letras e números.

2) Um vendedor trabalha à base de comissão. Assim, seu ganho mensal y depende do total x de vendas que ele realiza durante o mês. Sabendo-se que esse vendedor recebe 15% do total que vende, qual é a lei de formação da função estabelecida entre essas duas grandezas?

3) Um vendedor trabalha à base de comissão. Assim, seu ganho mensal y depende do total x de vendas que ele realiza durante o mês. Sabendo-se que esse vendedor recebe 15% do total que vende, qual é a lei de formação da função estabelecida entre essas duas grandezas?

4) Em um retângulo de comprimento 50 unidades, a área é dada em função da largura x. Nessas condições:

a) Escreva a lei de formação que define a função que relaciona essas duas grandezas?

b) Qual será a área do retângulo, se a largura for 16,5 unidades?

c) Se um retângulo tiver 1800 unidades de área, qual será a largura?

5) Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais por mês. Escreva uma sentença matemática que relaciona a quantia que o professor vai receber por mês com o número de aulas ministradas.

6) Um carro se movimenta em velocidade constante, segundo a sentença matemática $y = 2x + 1$,em que y representa a posição, em metros, do carro no instante x, em segundos. Construir, no plano cartesiano, o gráfico da posição do carro em função do tempo.

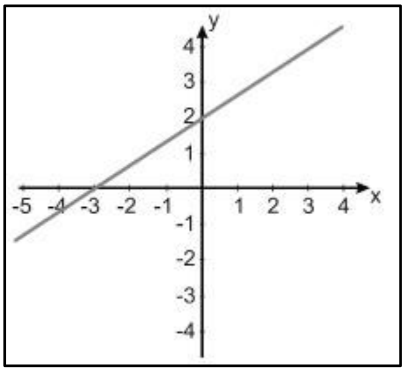
7) Construir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = 3x - 2$ e $y = 2x - 1$. Observando o gráfico, quais são as coordenadas do ponto de encontro das duas retas?

8) De acordo com a tarifa cobrada por taxistas, pesquisada por você, responder.

a) Quanto custará uma corrida de 16 km?

b) Quantos quilômetros serão percorridos com R$ 26,80?

9) De acordo com o gráfico a seguir, responder as perguntas:



Fonte: *Geogebra*.

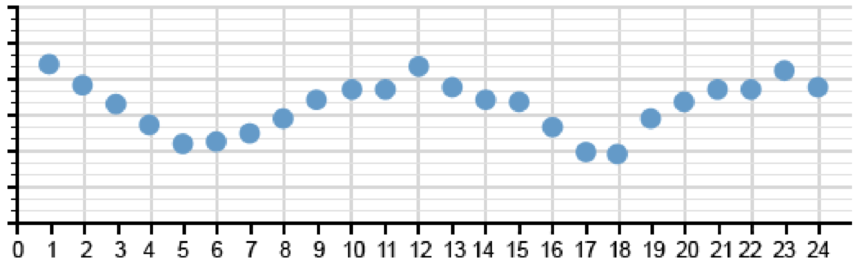
a) Determinar a lei da função.

b) Para qual valor real de x temos y = 0?

c) Para quais valores reais de x vamos ter valores positivos para y?

d) Para quais valores reais de x vamos ter valores negativos para y?

10) Este gráfico não tem título nem legenda para os eixos[13].



[13] Questão extraída de Ribeiro e Cury (2015).

Qual título do gráfico e legendas dos eixos se ajustam melhor aos dados acima?

a) Título: Mudança na quantidade de carvão restante em uma mina em atividade.
   Eixo dos x: Tempo (em meses).
   Eixo dos y: Quantidade de carvão restante.

b) Título: Mudança na temperatura máxima mensal de uma cidade.
   Eixo dos x: Tempo (em meses).
   Eixo dos y: Temperatura máxima mensal.

c) Título: Mudança na massa corporal de um bebê saudável.
   Eixo dos x: Tempo (em meses).
   Eixo dos y: Massa corporal

d) Título: Mudança na temperatura de uma xícara de café quente.
   Eixo dos x: Tempo (em horas).
   Eixo dos y: Temperatura

Observações para o professor: as situações apresentadas na revisão auxiliam o professor para saber se os significados desenvolvidos foram apropriados pelos alunos. A seguir, a avaliação individual, na qual são apresentadas situações envolvendo os conceitos estudados em aula com os alunos.

