

UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

Elisandra Picinin

O ESTUDO DE PRISMAS A PARTIR DA
UTILIZAÇÃO DO MODELO VAN HIELE EM
UM CONTEXTO DE APRENDIZAGEM
BASEADA EM PROBLEMAS COM APOIO DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS

Passo Fundo

2020

Elisandra Picinin

O ESTUDO DE PRISMAS A PARTIR DA
UTILIZAÇÃO DO MODELO VAN HIELE EM
UM CONTEXTO DE APRENDIZAGEM
BASEADA EM PROBLEMAS COM APOIO DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Geociências, da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do professor Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

Passo Fundo

2020

CIP – Catalogação na Publicação

P953e Picinin, Elisandra

O estudo de prismas a partir da utilização do modelo Van Hiele em um contexto de aprendizagem baseada em problemas com apoio das tecnologias digitais / Elisandra Picinin. – 2020.

102 f. : il. color ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Canabarro Teixeira.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Passo Fundo, 2020.

1. Inovações educacionais. 2. Teoria de Van Hiele. 3. Tecnologia educacional. 4. Aprendizagem.
5. Geometria - Estudo e ensino. I. Teixeira, Adriano Canabarro, orientador. II. Título.

CDU: 372.851

Catalogação: Bibliotecária Jucelei Rodrigues Domingues - CRB 10/1569

Elisandra Picinin

O ESTUDO DE PRISMAS A PARTIR DA
UTILIZAÇÃO DO MODELO VAN HIELE EM
UM CONTEXTO DE APRENDIZAGEM
BASEADA EM PROBLEMAS COM APOIO DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS

A banca examinadora abaixo, em 25 de junho de 2020, APROVA a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial de exigência para obtenção de grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na linha de pesquisa Tecnologias de informação, comunicação e interação aplicadas ao ensino de Ciências e Matemática.

Dr. Adriano Canabarro Teixeira – Orientador
Universidade de Passo Fundo

Dra. Sílvia de Oliveira Kist
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo

RESUMO

Devido aos problemas no processo de ensino e aprendizagem no conteúdo de Geometria, o professor precisa propor estratégias e metodologias que instiguem e incentivem a curiosidade dos alunos. Para tanto, é fundamental compreender como funciona o desenvolvimento do pensamento geométrico, o raciocínio lógico-matemático e a capacidade da elaboração de conceitos sistematizados. Atualmente, as práticas docentes têm sido continuamente questionadas em decorrência de vários fatores, em especial, a desconsideração das demandas dos alunos, do mundo globalizado, tecnológico e de abundância de informações e, até mesmo, por despreparo do próprio professor com relação a propostas metodológicas diferenciadas. Neste contexto surge a questão de pesquisa sobre a qual este texto se dedica: Qual é a influência das metodologias ativas e das tecnologias digitais para o desenvolvimento do conteúdo de Prismas em alunos do Ensino Médio? Diante deste contexto, busca-se apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem que sirva como recurso didático para uma formação crítica, criativa e reflexiva do educando. Por meio de uma revisão bibliográfica, foi explorada as possibilidades das metodologias ativas associadas a recursos tecnológicos para o aprendizado de geometria. Essa dissertação também vem acompanhada de um Produto Educacional criado a partir das premissas teóricas desta dissertação e aplicado junto a um grupo de estudantes do Ensino Médio. Para os registros da atividade prática, foram utilizados os diálogos, informações e anotações do diário de bordo realizado pelos alunos bem como o diário de bordo desenvolvido pela pesquisadora. Verificou-se através da aplicação da sequência didática, com a utilização do Modelo de Van Hiele, o processo de elevação do nível de pensamento geométrico dos alunos. Para isso, foi considerado o desenvolvimento das atividades propostas e a evolução dos alunos no decorrer da aplicação da mesma. A pesquisa apresentada foi de abordagem quantitativa e qualitativa e de intervenção pedagógica. Pode-se concluir, portanto, baseado nas experiências de Van Hiele, que após a aplicação do produto educacional, os alunos pesquisados evoluíram significativamente o seu nível de Pensamento Geométrico. Também foi evidenciado que a utilização da Metodologia Ativa PBL e as tecnologias digitais possibilitaram além de um aprendizado participativo e criativo uma alternativa bem sucedida para o aprendizado do conteúdo de Prisma. Essa dissertação acompanha um Produto Educacional disponível em <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/581810>>.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico. Prismas. Teoria Van Hiele. Metodologias Ativas. Tecnologias digitais.

ABSTRACT

Due the problems in teaching and learning process in Geometry content, the teacher needs to propose strategies and methodologies that instigate and encourage student's curiosity. Therefore, it is essential understand how the development of geometric thinking works, logical-mathematical reasoning and the capacity to elaborate systematized concepts. Currently, teaching practices have been continuously questioned in consequence of several factors, in particular, disregarding student's demands, globalized, technological world and abundance information and even due to the teacher's own lack unpreparedness methodological regarding different methodological. In this sense, the research question that this text is dedicated: What is the influence of active methodologies and digital Technologies for the development of Prisms content in high school students? Before this context, seeks to present a teaching and learning proposal that serves as a didactic resource for a critical, creative and reflective education of the student. Through a biographical review, it is intended to explore the possibilities of active methodologies associated with technological resources for learning geometry. This dissertation is also comes with an Education Product created from theoretical premises of this dissertation and applied to a group of high school students. For the records of practical activity, were used dialogues, information and notes from the logbook made by students as well as the logbook developed by the researcher. It was verified through the application of the didactic sequence, using the Van Hiele model, the process of raising the student's level of geometric thinking. For that, it was considered the development of the proposed activities and evolution that the students presented during the application of the same. The research presented was a qualitative and quantitative approach and intervention. Can be concluded, therefore based on the experiences Van Hiele, that after the application of the educational product, students researchers have significantly evolved their level of Geometric Thinking. Also it was evidenced that the use of the Active PBL Methodology and digital technologies made possible besides a participative and creative learning, a successful alternative for learning Prism content. This dissertation accompanied an Educational Product available in <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/581810>>.

Keywords: Geometric thinking. Prisms. Van Hiele theory. Active methodologies. Digital technologies.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 - Pirâmide de Aprendizagem.....	42
Figura 2 - Gráfico da Análise da Avaliação Diagnóstica.	64
Figura 3 - Gráfico do Pós Teste.....	79

LISTAS DE QUADROS

Quadro 1 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.	26
Quadro 2 - Trabalhos Selecionados Pesquisa de Campo.	52
Quadro 3 - Pesquisa Educativa.	59
Quadro 4 - Procedimentos Pesquisa Intervenção.	61
Quadro 5 - Classificação do Nível de Pensamento Geométrico.	67
Quadro 6 - Resultado do Teste diagnóstico por aluno.	68
Quadro 7 - Situações Problemas.	73
Quadro 8 - Resultado do Pós Teste por aluno.	80
Quadro 9 - Comparando o Nível do Pensamento Geométrico - Pré Teste X Pós Teste.	81

LISTAS DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ApC	Aprendizagem pelos Colegas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IFSP	Instituto Federal de São Paulo
MAT/UnB	Matemática Universidade de Brasília
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PBL	Aprendizagem Baseada em Problemas
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPP	Projeto Político Pedagógico
SAI	Sala de Aula Invertida
TDIC	Tecnologia Digitais de Informação e Comunicação
UPF	Universidade de Passo Fundo
UERR	Universidade Estadual de Roraima
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFCA	Universidade Federal de Cariri

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO	15
2.1	Falando de Geometria.....	16
2.2	O Ensino da Geometria Plana	20
2.3	O Ensino da Geometria Espacial	22
2.4	Teoria de Van Hiele: Desenvolvimento do Pensamento Geométrico	25
2.4.1	<i>Fases do aprendizado de Van Hiele.....</i>	<i>27</i>
2.5	Tendências Metodológicas para o Ensino de Geometria	28
2.5.1	<i>BNCC, a Matemática e suas tecnologias</i>	<i>32</i>
3	METODOLOGIAS ATIVAS.....	35
3.1	Metodologias Ativas: alguns conceitos fundamentais.....	36
3.1.1	<i>Papel do docente</i>	<i>37</i>
3.1.2	<i>Papel do discente.....</i>	<i>40</i>
3.2	Metodologias Ativas: corrente teórica.....	42
3.3	Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL com a utilização de tecnologias digitais.....	46
3.4	Breve estudo do que já foi trabalhado.....	50
3.5	Produto educacional.....	53
4	APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DE RESULTADOS	55
4.1	Dados da Escola e da Turma	56
4.2	A pesquisa	58
4.3	Análise dos Resultados.....	62
4.3.1	<i>Primeiro Encontro: 18/11/2019.....</i>	<i>63</i>
4.3.1.1	<i>Análise: Avaliação diagnóstica</i>	<i>64</i>
4.3.1.2	<i>Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas</i>	<i>68</i>
4.3.2	<i>Segundo Encontro: 19/11/2019.....</i>	<i>75</i>
4.3.2.1	<i>Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas</i>	<i>76</i>
4.3.3	<i>Terceiro Encontro: 20/11/2019.....</i>	<i>77</i>
4.3.3.1	<i>Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas</i>	<i>77</i>
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	82

REFERÊNCIAS	87
APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica.....	93
APÊNDICE B - Avaliação final.....	96

1 INTRODUÇÃO

É notório o quanto a Matemática evoluiu e continua a evoluir no decorrer dos séculos, mas, ainda há profissionais que estão presos a uma Matemática voltada a procedimentos convencionais. Sabe-se que a Matemática sempre esteve presente no contexto histórico cultural, desde os tempos mais remotos. A mesma foi incluída e continua a ser fundamental, em função das necessidades da humanidade. Então, porque ensinar Matemática da mesma maneira, se os tempos mudaram e as suas necessidades, consequentemente, são outras?

Hoje, os alunos apresentam sede de saber, vontade de aprender, mas, muitas vezes, os educadores sufocam essas vontades. O simples fato de como a Matemática é tratada nas escolas acarreta esse desestímulo, que é considerado desafio para quem deseja aprender Matemática.

Professores precisam encontrar estratégias que motivem os alunos a desenvolver as habilidades necessárias para o mundo do trabalho e suas práticas diárias. Os professores devem apresentar aos alunos uma Matemática voltada ao contexto em que os educandos estão inseridos. Uma Matemática que não pretende resolver situações desconexas ao seu dia a dia. Uma Matemática que desenvolva o raciocínio lógico, o pensamento independente e a criatividade dos educandos.

Além de aproximar a Matemática teórica da sala de aula à prática do dia a dia, os professores têm um desafio ainda maior, que é desenvolver nos alunos o gosto pela busca, o querer aprender e se desafiar, tornando os alunos sujeitos críticos e protagonistas no processo de aprendizagem.