REFERÊNCIAS

AMARAL, Heloísa. *Turbinando 6* – sequência didática. Disponível em: <http://escrevendoofuturo.blogspot.com.br/2007/10/seqncia-didtica-e-ensino-de-gneros.html>. Acesso em: 8 jun. 2015.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari K. *Investigação qualitativa em educação*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1991.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 23-37.

BORBA, Marcelo; ARAÚJO, Jussara de L. (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*: notas introdutórias. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

CARAÇA, Bento de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

COLL, César; COLOMINA, Rosa; ONRUBIA, Javier; ROCHERA, Maria J. Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de lós mecanismos de influencia educativa. In: BERROCAL, Pablo F.; ZABAL, Mª. Ángeles Melero (Comps.). *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI, 1995.

DEMANA, Franklin; LEITZEL, Joan. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michèle; SCHNEUWLY, Bernard. Seqüências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. *Gêneros orais e escritos na escola*. Tradução Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro (Orgs.). Campinas: Mercado das Letras, 2004.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara (Org). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representações semióticas. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-34.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e o pensamento humano*: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

ESCOLA ST. PATRICK. *Proposta pedagógica*. Disponível em < http://www.escolastpatrick.com.br/index.php/homepage/a-escola>. Acesso em: 16 fev. 2016.

FRISKE, Joyce S. Uso de *softwares* de computação gráfica no ensino de álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 23-37.

GATTI, Bernardete; ANDRÉ, Marli. A relevância dos métodos de pesquisa qualitativa em Educação no Brasil. In: WELLER, Wivian; PFAFF, Nicolle. (Orgs.). *Metodologias da pesquisa qualitativa em Educação*. Petrópolis: Vozes, 2010.

GAUTHIER, Clermont, et al. *Por uma teoria da pedagogia*: pesquisas sobre o saber docente. Tradução Franscisco Pereira. 3. ed. Ijuí: Unijuí, 2013.

GRANDO, Neiva Ignês; MARASINI, Sandra Mara. *Educação Matemática*: a sala de aula como espaço de pesquisa. 2. ed. Passo Fundo: Editora Universidade de Passo Fundo, 2014.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Maria Lucila. *A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados*. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/niee/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, 1*: Conjuntos, funções: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 104-110.

LINZ, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARKOVITS, Zvia; EYLON, Bat Sheva; BRUCKHEIMER, Maxim. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 49-69.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). O desafio da pesquisa social. In: ____. *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2010. p. 9-29.
NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes médicas, 1997.

PALANGANA, Isilda Campaner. *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky*: (a relevância do social). 3. ed. São Paulo: Summus, 2001.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POST, T. BEHR, M., LESH, R. A Proporcionalidade e o Desenvolvimento de Noções Pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 89-103.

RIBEIRO, Alessandro; CURY, Helena N. Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

SANTOS, Charles Max Sudério Cavalcanti dos. *Modelagem matemática como ambiente de aprendizagem de conteúdos algébricos no 9º ano do Ensino Fundamental*. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

SANTOS, Rita de Cássia Viegas dos. *Equações no contexto de funções*: uma proposta de significação das letras no estudo da álgebra. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SCHÖNARDIE, Belissa. *Modelagem matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental*. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SECKLER, Daiana Moraes. *O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do Ensino Fundamental*: um trabalho com situações do cotidiano. 2010. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.

SOCAS, Martin M.; CAMACHO, Matias; PALAREA, Maria M.; HERNÁNDEZ, Josefa. *Iniciación al Álgebra*: matematicas, cultura y aprendizaje. Madrid: Ed. Síntesis, 1996.

TUDGE, Jonathan; ROGOFF, Barbara. Influencias entre iguales en el desarrollo cognitivo: perspectivas piagetiana y vygotskiana. In: BERROCAL, Pablo Fernández; ZABAL, Mª. Ángeles Melero (Comps.). *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI, 1995.

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. *Pensamento e linguagem*. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. p. 23-37.

WALLE, John V. de. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Autorização da escola para a realização do projeto de pesquisa.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, ____,
RG n° _______________________________________, diretora da Escola
____, no direito das minhas atribuições, autorizo a pesquisadora Tauana Bianchetti, RG n° 9102052215, aluna do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo/UPF, a produzir dados empíricos a partir da aplicação de uma proposta didático-pedagógica relacionada à educação algébrica, com uma turma do Ensino Fundamental desta instituição de ensino. A proposta fará parte da Dissertação de Mestrado da referida aluna, sob orientação da professora doutora Neiva Ignês Grando, cujo objetivo é investigar o processo ensino-aprendizagem de conceitos algébricos no Ensino Fundamental.

Estou ciente, também, de que a identidade de cada aluno será preservada e sua participação na pesquisa tem caráter voluntário, reservando-lhes o direito de participar ou não, sem por isso ficar sujeito a prejuízo de qualquer natureza.

E, por ser verdade, firmamos o presente.

Passo Fundo, 08 de outubro de 2014.

____

Diretora da Escola

APÊNDICE B – Documento enviado aos pais - autorização de participação dos alunos no projeto de pesquisa.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

SENHORES PAIS OU RESPONSÁVEIS

Seu(ua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar da pesquisa sobre educação algébrica no Ensino Fundamental, de responsabilidade da pesquisadora Tauana Bianchetti.

Esta pesquisa justifica-se devido ao ensino que nossos alunos estão recebendo em sala de aula, que se mostra ineficaz quando observamos resultados de avaliações realizadas no Brasil.

O objetivo geral dessa pesquisa é investigar o desempenho dos alunos após um trabalho de investigação matemática envolvendo equações e funções de 1º e 2º graus, percebendo se os alunos compreenderam de forma clara o conteúdo proposto.

A participação de seu(ua) filho(a) na pesquisa será nos períodos de matemática, no turno da manhã.

Algumas informações serão gravadas, transcritas e posteriormente destruídas. A identificação ficará em sigilo. Os resultados da pesquisa serão divulgados na forma de Dissertação e/ou de artigos, sempre com a garantia do sigilo e da confidencialidade dos dados.

A participação de seu(ua) filho (a) nessa pesquisa não é obrigatória e você pode desistir a qualquer momento, retirando seu consentimento.

Você terá a garantia de receber esclarecimentos sobre qualquer dúvida relacionada à pesquisa e poderá ter acesso aos dados em qualquer etapa do estudo, basta entrar em contato com a pesquisadora.

Caso você tenha dúvidas sobre o comportamento da pesquisadora ou sobre as mudanças ocorridas na pesquisa que não constam no TCLE, e caso se considerar prejudicado(a) na sua dignidade e autonomia, pode entrar em contato com a pesquisadora Tauana Bianchetti pelo telefone (54) 91248467, com o Curso de Mestrado da UPF, ou também pode consultar o Comitê de Ética em Pesquisa da UPF pelo telefone (54) 3316 8157.

Dessa forma, se você concorda em participar da pesquisa como consta nas explicações e orientações acima, coloque seu nome no local indicado abaixo.

Desde já, agradecemos a sua colaboração e solicitamos a sua assinatura de autorização neste termo, que será também assinado pelo pesquisador responsável em duas vias, sendo que uma ficará com você e outra com o (a) pesquisador (a).

Passo Fundo, ____ de ____ de ____.