Conforme a BNCC (2019):

Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo (BNCC, 2019, p. 463).

Nesse sentido, o desafio de ensinar Matemática fica ainda mais evidenciado. Não se pode apenas repassar conteúdos, conceitos, “construir saberes”. Precisa-se criar condições e

situações onde o aluno seja, de fato, protagonista do processo de aprendizagem. Assim, garante-se aos jovens uma aprendizagem sólida, interpretativa e argumentativa, que lhes permitam tomar decisões e enfrentar os desafios da atualidade.

Nesta perspectiva, este trabalho apresenta uma proposta de pesquisa que envolve tanto as influências das Metodologias Ativas quanto das Tecnologias Digitais para o desenvolvimento do conteúdo de Prisma para com alunos do Ensino Médio, aliando tudo isso ao modelo de Van Hiele.

Justifica-se a escolha do conteúdo de Prisma, devido o mesmo estar presente de forma notória no nosso dia a dia. De fato, esse conteúdo pode não apresentar tantos elementos a ser estudado, mas é de grande importância para a interação dos indivíduos com o seu meio, para que eles possam compreendê-lo, adequá-lo e modificá-lo.

Conforme os PCNs do Ensino Médio:

as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (PCNs Ensino Médio - Parte III, 2000, p. 44).

Como docente há vinte anos no Ensino Fundamental e Ensino Médio, ao trabalhar com alunos do 3º Ano do Ensino Médio, de uma escola do estado de Santa Catarina, município de Maravilha, percebo¹ que os mesmos apresentam dificuldades na visualização de situações geométricas. Isso implica que, sem tais habilidades, é praticamente impossível desenvolver qualquer trabalho em Geometria.

A Geometria é considerada a área da Matemática mais voltada à realidade, pois sua aprendizagem é favorecida pela visualização, pela construção e pelo raciocínio. Conforme Freudenthal (1973), a Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender a Matemática voltada a realidade. Segundo ele, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta.

Conforme os PCNs do terceiro e quarto ciclo, as atividades de Geometria possuem articulação entre os três domínios: o espaço físico; as figuras geométricas; e as representações gráficas. Para que o aluno compreenda a importância e a necessidade de legitimar as hipóteses que lhe são propostas, o professor precisa construir, conjuntamente, um caminho a partir de experiências concretas.

¹ Em algumas partes da Introdução, opta-se por utilizar a primeira pessoa do singular, por se tratar de descrição de aspectos e experiências pessoais da autora dessa pesquisa.

Corroborando com o que os PCNs propõem no ponto anterior, Kaleff (2003) e Montenegro (2005), apontam que as dificuldades na aprendizagem de Geometria estão diretamente relacionadas à representação, visualização e compreensão de suas propriedades com o cotidiano.

A escola apresenta consideráveis dificuldades em criar elos entre teoria e prática no Ensino de Geometria. Essa aproximação da teoria com a prática é considerado de fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem, como mecanismo motivador e desafiante.

Na atual conjuntura, o professor precisa inovar, criar expectativas e desafiar o aluno na busca do conhecimento. Hoje, com o mundo da tecnologia e da informação, os alunos possuem acesso a vários recursos que podem auxiliar e potencializar o aprendizado. Então, é preciso utilizar isso a favor do professor, dispondo desses recursos para tornar a prática de sala de aula agradável e prazerosa, a fim de formar cidadãos com saberes indispensáveis para a sua inserção no mercado de trabalho.

Ensinar Matemática para o aluno contemporâneo é um tanto desafiador. Os exercícios corriqueiros não despertam mais o interesse e a atenção. É preciso mudar de estratégia, inovar, criar e oportunizar o protagonismo aos alunos. Deve-se estar em constante busca de conhecimento, métodos e formas de ensinar, que sejam motivadores e desafiantes. Assim procedendo, pensa-se em fazer com que o aluno compreenda a realidade em que ele faz parte, situando-o nela para poder interpretá-la e contribuir na sua transformação.

Ensinar hoje, mais do que nunca, não é uma tarefa fácil. Prender a atenção e instigar o interesse dos alunos é muito difícil. O professor e a escola competem com um mundo tecnológico incrível e repleto de informações, que mudam a todo instante. Com isso, ao aluno deve ser dado o direito de aprender a aprender. O professor precisa deixar de ser o centro e o único detentor do saber. Por sua vez, o aluno precisa passar de expectador para ser o protagonista de um aprender significativo, participando ativamente, compreendendo a realidade que o cerca.

Uma pesquisa² realizada pelo professor da University of Frankfurt, David Kollosche, com 199 estudantes, constatou que os estudantes têm uma relação negativa com a Matemática. Ele identificou nessa pesquisa que, as razões pelas quais, os alunos não gostam da área e os motivos pelos quais eles se auto excluem da Matemática é intensificada

² WOLF, Alexandre. Por que é preciso repensar as técnicas de ensino da matemática?. *Jornal da USP*, São Paulo, 18 out. 2017. Disponível em: <<https://bit.ly/2SZvVCH>>. Acesso em: 05 jul. 2019.

especialmente pela forma de como ela é ensinada ao longo de sua caminhada estudantil (WOLF, 2017).

Um dos grandes problemas ou desafio da escola hoje é atrair o estudante para a aprendizagem. David (2017) enfatiza que a aversão à Matemática pode estar intimamente relacionada à maneira como ela é apresentada. Frente a isso, torna-se primordial repensar as técnicas de ensino.

De acordo com outra pesquisa realizada pelo Portal Porvir³ seis em cada dez jovens estão insatisfeitos com a escola. Os jovens querem uma escola mais atrativa com a utilização de tecnologias digitais e atividades práticas. O estudo ouviu mais de 132 mil jovens, de 13 a 21 anos, e foi divulgado em setembro de 2016. Alguns dos desejos dos jovens, com relação à educação, são: mais participação, mais uso da tecnologia, mais atividades além dos muros da escola.

Hoje, professores buscam alternativas inovadoras para o ensino da Matemática, porém, métodos repetitivos, teóricos e distantes do processo de aplicabilidade ainda estão fortemente presentes nas escolas. Neste sentido, deseja-se pesquisar **qual é a influência das metodologias ativas e das tecnologias digitais para o desenvolvimento do Conteúdo de Prisma em alunos do Ensino Médio?**

O objetivo geral dessa pesquisa é:

- Desenvolver uma sequência didática do conteúdo de prismas, através de investigações práticas, problemas desafio e uso de tecnologias digitais, com a utilização da metodologia ativas PBL, para o seu ensino no ensino médio, aliados ao Modelo de Van Hiele, objetivando trabalhar a visualização.

Por sua vez, os objetivos específicos consistem em:

- Descrever o processo de construção do pensamento geométrico.
- Aprofundar o conhecimento de metodologias ativas, como alternativa didático-pedagógica para o ensino.
- Verificar, através do modelo de Van Hiele, o nível do pensamento geométrico que os alunos se encontram, antes e após a aplicação da sequência didática, analisando se os alunos progrediram ou não de nível.
- Trabalhar a resolução de problemas em vários contextos, verificando se os alunos conseguiram compreender os conceitos construídos no decorrer das atividades.

³ PORTAL PORVIR. *Jovens querem atividades práticas e tecnologia na escola*. 6 out. 2016. Disponível em: <<https://bit.ly/2X3cwDu>>. Acesso em: 29 jun. 2018.

Desta forma, a dissertação está organizada em três capítulos, onde o primeiro trata da Construção do Pensamento Geométrico, o segundo aborda as Metodologias Ativas e o terceiro relata a Pesquisa e Análise dos Resultados, a partir da prática da Sequência Didática aplicada.

2 A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Basta olhar ao redor e observar que as formas geométricas estão presentes de diferentes formas no dia a dia. Muitas dessas formas são produtos da ação humana e outras fazem parte da natureza. A Geometria constitui-se em um saber lógico, intuitivo e sistematizado. É um dos ramos da Matemática que pode estimular o interesse pelo aprendizado, por se tratar de um assunto que faz parte da realidade dos alunos e por oportunizar o desenvolvimento de habilidades criativas.

Tomando-se por base as minhas vivências e experiências de práticas pedagógicas, verifica-se que os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades no ensino de Geometria Espacial. Uma dessas dificuldades é com relação à visualização das transformações sofridas por um objeto bidimensional para tridimensional e vice-versa. Ao estudar conhecimentos básicos da Geometria plana, nas relações existentes entre as formas, o aluno não apresenta grandes dificuldades. Porém, quando o aluno se depara com cálculos de área e volume de figuras tridimensionais, o entendimento torna-se complicado e o mesmo não consegue associar as figuras – fazer a transformação de figuras bidimensionais para tridimensionais - e realizar os cálculos mecanicamente. Portanto, não entende a aplicação em outras situações que são propostas.

O objetivo deste capítulo é descrever o processo de construção do pensamento geométrico e para isso será utilizado o Modelo Van Hiele, o qual auxilia na investigação dos elementos básicos para a construção e a evolução do pensamento geométrico.

O modelo de Van Hiele consiste em uma teoria de ensino e aprendizagem de Geometria, onde a aprendizagem passa por cinco níveis de compreensão: Nível 0 (nível básico): Visualização; Nível 1: Análise; Nível 2: Dedução Informal; Nível 3: Dedução e Nível 4: Rigor.

Na aplicação desse modelo é imprescindível levar em conta os conhecimentos e as experiências matemáticas já vivenciadas pelos alunos. As atividades, a serem trabalhadas, devem estimular o desenvolvimento do pensamento geométrico, de forma que os alunos consigam evoluir de um nível para o outro, conforme propõem os PCNs:

O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico (1998, p. 52).

Para Costa e Lira (2017, p. 4) “ O modelo de Van Hiele conduz o aluno ao nível da visualização de um conceito geométrico, em seguida ao nível da análise, depois ao da ordenação lógica, mais adiante ao nível da dedução e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação”.

Saber identificar os elementos, as propriedades, a classificação de uma figura geométrica, a visualização e a representação dessas formas, são elementos importantes à formação do pensamento geométrico. Se a habilidade de visualização for bem trabalhada, desenvolvida, fica fácil realizar a transposição das imagens planas para as tridimensionais. O conceito, o desenho e a imagem mental são fundamentais para que esse processo seja concretizado.

A partir do que os PCNs postulam, o professor precisa criar situações de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade. Deve verificar em qual nível de pensamento geométrico o aluno se encontra para, posteriormente, propor atividades que propiciam ao aluno progredir de nível.

Conscientes desse panorama, especialmente considerando os indicativos dos documentos orientativos, neste capítulo será tratado do ensino da Geometria euclidiana: plana e espacial, as Tendências Metodológicas e o que a Base Nacional Comum Curricular propõe no ensino da Matemática e suas tecnologias.

2.1 Falando de Geometria

A Geometria é uma Ciência que estuda as formas e suas medidas, sendo essas planas ou espaciais. Para Machado, a definição de Geometria é:

Área da Matemática que se dedica a questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, dividindo-se em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas. Este segmento da Matemática aborda as leis das figuras e as relações das medidas das superfícies e sólidos geométricos. São utilizadas relações de medidas como as amplitudes de ângulos, volumes de sólidos, comprimentos de linhas e áreas das superfícies (2015, p. 11).

Uma das Geometria trabalhada no Ensino Médio é a Geometria euclidiana, ou seja, a Geometria plana e espacial. Nessa Geometria são estudadas as medidas das formas, posição relativa das figuras no espaço e suas propriedades.

Segundo Moraco (2006, p. 23), “De acordo com Van Hiele, pesquisador que formulou uma teoria sobre o pensamento geométrico, o trabalho com as Geometrias não-

euclidianas⁴ desenvolve o mais elevado tipo de pensamento, denominado de rigor, o que não seria atingido com a escolaridade básica”.

Observa-se no entorno diversas formas geométricas, criadas pelo homem ou pela natureza. Essas formas geométricas recebem nomes específicos, quanto ao número de lados e ângulos, ou seja, a partir de suas características e propriedades, como: triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, entre outros. Acredita-se que o estudo da Geometria surgiu pelas necessidades das antigas civilizações e foi evoluindo ao longo dos séculos, assim como a Matemática vem evoluindo a cada dia, pelo mesmo motivo.

As primeiras medições de distâncias, áreas e volumes surgiram com as civilizações antigas, demarcando limites em propriedades, plantações, projeção de templos e pirâmides.

Ao longo da História, segundo registros de Heródoto e Aristóteles, supostamente, sabe-se que a Geometria teria surgido no Egito. A palavra Geometria é de origem grega e significa “medida da terra”. Para Heródoto, o surgimento da Geometria teria nascido pela prática do Faraó Sesóstris III em dividir suas terras para o desenvolvimento da agricultura. Como os proprietários deviam pagar tributos, conforme o tamanho do terreno, após as cheias do Rio Nilo, os terrenos ficavam menores e os agricultores solicitavam nova metragem para pagar menos impostos.

Para ajudar a delimitar as áreas de cultivo, os faraós possuíam funcionários que trabalhavam como agrimensores, onde eles avaliavam os prejuízos decorrentes das cheias dos rios recalculando as fronteiras entre as propriedades. Para delimitar as novas medidas, eles utilizavam cordas e, com elas, formavam ângulos retos, onde as formas dos terrenos eram retangulares ou triangulares. Eles sabiam que, para formar ângulos retos, era necessário ter um triângulo cujas medidas de seus lados fossem cinco, três e dois, ou múltiplos desses números. O ângulo formado pelos dois lados menores seria de 90 graus.

Já Aristóteles apresenta a versão de que o estudo da Geometria era feito no Egito por uma classe sacerdotal. Os dois filósofos apresentam versões diferentes para o surgimento da Geometria, uma era fundamentada na prática e outra no estudo de teorias.

Aproximadamente no século V a.C., a Geometria teria sido levada do Egito para a Grécia, por Tales de Mileto. Nesse período, a Geometria foi ganhando embasamento teórico, fundamentado na razão, e desenvolvida como uma forma de conhecimento organizado. De posse dos conhecimentos práticos do Egito e da Babilônia, os gregos não se

⁴ **Geometria não Euclidiana:** é uma geometria baseada num sistema axiomático distinto da geometria euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre, acesso em 01/07/2020.

preocupavam em apresentar aplicações úteis na Geometria. Eles compreendiam que os procedimentos geométricos precisavam ser provados, argumentados e explicados de maneira ordenada e, com isso, os gregos começaram a aperfeiçoar a Geometria.

A Geometria, como teoria dedutiva, foi estabelecida por Tales de Mileto e Pitágoras, por meio da formulação de problemas e da explicação de hipóteses. No século IV a.C., Euclides de Alexandria definiu o sistema de axiomas ou dedutivo, estabelecendo que os axiomas partem de conceitos sem demonstração. Essa Geometria de Euclides apresenta um conjunto de definições a partir de cinco postulados, os quais ainda hoje são muito estudados nas escolas:

1º Postulado: qualquer ponto a outro se pode traçar uma reta;

2º Postulado: em uma reta limitada, é possível prolongá-la ilimitadamente para qualquer um dos dois lados;

3º Postulado: um círculo pode ser feito, dando-se o centro e um ponto;

4º Postulado: todos os ângulos retos são iguais;

5º Postulado: pode-se defini-lo de “Postulado de Euclides”, ou “Postulados das Paralelas”, sendo esse o mais complexo. Ele descreve que, caso uma reta caia sobre duas outras retas e faça ângulos internos do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas prolongadas indefinidamente se encontrarão em um ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos retos.

Com o passar dos séculos percebem-se as transformações que a Geometria vem sofrendo. Inicialmente tinha-se a Geometria do ponto, da reta, do plano, para, a seguir evoluir para a Geometria das grandes construções, dos objetos, do dia a dia. Uma Geometria que desafia as simples formas e transforma a Geometria clássica em uma Geometria arquitetônica.

Piaseski (2010), diz que “a Geometria pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para diferentes tecnologias e linguagens, que estão sendo exigidas da humanidade neste mundo globalizado”. Portanto, o mundo das formas precisa ser explorado cada vez mais, analisando, interpretando e relacionando as formas planas e as formas espaciais.

O ensino de Geometria, atualmente, ficou um tanto quanto esquecido e deixado de lado. Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1973 apud FONSECA, 2001), descrevem algumas das razões pelas quais a Geometria, muitas vezes, é deixada em último plano ou não é trabalhada nas salas de aulas. A primeira razão elencada é a não renovação de seu ensino. A segunda razão está diretamente relacionada à formação dos professores, onde em sua

formação não houve preocupação em incluir a Geometria e suas práticas pedagógicas. A terceira razão enfatiza uma falha metodológica do professor, que é aumentada pela excessiva carga horária de trabalho dele, fazendo com que siga o livro didático, onde os conteúdos de Geometria são colocados no final do livro, o que significa que terá pouco tempo para trabalhar esses conteúdos, ou, não serão trabalhados, essa razão é uma questão de (re)organização curricular que precisa ser revista.

De acordo com os PCNs (1998), os conceitos geométricos constituem uma importante parte do currículo, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento, permitindo compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo que vive.

Ainda, conforme os PCNs:

o conhecimento matemático é historicamente construído e, portanto, está em permanente evolução. Assim, o ensino de Matemática precisa incorporar essa perspectiva, possibilitando ao aluno reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas (1998, p. 57).

De acordo com a BNCC (2019), referente ao conteúdo de Geometria, espera-se que os alunos do Ensino Fundamental Anos Iniciais, Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino médio, consigam atingir determinados objetivos.

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, o objetivo da Geometria é:

identificar e estabelecer pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos; construir representações de espaços conhecidos e estimativa de distâncias; identificar características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associando as figuras espaciais a suas planificações e vice-versa; Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos e iniciação do estudo das simetrias (BNCC, 2019, p. 274).

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o objetivo da Geometria é:

analisar e produzir transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes; congruência e semelhança de triângulos; demonstrações simples, contribuindo para o raciocínio hipotético-dedutivo; aproximação da Álgebra com a Geometria, por meio da Geometria analítica; estudo de coordenadas com representações no plano cartesiano; equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica (BNCC, 2019, p. 274).

No Ensino Médio, o objetivo da Geometria é:

construir a Matemática integrada e aplicada à realidade, em diferentes contextos; desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas; raciocinar, representar, comunicar-se e argumentar de forma a aprender conceitos, representações e procedimentos cada vez mais aprofundado (BNCC, 2019, p. 529).

O ensino da Geometria é trabalhado desde o Ensino Fundamental Anos Iniciais até o Ensino Médio. Em cada etapa da escolaridade o conteúdo de geometria apresenta grande importância para a construção dos conceitos necessários deste assunto. É fundamental que o professor perpassasse por todos eles, para que, ao final da etapa do Ensino Médio o aluno tenha desenvolvido as habilidades necessárias para a compreensão da geometria.

2.2 O Ensino da Geometria Plana

Sem dúvida, a Geometria plana é a base da Geometria espacial. O domínio desse conteúdo é essencial para que o aluno consiga compreender e desenvolver os cálculos em Geometria espacial.

A Geometria é estudada desde a pré-escola, a partir da característica de suas formas. A seguir, no Ensino Fundamental, conforme a BNCC (2019), a Geometria deve envolver um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para a resolução de problemas do mundo físico, estudando posição e deslocamentos no espaço, formas, figuras planas e espaciais. No ensino Médio esses conceitos estudados devem ser concretizados e, a partir deles, promover uma aprendizagem pautada no mundo do trabalho e tecnológico.

A partir do estudo da Geometria plana, as habilidades propostas pelos PCNs são:

Geometria Plana: semelhança e congruência; representações de figuras. Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações problema; analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.; usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real; utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras; fazer uso de escalas em representações planas (BRASIL, 2002, p. 125).

O conteúdo de Geometria plana deve ser bem trabalhado, pois os alunos precisam se apropriar desses conceitos para (re)construir, interpretar e relacionar as formas bidimensionais e tridimensionais. Para isso, os PCNs (1998) propõem desenvolver os seguintes conceitos e procedimentos no Ensino Fundamental:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), deslocamentos no plano, representações das coordenadas cartesianas;

- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, destacando suas características e nomenclatura própria;
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, elementos e característica que as compõem;
- Composição e decomposição de figuras planas;
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros;
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações, identificação de medidas invariantes nessas transformações;
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram e dos que se modificam;
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, identificação das propriedades;
- Construção da noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas;
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

O estudo de figuras planas apresenta certa facilidade, pois envolve poucos elementos com características específicas. O conteúdo, desenvolvido de maneira contextualizada, aproxima o aluno ao conhecimento matemático. Por outro lado, o conteúdo relacionado à utilização de fórmulas, com proposta conteudista e memorização, causa desestímulo nos alunos. Portanto, ao professor incumbe-se a missão de promover a contextualização do conteúdo, voltada à realidade do aluno, estimulando o raciocínio lógico e a criticidade.

A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola (BRASIL, 2006, p. 83).

Outro problema relacionado ao estudo de Geometria plana é a utilização de metodologias convencionais que não estimula\oportuniza aos educandos avançar no processo de construção de conhecimento, uma vez que, para que isso ocorra, o aluno precisa tomar consciência e confrontar as informações que lhes foram oportunizadas dando lugar a um processo de ampliação da cognição. Portanto, é papel do professor propor alternativas para que os alunos desenvolvam as habilidades necessárias à construção do conhecimento e, assim, expressar sua imaginação, criatividade, enfim, aprimorar o seu

intelecto. Diante disso, para alcançar os objetivos propostos da Geometria plana, é preciso buscar métodos que melhorem e estimulem a capacidade de raciocínio dos alunos, agregando meios e métodos de adquirir conhecimento de forma motivadora e prazerosa.