Nome do (a) participante: ______________________________________

Assinatura: ____

Nome do (a) pesquisador (a): ______________________________________

Assinatura: ____

APÊNDICE C – Avaliação individual

Nome: ____ Data: __/__/____

1) Duas amigas saem de férias no mesmo período e decidem alugar um carro para fazer uma viagem. O aluguel corresponde a um valor fixo de R$ 20,00, mais R$ 80,00 por dia[14].

a) Quais são as grandezas envolvidas no problema?

b) Escrever a lei da função que relaciona as grandezas citadas no item anterior.

c) Qual será o valor a pagar se elas alugarem o carro por uma semana?

d) Se ela reservaram R$ 340,00 para esse gasto, poderão alugar o carro por quantos dias?

e) Classificar essa função, de acordo com os três tipos abordados em aula: afim, linear e constante. Justificar.

2) Fábio comprou um celular pós-pago. Ele para R$ 50,00 por um plano mensal com direito a 100 minutos de conversação, mais um taxa de R$ 0,60 por minuto excedente[15].

a) Qual será o valor de sua conta mensal se o tempo de conversação acumulado for de 115 minutos?

b) Sabendo que Fábio pagou R$ 110,00 em determinado mês, qual foi o tempo de conversação acumulado nesse mês?

c) Determine a lei da função que relaciona as duas grandezas envolvidas no problema.

d) Determine a variável dependente e a independente do problema, caracterizando cada uma delas.

3) Joice tinha alguns quadrados feitos de cartolina, com lado medindo 10 cm. Ela recortou os cantos das cartolinas, retirando quatro quadradinhos congruentes de cada uma[16].

a) Qual é o perímetro da figura se $x = 1$? E se $x = 3$? (Obs.: faça uma representação).

b) Qual é o perímetro se x for igual a 4?

c) O perímetro está em função de x? Justificar.

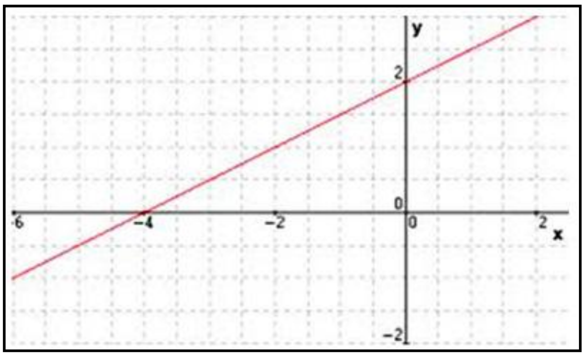
d) Escrever a lei de formação dessa função.

e) Classificar essa função, justificando sua resposta.

---

[14] Questão extraída de Araribá plus (2014).
[15] Questão extraída de Araribá plus (2014).
[16] Questão extraída de Araribá plus (2014).

4) Determinar a lei da função correspondente ao gráfico abaixo.



5) Em cada função a seguir, construir seu gráfico e determinar:

a) o valor real de x quando temos y = 0.

b) Os valores reais de x quando temos valores positivos para y.

c) Os valores reais de x quando temos valores negativos para y.

d) Se a função é crescente ou decrescente, justificando.

I. $y = -1 - 2x$ II. $y = \frac{1}{2}x$ III. $y = 5$

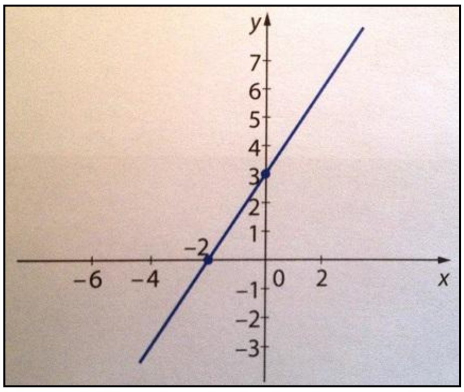
6) A fórmula $S = (n-2) \cdot 180°$ fornece a soma dos ângulos internos de um polígono convexo em função do número n de lados. Construindo o gráfico dessa função, obtemos um gráfico que[17]:

a) intercepta o eixo x.

b) Intercepta o eixo y.

c) É formado por pontos alinhados.