2.3 O Ensino da Geometria Espacial

Os conteúdos de Geometria a serem desenvolvidos no Ensino Médio, no que tange à Geometria e às Medidas, conforme a BNCC, são as seguintes:

1. Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
2. Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
3. Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
4. Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
5. Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
6. Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
7. Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
8. Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
9. Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
10. Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
11. Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
12. Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital (BNCC, 2019, p. 544).

Para o estudo da Geometria Espacial é essencial que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas aos temas de formas e propriedades, transformações, localização e visualização. Oliveira e Velasco (2007), objetivando diagnosticar o conhecimento matemático do conteúdo de Geometria Plana e Espacial de alunos ingressantes e recém-formados no Ensino Médio, bem como, a visualização gráfica trabalhada, concluíram que:

os alunos estão terminando suas etapas de ensino sem noção básica de conceitos e propriedades de Geometria, seja plana ou espacial. Também não possuem técnicas para visualizar, interpretar e analisar dados gráficos. De maneira resumida, não são oferecidos aos educandos as ferramentas básicas para que estes possam desenvolver seu raciocínio lógico dedutivo para que possam transcender as fases de seu desenvolvimento (OLIVEIRA; VALESCO, 2007, p. 8).

O estudo de Geometria desenvolve nos alunos as habilidades de visualização, interpretação, desenho, análise e argumentação lógica, além de auxiliar na resolução de problemas. O aluno, ao concluir seus estudos, deve ser capaz de utilizar formas, reconhecer suas propriedades e perceber sua representação ou visualização no mundo, como instrumento de leitura e interpretação.

A BNCC (2019), propõe para o Ensino Médio que deve ocorrer a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Então, se a Geometria Plana não for bem trabalhada e compreendida no Ensino Fundamental, os alunos no Ensino Médio não possuirão os conceitos e habilidades mínimos desse conhecimento para sustentar os objetivos a serem atingidos nessa etapa.

Para a construção do pensamento geométrico, conforme pesquisas (CARVALHO, 2015; GUEDES, 2013), a visualização é um dos elementos fundamentais nesse processo. Carvalho (2015), ao analisar alguns livros referentes ao conteúdo, constatou que os mesmos atendem parcialmente à construção do pensamento geométrico espacial, pois pouco exploram a visualização. Guedes (2013), ao apresentar os resultados de sua investigação, destacou a visualização como fundamental para a apropriação dos conceitos geométricos.

[...] pudemos verificar que a visualização, tão necessária à construção do conhecimento geométrico, foi prontamente contemplada com a possibilidade, oferecida pelo software, de modificar tamanhos, de aproximar e rotacionar as figuras tridimensionais, permitindo uma interação, quase real com o objeto que estava sendo estudado (GUEDES, 2013, p. 81-82).

Se, por um lado, a visualização e a representação são consideradas necessárias para a construção do pensamento geométrico, por outro, os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades na análise, interpretação e construção de formas e objetos.

Para a representação de figuras espaciais a partir de desenho, o aluno busca uma relação entre o conhecimento que possui do objeto e a imagem mental. Compreende-se que sua capacidade mental evolui com a representação gráfica e com conhecimentos geométricos aprofundados.

Santos (2014), denota a visualização em Geometria como um modo de ver o que está ante os olhos, ou, também, ver com os olhos da mente, utilizando-se de conceitos e construções próprias da Geometria para fazer relações Matemáticas, tanto geométricas quanto algébricas. Apresenta uma ideia de visualização na formação das imagens mentais para o desenvolvimento do pensamento visual.

Quando pensamos nas dificuldades que os estudantes apresentam na resolução de questões Matemáticas é possível perceber uma relação entre esta dificuldade e a inabilidade em articular os conceitos abstratos com a visualização, que neste caso pode se dar pela intuição, imaginação e também pelas imagens mentais (SANTOS, 2014, p. 26).

Santos (2014), ressalta ainda que, a utilização da visualização pode auxiliar de forma a dar substância e concretude ao ensino da Matemática, possibilitando uma melhor compreensão dos diferentes conceitos matemáticos.

Corroborando, Pinto e Scheiner (2015), analisaram que a visualização geométrica na aprendizagem da Matemática é de extrema importância, pois a partir dela, os alunos conseguem ou não desenvolver seu conhecimento e progredir para um nível mais elevado de conhecimento geométrico. Eles defendem que, o uso da visualização não pode ser meramente um recurso ilustrativo dos conceitos estudados; a visualização deve estar compartimentalizada ao conhecimento que está sendo produzido.

Nesse processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, a representação plana dos objetos em estudo (bi e tridimensionais), como um objeto, um desenho, uma imagem mental e conceito, são elementos fundamentais. É necessário vincular materiais concretos do mundo real associados a conceitos geométricos, bem como considerar questões experimentais e intuitivas para o entendimento de conceitos teóricos da Geometria. Van de Walle (2009), relata que qualquer tarefa desenvolvida com o aluno, relacionada à manipulação ou transformação mental de uma forma geométrica, contribui para o aprimoramento da habilidade de visualização.

O professor precisa desenvolver nos alunos as habilidades que são necessárias para sua formação, criando situações que despertem o interesse, relacionando os conteúdos de sala de aula com o mundo do trabalho, de acordo com os PCNs:

cada área do conhecimento deve envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (1998, p. 42).

O processo da construção teórica dos objetos é lento e complexo, requerendo tanto do aluno quanto do professor certas habilidades. O aluno precisa compreender a abstração e a generalização dos objetos. O professor precisa criar condições para que isso ocorra. Ao vivenciar uma situação através de atividades vinculadas ao mundo físico, o aluno poderá compreender mais facilmente esse processo, pois, a partir de situações que fazem parte de sua própria história, o processo torna-se significativo e os conceitos são construídos e entendidos. A Matemática, relacionada com o cotidiano, proporciona ao aluno a interpretação e a compreensão de diversas situações, podendo, a partir disso, tomar decisões de forma participativa e efetiva.

2.4 Teoria de Van Hiele: Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Para explicar o desenvolvimento do pensamento geométrico, esta pesquisa será fundamentada de acordo com a teoria de Van Hiele (1957). De acordo com Costa e Santos (2014), essa Teoria foi desenvolvida por Pierre Marie Van-Hiele e sua esposa Dina Van-Hiele Geodolf, como trabalho de tese de doutorado em Matemática e Ciências Naturais, na Universidade Real de Utrecht, na Holanda, em 1957. Tal Teoria tinha o objetivo de compreender quais eram os motivos das dificuldades de aprendizagem em Geometria apresentadas pelos seus alunos do Ensino Básico, em uma escola de Amsterdã. A pesquisa de Van Hiele é fundamentada na Epistemologia Genética de Piaget.

A Teoria de Van Hiele é estruturada em cinco níveis: Nível Básico ou zero: Reconhecimento ou Visualização; Nível 1: Análise; Nível 2: Síntese ou Abstração; Nível 3: Dedução e Nível 4: Rigor. De acordo com esse modelo, destaca-se que o aluno só avança para o próximo nível após ter passado pelo nível anterior, ou seja, ter compreendido o nível anterior.

Villiers (2010), justifica que uma das principais causas das dificuldades encontradas pelos alunos no ensino de Geometria está relacionada aos conteúdos trabalhados, sendo que o professor apresenta aos alunos o conteúdo em um nível mais elevado que eles se encontram. Sendo assim, o aluno não consegue entender o conteúdo devido estar em outro nível de pensamento geométrico.

Diante do exposto, é necessário, inicialmente um pré-teste para verificar em que nível de pensamento o aluno se encontra. Para que o aluno progrida para o próximo nível é extremamente importante que o professor apresente atividades significativas, que sejam bem elaboradas, (re)estruturadas e (re)organizadas, a fim de (re)construir o pensamento geométrico. Portanto, para a promoção de um nível $n+1$ do pensamento geométrico, é fundamental a vivência com atividades adequadas, que ao serem trabalhadas em sala de aula, favorecem a aprendizagem geométrica.

Tradicionalmente, a maioria dos professores e autores de livros escolares simplesmente fornece aos alunos conteúdo pronto (definições, teoremas, comprovações, classificações, etc.) para que eles meramente tenham de assimilá-lo e regurgitá-lo em testes e provas. Esse tipo de ensino tradicional de Geometria pode ser comparado a uma aula de culinária na qual o professor simplesmente mostra aos alunos bolos (ou pior, apenas fotos de bolos) sem jamais mostrar a eles o que vai dentro do bolo e como ele é preparado. E mais, eles nem mesmo têm a oportunidade de tentar cozinhar por si próprios! (VILLIERS, 2010, p. 411).

O Quadro 1, apresentado a seguir faz relação aos 5 níveis do pensamento geométrico de Van Hiele. O mesmo foi organizado a partir do texto de Jehin e Chenu (2000), traduzido por Costa e Santos (2014).

Quadro 1 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.

NÍVEL	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
Primeiro nível - básico	Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos.	Os alunos consideram que, um losango é losango “porque ele está na borda”, ou uma altura é uma altura “porque é vertical”.
Segundo nível - análise	Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos.
Terceiro nível - dedução informal	Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento.
Quarto nível - dedução formal	Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las.	Os alunos são capazes de demonstrar que, um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango.
Quinto nível - rigor	Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias Geometrias, na ausência de modelos concretos.	Os alunos são capazes de entender Geometrias não euclidianas.

Fonte: Adaptado por Costa e Santos, 2014, p. 5.

Cada nível apresenta uma característica distinta de compreensão e todos são importantes. É fundamental que o professor consiga desenvolver, de forma ordenada e gradual, cada um deles, apresentando aos alunos uma proposta pedagógica com atividades selecionadas que estimulem ou proporcionem a mudança de nível de conhecimento.

2.4.1 Fases do aprendizado de Van Hiele

O Modelo de Van Hiele apresenta cinco fases sequenciais para o desenvolvimento da aprendizagem. De acordo com Crowley (1994 apud GEHRKE, 2017) são elas:

- Fase 1:** interrogação/informação: professor e estudantes conversam e desenvolvem atividades sobre o objeto de estudo. É uma fase preparatória em que o professor apresenta materiais e informações sobre o conteúdo que será desenvolvido, dando oportunidade para o estudante demonstrar seu conhecimento prévio e adquirir conhecimentos básicos.
- Fase 2:** orientação dirigida: nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de explorar os materiais trazidos pelo professor. É importante que as tarefas sejam cuidadosamente elaboradas a fim de preparar os estudantes para novos conceitos que irão surgir, favorecendo a mudança de nível.
- Fase 3:** explicação: nessa fase, o professor estimula os estudantes a expressarem suas descobertas por meio do diálogo. Busca orientá-los quanto ao uso de uma linguagem precisa e adequada, o que favorece uma boa comunicação entre o grupo e demonstra a assimilação dos novos conceitos adquiridos na fase anterior.
- Fase 4:** orientação livre: nessa fase, propõem-se aos estudantes tarefas mais complexas, o que permite que todos os conceitos trabalhados até o momento sejam colocados em prática. O professor sugere determinadas tarefas e o estudante com sua experiência busca suas próprias estratégias para resolvê-las.
- Fase 5:** integração: na fase final, os estudantes reveem e organizam o que aprenderam até o momento, com a finalidade de formar uma visão mais geral sobre o conceito desenvolvido. “No final da quinta fase, os estudantes alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os estudantes estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte” (GEHRKE, 2017, p. 22-23).

Pode-se perceber que as fases são muito importantes para que essa teoria possa ser desenvolvida com sucesso. Cabe ao professor o desenvolvimento ordenado, com atividades contextualizadas e bem formuladas, para dar condições ao aluno avançar de nível. O professor, ainda, deve respeitar o nível de pensamento geométrico em que o aluno se encontra, pois se o conteúdo for realizado acima do nível de compreensão do aluno, acarretará no não aprendizado dos conceitos estudados.

Ressalta-se que, considerando esse motivo exposto, de quanto mais alternativas ou ferramentas o professor se utilizar para o desenvolvimento de suas aulas, mais chances de

sucesso ele terá. É importante, também, que seja trabalhado com objetos concretos do contexto social, pois com isso, além das aulas serem mais atrativas e interessantes para os alunos, eles conseguem (re)construir um aprendizado significativo.

Para que isso ocorra, as fases de aprendizado também precisam ser respeitadas e trabalhadas de forma hierárquica. Resumidamente, pode-se descrever cada fase da seguinte maneira:

Fase 1: identificar os conhecimentos prévios dos alunos;

Fase 2: apresentar atividades concretas;

Fase 3: utilizar-se da linguagem oral ou escrita, para expressar as experiências obtidas nas atividades anteriores;

Fase 4: utilizar dos conhecimentos adquiridos para a resolução de situações problemas;

Fase 5: revisão do que foi aprendido.

De acordo com o modelo de Van Hiele, os alunos apresentam dificuldade de visualização e abstração do conhecimento, especialmente quando estão em um nível inferior de conhecimento geométrico ao que o professor apresenta o conteúdo. Outro fator destacado por Van Hiele, que prejudica a aprendizagem, é o professor trabalhar a Geometria de forma superficial, sem fundamentação e sem analisar os conhecimentos prévios dos alunos. O professor precisa estar ciente desses pontos e elaborar uma proposta pedagógica que, além de estimular o interesse, propicie aos alunos progredir para um nível de conhecimento mais elevado.

2.5 Tendências Metodológicas para o Ensino de Geometria

Na atualidade se faz necessário repensar a prática em sala de aula. É preciso entender onde está a dificuldade relacionada ao processo de ensino e aprendizagem da geometria. Nas escolas, muitas vezes, tem-se professores com carga horária elevada e que tomam, como única referência, o livro didático, pois não dispõem de tempo necessário para um planejamento adequado de suas aulas. Com isso, observam-se alunos desestimulados, desatentos e agentes passivos no processo de aprendizagem.

Portanto, precisa-se buscar alternativas para propor aulas pautadas em metodologias que auxiliam no desenvolvimento da criatividade, imaginação, criticidade, motivação, curiosidade, interesse pela experimentação e pela busca. Conforme Araujo, esse tipo de proposta ajuda a sanar ou a minimizar dificuldades de aprendizagem.

Dobradura, material concreto, softwares por mais que demandam tempo de preparo e execução, são interessantes, pois despertam o interesse ao trabalhar de forma diferenciada, a aprendizagem acontece para todos. Já na lousa há alunos que não conseguem visualizar em três dimensões (2017, p. 85).

Pesquisas mostram que a utilização de metodologias de ensino adequadas, além de melhorar a relação entre professor e aluno, tornam as aulas mais produtivas e tornam o processo de ensinar e aprender mais prazeroso.

Machado (2015), em sua contribuição para com o ensino de Geometria, concluiu que o ambiente virtual é muito atrativo para a geração contemporânea. Essa geração apresenta grande habilidade no uso de computadores e celulares. Devido à familiarização com esses recursos, a aquisição do conhecimento acontecerá de forma natural. Postula, ainda, que a utilização orientada de recursos tecnológicos estimula nos alunos a investigação, a percepção, a atenção, a associação, a memória, a imaginação, o raciocínio e a análise crítica.

Conforme Franco e Pereira (2013), uma das maneiras mais interessantes de se trabalhar com Geometria espacial é fazendo demonstrações por meio de atividades dinâmicas, diversificando as aulas com material concreto, sendo que este é um ótimo instrumento para auxiliar na passagem dos objetos do mundo físico para o mundo das ideias.

Para aumentar a possibilidade de aprendizagem é importante criar o maior número de situações, com diferentes instrumentos e representações, para um mesmo objeto geométrico. De acordo com os PCNs (1998), em relação à utilização dos recursos tecnológicos, é importante destacar que “As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas” (PCNs, 1998, p. 43).

O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação, por meio da utilização de softwares como Geogebra, Cabri Géometre, Polly, entre outros, podem contribuir no processo de aprendizagem, de maneira dinâmica, melhorando o processo de visualização. Bozza (2015), relata que os recursos digitais têm potencial para melhorar a aprendizagem cognitiva e desenvolver habilidades de resolução de problemas. Ao trabalhar com a utilização desses recursos, o professor possui uma importante ferramenta, potencializadora do pensamento geométrico.

Segundo os PCNs:

[...] O uso dessas tecnologias traz significativas contribuições para se repensar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática à medida que: relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que, por meio de instrumentos, esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente; evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas frente ao seu estudo (1998, p. 43).

É claro que, a tecnologia e seus recursos são importantes e hoje fazem parte do contexto escolar. Nesse processo de utilização da tecnologia, cabe ao professor se apropriar e se aprofundar de conhecimentos referentes aos recursos, como softwares, que irá explorar com seus alunos. Outro ponto importante é a escolha adequada do software que será utilizado. O professor é responsável por determinadas escolhas e, a partir delas, deve buscar conhecimento a respeito, verificando se realmente com o recurso a ser utilizado, ele conseguirá atingir os objetivos propostos.

Precisa-se (des)construir e (re)construir a ideia que, em geral, os alunos possuem em relação às aulas de Matemática, bem como, a forma que a mesma deve ser ministrada. Os alunos precisam entender que, os professores não são os únicos detentores do saber, que as aulas explicativas com aplicação de exercícios repetitivos e mecanizados podem e devem ser substituídas por atividades investigativas.

Ponte (2010) relata que as atividades de Matemática podem ser realizadas com diferentes abordagens. Destaca e propõe exercícios a partir da investigação, sendo que estes não devem apresentar uma solução imediata. Mesmo apresentando complexidade estrutural, sua utilização é interessante na resolução de problemas, pois uma investigação Matemática se desenvolve em torno de um ou mais problemas.

Gehrke (2017), ao trabalhar com a resolução de problemas, diagnosticou que a metodologia do trabalho investigativo proporcionou momentos de intensa aprendizagem. A constatação foi de que o trabalho investigativo contribuiu para organizar e reorganizar os conceitos estudados, consolidando-os através de atividades relacionadas com o cotidiano dos estudantes.

Acredita-se que este trabalho contribuiu para que os estudantes pudessem vivenciar uma nova experiência de trabalho com a Matemática e, com isso, evidenciassem uma atitude mais positiva em relação a essa disciplina, ou seja, que adquirissem uma visão mais ampla das possíveis conexões que podem ser estabelecidas entre a Matemática e o mundo que os rodeia (GEHRKE, 2017, p. 98).

Na resolução de problemas, o aluno aprende a partir de situações distintas, com abordagens que o levam a “descobertas” e a (re)construção de conceitos. Na resolução de problemas, com a aplicação da investigação Matemática, o professor é o mediador e o aluno, através do processo de investigar, precisa descobrir o que lhe foi proposto por meio de tentativas e experiências que construiu ao longo do caminho. A investigação objetiva ao aluno a autonomia, a busca de informações, a análise e a exploração de todos os caminhos, para chegar ou não à resposta.

Investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões. E, finalmente, envolve a demonstração e a comunicação dos resultados (PONTE, 2010, p. 15).

A investigação não é um recurso muito utilizado nas aulas de Matemática, pois os alunos apresentam muita resistência nesse processo. Para os alunos, o professor precisa explicar o conteúdo detalhadamente, caso contrário, subentendem que o professor não explica o conteúdo. Por sua vez, os professores também apresentam certa resistência e aversão pela utilização da investigação em suas aulas, pois, trabalhar Matemática dessa forma requer maior tempo para o planejamento e um conhecimento mais aprofundado do conteúdo, além da aceitação por parte dos alunos.

Referente à investigação, a BNCC (2019), ressalta que:

[...] deve ser enfatizada no Ensino Médio, aproximando os estudantes dos procedimentos e instrumentos de investigação, tais como: identificar problemas, formular questões, identificar informações ou variáveis relevantes, propor e testar hipóteses, elaborar argumentos e explicações, escolher e utilizar instrumentos de medida, planejar e realizar atividades experimentais e pesquisas de campo, relatar, avaliar e comunicar conclusões e desenvolver ações de intervenção, a partir da análise de dados e informações sobre as temáticas da área (p. 550).

Com a utilização da investigação nas aulas de Matemática, aliada aos diversos recursos tecnológicos disponíveis, os alunos perceberão que a Matemática pode contribuir, de forma significativa, em todo o seu processo de aprendizagem.

Na contemporaneidade, o que mais se possui é diversidade de recursos tecnológicos ou didáticos (dinâmicos) para uma proposta que estimule os alunos, revertendo o atual quadro de aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria. Partindo disso, pretende-se utilizar uma tendência metodológica para o desenvolvimento do conteúdo de Geometria, que desperte nos alunos o interesse pela busca, o espírito crítico e questionador

e que os mesmos sintam motivação e desenvolvam o gosto nesse processo. Serão desenvolvidas atividades de Investigação Matemática, com a utilização de recursos tecnológicos, bem como, aplicações matemáticas em situações cotidianas, por meio da resolução de problemas.