7) (Cescem-SP). A figura representa a função $y = ax + b$.



O valor da função no ponto $x = -\frac{1}{3}$ é[18]:

a) 2,8 b) 2,6 c) 2,5 d) 1,8 e) 1,7

[17] Questão extraída de Araribá plus (2014).
[18] Questão extraída de Araribá plus (2014).

ANEXOS

Anexo A – Parecer do comitê de ética

UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO/ PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Educação Algébrica no Ensino Fundamental
Pesquisador: Tauana Bianchetti
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 45733314.0.0000.5342
Instituição Proponente: Universidade de Passo Fundo/Vice-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 1.121.402
Data da Relatoria: 24/06/2015

Apresentação do Projeto:
Trata-se de uma dissertação de mestrado que pretende analisar se a utilização da investigação matemática no estudo de equações e funções de 1º e 2º graus pode ser útil no desenvolvimento da compreensão dos alunos neste conteúdo. Para tanto, apresenta uma sequência didática e utiliza-se da investigação matemática para verificar se tal procedimento é eficaz no ensino de equações e funções de 1º e 2º graus. Para realizar esta pesquisa, será feito um levantamento teórico acerca dos estudos sobre resolução de problemas. Após o levantamento teórico, será elaborada uma sequência didática que será desenvolvida com os alunos e os resultados do desempenho avaliados pelo grau de participação e de compreensão no desenvolvimento das operações. As análises serão feitas pelos registros dos desempenhos e através das gravações de vídeos.

Objetivo da Pesquisa:
Investigar o desempenho dos alunos após um trabalho de investigação matemática envolvendo equações e funções de 1º e 2º graus, percebendo se os alunos compreenderam de forma clara o conteúdo proposto.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
O projeto não apresenta riscos e os benefícios são as aprendizagens dos alunos e o melhor desempenho pedagógico do professor.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
O projeto apresenta um tema bem definido e o procedimento metodológico adequado. Sugere-se, apenas, um esclarecimento mais detalhado sobre os procedimentos de registro e de análise das gravações que serão realizadas.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
Os direitos fundamentais do(s) participante(s) foi(ram) garantido(s) no projeto e no TCLE. O protocolo foi instruído e apresentado de maneira completa e adequada. Os compromissos do (a) pesquisador (a) e das instituições envolvidas estavam presentes.

Recomendações:
Após o término da pesquisa, o CEP UPF solicita:
a) A devolução dos resultados do estudo aos sujeitos da pesquisa ou a instituição que forneceu os dados;
b) Enviar o relatório final da pesquisa, pela plataforma, utilizando a opção, no final da página, "Enviar Notificação" + relatório final.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
Diante do exposto, este Comitê, de acordo com as atribuições definidas na Resolução n. 466/12, do Conselho Nacional da Saúde, Ministério da Saúde, Brasil, manifesta-se pela aprovação do projeto de pesquisa na forma como foi proposto.

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

Considerações Finais a critério do CEP:

Endereço: BR 285- Km 292 Campus I - Centro Administrativo
Bairro: Divisão de Pesquisa / São José **CEP:** 99.052-900
UF: RS **Município:** PASSO FUNDO
Telefone: (54)3316-8157 **E-mail:** cep@upf.br

PASSO FUNDO, 24 de Junho de 2015

Assinado por:
Nadir Antonio Pichler
(Coordenador)

Endereço: BR 285- Km 292 Campus I - Centro Administrativo
Bairro: Divisão de Pesquisa / São José **CEP:** 99.052-900
UF: RS **Município:** PASSO FUNDO
Telefone: (54)3316-8157 **E-mail:** cep@upf.br