2.5.1 BNCC, a Matemática e suas tecnologias

No contexto atual, além de terem acesso a bombardeios de informações do mundo tecnológico, os alunos possuem acesso e utilizam-se de potentes ferramentas pessoais, como celular, tablets, notebooks entre outros. Nesse contexto, a escola deve adaptar-se aos novos paradigmas e repensar sua prática de ensino. Pautados na BNCC (2019), o aluno do Ensino Médio deverá desenvolver cinco competências específicas de Matemática, nos três anos de ensino:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2019, p. 531).

Ao analisar as cinco competências a serem desenvolvidas na etapa do Ensino Médio, pode-se verificar que apenas uma delas não faz menção à tecnologia, ou seja, a proposta apresentada pela BNCC (2019) para a educação no Ensino Médio é pautada em ações ou procedimentos que se utilizam de meios tecnológicos. Assim, é deduzido destas competências apresentadas que cabe ao professor e à escola, portanto, se adequar e começar a fazer uso desses recursos.

Recursos estes que não precisam de grandes investimentos. A questão dos investimentos, por muito tempo, foi a desculpa utilizada por educadores que não se adaptavam a essa realidade. A maioria dos alunos na atualidade dispõem de celulares e de acesso à internet. Portanto, propor aulas diversificadas, que despertem o interesse e motivem os alunos, na maioria das vezes, depende unicamente dos profissionais da educação.

É claro que, em algumas situações, não é prudente ou não há como utilizar os meios tecnológicos, por uma ou outra razão. Mas, o argumento de que a escola não dispõe desses recursos e não há como utilizá-los não pode ser mais utilizado pelos educadores. Hoje dispõe-se de muitos recursos. Os profissionais da educação precisam ter consciência de que, a geração a que seus alunos pertencem, de fato, é tecnológica. Conseqüentemente, os profissionais da educação precisam aprender a aprender, bem como, precisam aprender para ensinar.

Na perspectiva educacional, a utilização das tecnologias como ferramenta didática possibilita uma prática educacional desafiadora tanto para o aluno quanto para o professor, pois trabalha com uma proposta pedagógica mais ampla, responsável pela motivação e interação. O educador e a escola precisam estar preparados para essa mudança e oferecer ao educando o que a sociedade exige. Torná-los indivíduos integrados neste contexto tecnológico é também papel do docente, é um dever que não podemos abandonar, pois estes adolescentes e jovens estarão em curto espaço de tempo inseridos no mercado de trabalho. Suas oportunidades aumentarão ou diminuirão de acordo com o preparo e o que a escola os oferece. Não podemos esquecer que para muitos desses alunos a escola é, talvez, o único local ao seu alcance capaz de oferecer conhecimento, alimentação, alegria, lazer, esportes, talentos e cultura (MUELLER, 2013, p. 36).

Os recursos tecnológicos são materiais de apoio. Destaca-se que a sua utilização deve promover o conhecimento, desenvolver competências e habilidades necessárias no conteúdo em questão. Eles ensinam ao aluno a aprender, a socializar, a comparar e a compartilhar seu aprendizado.

“Nesse contexto, a Ciência e a Tecnologia tendem a ser encaradas não somente como ferramentas capazes de solucionar problemas, tanto os dos indivíduos como os da sociedade, mas também como uma abertura para novas visões de mundo” (BNCC, 2019, p. 547).

A BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa orientação tem o objetivo de preparar os alunos para que, no Ensino Médio, possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional.

Essa proposta da BNCC consiste em uma Matemática aplicada à realidade, que leva em consideração experiências e vivências do cotidiano dos estudantes, desafiando-os a desenvolver habilidades de resolução de problemas, de construção de modelos e de investigação Matemática.

“Devemos oportunizar o protagonismo, de maneira que eles consigam mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (BNCC, 2019).

Tem-se à disposição recursos dinâmicos de ensinar e de aprender, que desafiam o docente na organização dos conteúdos. Hoje, precisa-se utilizar as tecnologias como alternativa para melhorar as práticas pedagógicas e a qualidade do aprendizado. Arruda e Kozelski (2017), relatam que o ensino pode ser melhorado através da utilização das ferramentas tecnológicas, como instrumentos que podem oferecer, tanto aos professores quanto aos alunos, uma dinâmica eficaz nas suas aulas. As ferramentas tecnológicas possibilitam aos alunos uma forma mais clara de ilustração do conteúdo, melhorando a qualidade do aprendizado, tornando-os sujeitos ativos, participantes, desenvolvidos e atraídos nesse processo.

Ensinar com recursos tecnológicos em um mundo tecnológico é pertinente, dinâmico e necessário. A Matemática é uma Ciência que apresenta um sistema variado e complexo de representações. É importante utilizar diferentes linguagens, contextos e estratégias para representar números, gráficos, Geometria, esquemas entre outros. Trata-se de uma maneira de potencializar e de dar significado ao aprendizado.

Por esse motivo é importante aprofundar as discussões em metodologias ativas, pois, de um lado tem-se os alunos buscando um aprendizado significativo e dinâmico e, do outro, o professor buscando alternativas para um ensino e aprendizado que estimulem seu aluno, tornando-o um sujeito ativo e crítico para atuar no mercado de trabalho.

3 METODOLOGIAS ATIVAS

A sociedade é caracterizada por mudanças constantes e as mudanças educacionais vivenciadas no decorrer dos séculos são notórias e importantes para a (re)construção de um novo modelo educacional.

Hoje, por meio da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, se está vivendo uma reestruturação curricular, a qual vem para auxiliar e para fazer entender quais competências e habilidades são necessárias aos educandos, para que os mesmos consigam associar os conteúdos estudados em sala de aula com a vida fora dos muros da escola.

Por séculos, e ainda hoje, oferece-se uma educação pautada em conteúdos desconexos do contexto social, muitas vezes para cumprir um currículo que foi imposto, ou para preparar os alunos a atingir ótimos resultados em índices de avaliação, tanto em nível nacional quanto internacional.

A geração atual de estudantes possui muita informação e dispõe de recursos para obter essas informações. Trata-se de uma geração que quer motivos e significados no processo de ensino. Para essa geração imersa em tecnologia, o aprender não é sinônimo de memorização e a construção do conhecimento exige do professor dinamismo para envolver o estudante ativamente nesse processo.

Essa nova geração de estudantes exige um novo perfil docente. O modelo educacional almejado deve promover um aprendizado significativo, tornando o aluno um sujeito ativo, participativo, criativo, crítico e capaz de tomar decisões.

Conforme a BNCC, para ressignificar as aprendizagens no contexto das diferentes áreas “É importante fortalecer a autonomia desses adolescentes, oferecendo-lhes condições e ferramentas para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação” (2019, p. 58).

Entretanto, não se pode pensar em uma educação transformadora, com novas vestes, sem antes adentrar e compreender o contexto em que ela está inserida. O sistema educacional hoje está em plena mudança e questiona muito o papel do estudante e do docente no processo de ensino e de aprendizagem.

Nessa perspectiva propõe-se a utilização de metodologias ativas como uma possibilidade de potencializar o aprendizado dos estudantes. As metodologias ativas colocam o estudante no centro do processo para a construção do conhecimento.

Pensa-se que, envolver o aluno ativamente na construção do conhecimento, com a utilização de situações problemas, voltadas à realidade, além de tornar o aprendizado

significativo, desperta o interesse dos alunos nas aulas. A BNCC (2019), indica que a escola deve ser organizada considerando a diversidade e que garanta aos estudantes:

[...] serem protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BNCC, 2019, p. 463).

O método ativo parte de situações práticas para a teoria, onde o aprender e o ensinar estão inter-relacionados. Para isso, é fundamental associar situações problemas e, a partir delas, construir com os alunos os conceitos fundamentais e necessários para concretizar o aprendizado.

Neste capítulo será descrito o conceito de metodologias ativas e sua corrente teórica. Qual é o papel do discente e do docente nesse processo. Também será desenvolvida uma análise da Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL, com a utilização das tecnologias digitais.

O objetivo é explorar a metodologias ativa PBL e verificar se, através de sua aplicação em uma sequência didática, essa metodologia associada ao modelo de Van Hiele, aprimora a capacidade de visualização do pensamento geométrico, no conteúdo de Prismas.

3.1 Metodologias Ativas: alguns conceitos fundamentais

Metodologias ativas são propostas de ensino, onde o aluno passa a ser o centro no processo de ensino e aprendizagem. O professor possui o papel de mediador, facilitador, desafiando o aluno a resolver situações problemas relacionadas ao contexto real. As atividades a serem desenvolvidas pelos educandos devem ser contextualizadas, fazendo com que os mesmos desenvolvam a autonomia e a criticidade. O principal objetivo nesse processo é que o aluno aprenda fazendo, ou seja, “colocando a mão na massa”. O trabalho, geralmente, é desenvolvido em equipe, e o aluno deve construir estratégias, meios para conseguir realizar as tarefas que lhes são propostas.

As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras (BERBEL, 2011, p. 28).

É através da experimentação e da investigação, com a mediação do professor, que o aluno atingirá o êxito nesse processo de aprender. O caminho é seguramente desafiador. Professor e aluno precisam estar em sintonia. Ao aluno cabe discutir o que lhe é proposto, desenvolver estratégias, trocar experiências e vivências no seu grupo de trabalho, onde opiniões deverão ser respeitadas, hipóteses levantadas e estratégias utilizadas. Por sua vez, ao professor cabe a grande missão de mediar e criar condições para que ocorra o aprendizado.

Vale ressaltar que, quando houver necessidade, o professor deve intervir nesse processo e contribuir para a construção do conhecimento. É importante lembrar que o professor possui a principal tarefa de incentivar e estimular os alunos para que eles consigam refletir, analisar, examinar, criar estratégias, buscar as informações necessárias e propor uma solução para a tarefa que lhes foi apresentada.

Por meio do exercício da análise, investigação e reflexão, mediadas pelo professor, os alunos conseguirão ressignificar suas descobertas e, a partir disso, construir o conhecimento.

3.1.1 Papel do docente

É notável que, cada vez mais, as escolas estão passando por um processo de transformação em suas práticas em sala de aula, devido a isso é imprescindível que o professor compreenda esse processo de mudanças, para o qual precisa estar preparado, motivado e aberto para o novo.

O professor, de fato, precisa saber qual é o seu papel nessa nova conjuntura. Hoje é inadmissível afirmar que o professor é transmissor de informações e conhecimento. O novo professor é o que produz o conhecimento, junto e em sintonia com os anseios de quem aprende. É o mediador, o facilitador e, o mais importante, o responsável por instigar o aluno a fazer parte, de forma ativa, na construção do conhecimento. Não é mais suficiente que ele só saiba o conteúdo de sua disciplina, pois precisa interagir com os outros componentes curriculares e, principalmente, conhecer as ferramentas digitais no âmbito educacional, pois essa integração é essencial entre educadores e alunos para não haver nenhuma lacuna no processo de ensino e aprendizagem.

As mudanças na sociedade, os avanços tecnológicos e, especialmente a nova geração de alunos mostram a necessidade de uma reestruturação da prática de ensino, associada a ambientes digitais, com a implementação de metodologias ativas, que

despertem o interesse e desenvolvam uma reflexão crítica sobre o trabalho do professor em sala de aula.

Na atualidade, os alunos exigem uma educação que seja significativa, com aulas diferenciadas e de qualidade, com a utilização de metodologias inovadoras, tecnológicas e atraentes. Logo, pensa-se que o professor e a escola, mais do que nunca, precisam estar preparados para as mudanças e proporcionar as aprendizagens necessárias, de maneira desafiadora e prazerosa.

“Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade” (BNCC, 2019, p. 463).

As indicações da BNCC apontam que, o professor do Século XXI deve estar disposto a aprender, disposto a vivenciar com seus alunos novas experiências e disposto a perceber que precisa conhecer o currículo da sua disciplina. Ele precisa provocar o aluno para que o conhecimento se transforme na aprendizagem, sendo o aluno o protagonista de seu próprio aprendizado.

Segundo Freire, o papel do professor é fundamental:

Percebe-se, assim, a importância do papel do educador, o mérito da paz com que viva a certeza de que faz parte de sua tarefa docente não apenas ensinar os conteúdos, mas também ensinar a pensar certo. Daí a impossibilidade de vir a tornar-se um professor crítico se, mecanicamente memorizador, é muito mais um repetidor de frases e de ideias inertes do que um desafiador (2015, p. 29).

A utilização de metodologias ativas no processo de aprendizagem requer do professor uma gama bastante grande de funções, como, por exemplo, o papel de mediador, facilitador, articulador, ativador da prática educativa, dinâmico, que saiba interagir com os educandos instigando-os a todo instante e interferindo quando houver necessidade, para que os mesmos consigam aprender.

Nesse processo de ensino, o professor não é transmissor de conhecimentos; deve ensinar o aluno a pensar, criar condições de construir, refletir, compreender e transformar o que lhes é ensinado. Ainda, deve provocar e desafiar seus alunos com atividades voltadas à realidade, através de situações problemas que estimulem e instiguem o aprendizado através da busca e da autonomia.

Conforme Moran (2015), o professor que se utiliza do método ativo tem o papel de curador e de orientador:

Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e a cada aluno. Ele tem que ser competente intelectualmente, afetivamente e gerencialmente (gestor de aprendizagens múltiplas e complexas). Isso exige profissionais melhor preparados, remunerados, valorizados. Infelizmente não é o que acontece na maioria das instituições educacionais (MORAN, 2015, p. 24).

Atualmente tem sido apontado reiteradamente que ensinar Matemática de forma mecanizada bem como explicar teoremas sem fundamentação, não instiga e nem chama a atenção dos alunos. Pelo contrário, torna as aulas monótonas e sem significado. Destaca-se ainda que, os educadores precisam desenvolver aulas investindo em bons conteúdos, com práticas pedagógicas relevantes, possuir conhecimento aprofundado sobre o que se propõe a abordar com os alunos para, através do processo de mediação, sanar suas dúvidas e inquietações.

Quem ensina deve estar aberto para o novo, deve saber escutar, tomar decisões conscientes, saber que mais importante do que o enunciado é a corporeificação das palavras pelo exemplo. Generosidade e humildade são atributos de quem ensina, assim como alegria e esperança. O sujeito que ensina deve ter segurança, competência profissional e reconhecer que a educação não é neutra, que a mesma perpassa pelos campos da ideológica (FREIRE, 1996).

O professor precisa ter paixão pela sua profissão, mas, acima de tudo, precisa possuir muito conhecimento na sua área de atuação, estar aberto ao novo, ter vontade de aprender a aprender. Ser professor é construir e desconstruir conhecimento, juntamente com seu aluno, dando significado ao que aprende e ensina. A abordagem acontece dentro de um enfoque construtivista, sendo o papel do professor:

[...] assegurar um ambiente dentro do qual os alunos possam reconhecer e refletir sobre suas próprias ideias; aceitar que outras pessoas expressem pontos de vista diferentes dos seus, mas igualmente válidos e possam avaliar a utilidade dessas ideias em comparação com as teorias apresentadas pelo professor. De fato, desenvolver o respeito pelos outros e a capacidade de dialogar é um dos aspectos fundamentais do pensamento Freireano (JÓFILI, 2002, p. 196).

É importante que o professor promova debates, trocas de experiências, ideias e discussões em sala de aula. Assim, os alunos podem contribuir e formular sua opinião sobre determinado assunto, notadamente socializando e ouvindo a opinião de seus colegas. Com esse exercício, destaca-se que o aluno aprende a expor o seu ponto de vista, refletir e argumentar, além de desenvolver seu senso crítico como um sujeito ativo que convive em sociedade.

O conhecimento acadêmico e os saberes do professor devem ser aprofundados e estar constantemente em aperfeiçoamento. Os problemas que surgirão nas aulas são inesperados e precisam de conhecimentos para propor as soluções.

Notadamente, nessa proposta o professor precisa assumir uma postura investigativa, estar disposto a construir e a desconstruir sua prática pedagógica, redobrar sua atenção nas ações de seus alunos, planejar suas aulas a partir dos conhecimentos prévios que os alunos apresentam.

Schön (1995), relata que a prática pedagógica é norteada pela reflexão-na-ação do professor, e é dividida em três momentos distintos e complementares: no primeiro, o professor deve permitir ser surpreendido pelo aluno; no segundo, compreender e refletir sobre as contribuições, argumentações, questionamentos e dúvidas levantadas pelo aluno, para, posteriormente, (re)elaborar o problema; e no terceiro, colocar em prática uma nova proposta.

Berbel (2011, p. 25) afirma que, “Na escola, o professor é o grande intermediador desse trabalho, e ele tanto pode contribuir para a promoção de autonomia dos alunos como para a manutenção de comportamentos de controle sobre os mesmos”.

Nesse processo, o papel do professor é fundamental e o mais importante, pois dependendo do direcionamento de suas aulas, da forma que apresentará o conteúdo da proposta pedagógica desenvolvida, do método que utilizará, definirá o fracasso ou o sucesso de sua proposta na construção do conhecimento.

3.1.2 Papel do discente

Em um mundo com tantas informações que levam a refletir sobre as ações, se é desafiado a todo momento a buscar aperfeiçoamento, caso contrário, não se acompanha o processo de evolução.

Para que se possa entender o aluno que está inserido nos espaços escolares, é preciso ir além do conteúdo ministrado em sala de aula. O perfil dos estudantes é fortemente impactado pelas mudanças sociais, culturais, sofrendo influências, principalmente, das mídias sociais. Não se pode ver ou tratar o aluno com o mesmo olhar do século XX. Ele deve ser visto como protagonista do processo e não como coadjuvante nesse mundo de tantas informações e oportunidades.

O aluno, enquanto sujeito que participa do processo de sua formação, deve ser ativo, participativo, criativo e pensado como um sujeito integral, que convive numa sociedade

sabidamente plural. Assim, como sujeito, o aluno estabelece relações em um ambiente de pluralidades e diversidades, desenvolvendo o espírito cooperativo, a empatia, a criticidade e a ética.

O aluno traz consigo um mundo de informações, hipóteses não confirmadas, incertezas e uma mente digitalizada. A escola precisa urgente passar por algumas mudanças, a fim de receber essas crianças e jovens.

No decorrer dos dias, os alunos também foram perdendo o interesse pelos estudos, muitas vezes, valorizando outros ambientes e vendo a escola como obrigação e não como espaço de aprendizagem e transformação social.

A sociedade espera que a escola seja um ambiente produtor de sujeitos, isto é, de alunos capazes de desenvolver diferentes habilidades, que cheguem ao mercado de trabalho sabendo fazer. Para isso, o aluno precisa querer fazer, o que, muitas vezes, esbarra na falta de atitudes, por não saber trabalhar em equipe, não buscar adequadamente as informações, não se socializar.

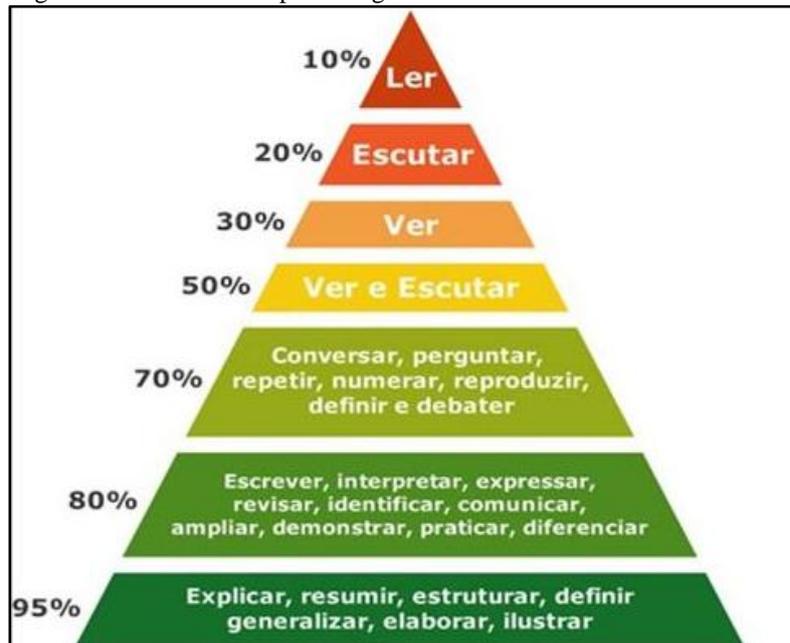
Nesse sentido, a utilização de metodologia ativa pode contribuir nesse processo, uma vez que sua utilização possibilita engajar o aluno de forma interativa, dando significado aos assuntos a serem estudados. A proposta da utilização da metodologia ativa é que os alunos aprendem melhor se eles pensarem, discutirem e utilizarem o que estão aprendendo.

A participação do aluno se dá no exercício do aprender fazendo. Ao professor, cabe conduzir o processo metodologicamente, estimular as atividades dos alunos, apoiar e valorizar as iniciativas na direção do foco maior que é a solução ao problema em estudo. Nesse sentido, a cada etapa, realizam-se aprendizagens de várias ordens, como as de construção de instrumentos de busca de informações, tratamento das informações colhidas, análise, tomada de decisão, síntese, registros sistemáticos etc. (BERBEL, 2011, p. 33).

Conforme Souza, Iglesias e Pazin (2014), o papel do aluno na utilização das Metodologias Ativas é o de personagem principal, o maior responsável pelo processo de aprendizado. A construção da aprendizagem ocorre através das ações de pesquisa, observação, organização de dados, trocas de informações, experimentação, interpretação crítica, planejamento, descobertas e (re)construções com a participação efetiva e ativa do aluno nesse processo.

De acordo com William Glasser, para que as pessoas consigam aprender, são utilizados diversos meios. Na Figura 1, com a Pirâmide de Aprendizagem, são apresentados os principais meios utilizados para aprender.

Figura 1 - Pirâmide de Aprendizagem.



Fonte: <<https://bit.ly/2JkLgLz>>.

Pode-se perceber na Pirâmide de Aprendizagem, que quando o aluno está envolvido de forma ativa nas atividades propostas, explicando e desenvolvendo estratégias para sua resolução, ele consegue absorver os conteúdos mais facilmente e de maneira crítica, autônoma e participativa.

Além do aluno possuir maior autonomia no processo de aprendizagem, ele desenvolve autoconfiança, elabora estratégias e torna-se apto à resolução de problemas; constrói seu conhecimento por meio de pesquisas, informações, hipóteses, estratégias, socialização, mediadas pelo conhecimento do professor. Com isso, torna-se protagonista na construção de seu conhecimento.

3.2 Metodologias Ativas: corrente teórica

A utilização das Metodologias Ativas é fundamentada na teoria da pedagogia de Paulo Freire. Ele defendia uma educação capaz de conhecer e agir a partir da cultura do educando, pensava que partindo da realidade do educando, a educação faria sentido. Fazia crítica ao modelo de “educação bancária”, onde o professor é o centro do processo de aprendizagem, o detentor do conhecimento, o responsável em depositar conhecimentos em seus alunos.

Paulo Freire apresenta uma fundamentação humanista, onde defende que o professor precisa desenvolver nos seus alunos a autonomia, a consciência crítica e a tomada de

decisões. Nesse sentido, na concepção freireana, conseqüentemente o principal objetivo da escola é ensinar o aluno a ler e a entender o mundo, para assim poder contribuir em sua transformação.

Freire define o homem como um ser livre e que aprende através das suas relações com o mundo. Não considera o homem como um ser vazio, um mero depósito de conteúdo. Defende a construção do conhecimento através da relação e da problematização com o meio. Como ele diz: “Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens educam-se entre si, mediatizados pelo mundo”.

Nesse processo educativo, o professor é o mediador e cabe a ele, através de sua experiência e conhecimentos, auxiliar os educandos na construção da aprendizagem, levando sempre em consideração os saberes trazidos pelos educandos, relacionando-os com os saberes escolares.

Ao aluno deve ser dado a oportunidade de interação, participação, descoberta, socialização, pois com isso ele melhora sua autoestima e confiança. Conseguindo participar das aulas de forma ativa, certamente ele desenvolverá sua autonomia, tornando-se um sujeito crítico e ativo em sociedade.

O aluno precisa saber ler o mundo e entender a realidade, não aceitando o que é visto, divulgado ou noticiado como verdade absoluta. É preciso preparar os alunos para o não conformismo, levando-os a conhecer os conteúdos, mas, não como uma verdade única. Deve-se tirá-los da zona de conforto, estimulá-los e instigá-los para a busca e o querer aprender.

Em geral, os educadores precisam desenvolver nos alunos a capacidade de pensar, criticar, criar hipóteses, elencar problemas, utilizar estratégias e tentar solucionar situações problemas, com uma postura autônoma e ética:

As crianças precisam crescer no exercício desta capacidade de pensar, de indagar-se e de indagar, de duvidar, de experimentar hipóteses de ação, de programar e de não apenas seguir os programas a elas, mais do que propostos, impostos. As crianças precisam ter assegurado o direito de aprender a decidir, o que se faz decidindo. Se as liberdades não se constituem entregues a si mesmas, mas na assunção ética de necessários limites, a assunção ética desses limites não se faz sem riscos a serem corridos por elas e pela autoridade ou autoridades com que dialeticamente se relacionam (FREIRE, 2003, p. 25).

Observa-se que hoje os alunos querem conhecimentos que fazem sentido para sua vida. Por isso, é indispensável relacionar os conhecimentos escolares com a realidade, os saberes dos estudantes e suas experiências devem contribuir na preparação e no

desenvolvimento das aulas. As aulas através de pesquisas, reflexões e descobertas, produzem e transformam saberes construídos.

As aulas corriqueiras, monótonas e mecânicas, precisam dar espaço para aulas dinâmicas envolvendo os alunos de forma ativa, desafiando-os na busca do conhecimento. Freire descreve que a mecanização dos conteúdos não gera o aprendizado:

A memorização mecânica do perfil do objeto não é aprendizado verdadeiro do objeto ou do conteúdo. Neste caso, o aprendiz funciona muito mais como *paciente* da transferência do objeto ou do conteúdo do que como sujeito crítico, epistemologicamente curioso, que constrói o conhecimento do objeto ou participa de sua construção (FREIRE, 2011, p. 67).

As aulas, na corrente freireana, devem propor aos educandos uma estratégia de estímulo, despertando a curiosidade e a postura ativa através da busca e experimentação. Assim como devem propor a análise crítica no contexto social, aproximando os conteúdos trabalhados em sala de aula com a realidade do educando.

O professor precisa fomentar a problematização, o questionamento, gerar dúvidas e incertezas nos seus alunos, para que, através da pesquisa, busca e trocas de saberes, consigam (re)construir o conhecimento. Para Freire, o professor necessita saber escutar o educando, pois acredita que através do diálogo ocorre o ensino. Por isso, a necessidade de interação e socialização dos saberes é de fundamental importância.

[...], o diálogo é uma exigência existencial. E, se ele é o encontro em que se solidarizam o refletir e o agir de seus sujeitos endereçados ao mundo a ser transformado e humanizado, não pode reduzir-se a um ato de depositar ideias de um sujeito no outro, nem tampouco tornar-se simples troca de ideias a serem consumidas pelos permutantes (FREIRE, 2005, p. 91).

A teoria de Paulo Freire está dividida em três momentos de aprendizagem. No primeiro momento, o educador analisa o que o educando já sabe, o que ele conhece, para poder relacionar o conteúdo a ser trabalhado com sua cultura e, posteriormente, avançar no ensino. No segundo momento há a exploração, onde a partir das questões e temas em estudo, os alunos são desafiados a debater e socializar o que entendem sobre o assunto discutido. A partir disso, o professor abre a possibilidade de o aluno construir o caminho de passagem do senso comum para o senso crítico da realidade em questão. No terceiro momento, volta-se do abstrato para o concreto, ou seja, a etapa de problematização: nesse momento os alunos devem agir e tomar decisões para superar os desafios propostos, o que promoverá a conscientização do aluno.

Diante disso, é preciso buscar novas alternativas e novas metodologias de ensino, metodologias estas que despertem o interesse, o gosto pela busca e a interação entre professor e aluno, aluno e aluno. Precisa-se objetivar o protagonismo do educando, desenvolvendo a autonomia e a criticidade, a fim de promover uma aprendizagem significativa.

o método ativo constitui-se numa concepção educativa que estimula processos de ensino e de aprendizagem numa perspectiva crítica e reflexiva, em que o estudante possui papel ativo e é corresponsável pelo seu próprio aprendizado. O método envolve a construção de situações de ensino que promovam uma aproximação crítica do aluno com a realidade; a opção por problemas que geram curiosidade e desafio; a disponibilização de recursos para pesquisar problemas e soluções; bem como a identificação de soluções hipotéticas mais adequadas à situação e a aplicação dessas soluções. Além disso, o aluno deve realizar tarefas que requeiram processos mentais complexos, como análise, síntese, dedução, generalização (MEDEIROS, 2014, p. 43).

O exposto valoriza os conhecimentos dos estudantes, bem como valoriza suas opiniões, pois ouvindo-os exercita a empatia e também encoraja ao processo de busca do aprendizado.

Outro teórico que embasa o uso de metodologias ativas é John Dewey. Para esse autor, a aprendizagem ocorre pela ação e não há separação entre vida e educação. Portanto, seu indicativo é de que os alunos precisam ser preparados para a vida no seu percurso formativo.

O autor defende que, a escola deve aproximar os conteúdos a serem trabalhados com a realidade dos educandos, respeitando a sua condição de vida. A aprendizagem deve ser significativa, proporcionando experiências relacionadas ao contexto social ao qual eles estão inseridos. Para ele, “A educação torna-se, desse modo, uma ‘contínua reconstrução de experiência’” (DEWEY, 1989, p. 7).

O professor precisa propor situações onde o aluno possa analisar os fatos, refletir, organizar ideias, interagir, trocar experiências e finalmente propor uma solução. Portanto, para Dewey a relação entre a escola e a vida do aluno é o ponto essencial para o aprendizado:

Está, porém, ainda por se provar que o ato de aprender se realiza mais adequadamente quando é transformado em uma ocupação especial e distinta. A aquisição isolada do saber intelectual, tentando muitas vezes a impedir o sentido social que só a participação em uma atividade de interesse comum pode dar, - deixa de ser educativa, contradizendo o seu próprio fim. O que é aprendido, sendo aprendido fora do lugar real que tem na vida, perde com isso o seu sentido e o seu valor (DEWEY, 1978, p. 27).

O autor relaciona cinco condições para uma aprendizagem integrada à vida. Segundo ele, só se aprende o que se pratica, mas não basta somente praticar; é preciso haver uma reestruturação, uma reconstrução crítica e consciente da própria experiência. Assim, pontua que as pessoas aprendem por associação e nunca uma única coisa ou uma coisa só, e, por último, e que se considera dentre elas essencial no processo de aprendizagem, é que toda a aprendizagem deve ser integrada à vida do aluno.

O pensamento de Dewey (1978), no que diz respeito a uma participação ativa dos estudantes nas atividades propostas, é que os alunos poderão compreender melhor os objetos, os acontecimentos e os atos do seu contexto social.

Diante do exposto, percebe-se que tanto a perspectiva de Freire quanto a de Dewey amparam uma abordagem com o método ativo. Os dois autores propõem configurar o aprendizado em torno da realidade do aluno, valorizando especialmente suas experiências de vida.

3.3 Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL com a utilização de tecnologias digitais

De acordo com Moraes (2006) e Mamede (2001), a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL, é uma perspectiva de ensino e aprendizagem fundamentada no construtivismo. Os conhecimentos precisam ser (re)construídos e o processo de aprendizagem é centrado no estudante.

Ainda, conforme os autores, a aprendizagem necessita ser orientada para a compreensão e a resolução dos problemas apresentados. O aluno é o sujeito ativo e o professor atua como mediador, auxiliando o aluno a alcançar seus objetivos no processo de aprendizagem.

Para Paiva (2016), aprendizagem ativa é um conjunto de práticas pedagógicas centradas no aluno, de forma que ele aprenda os conhecimentos propostos por meio da interação entre ele e seus colegas, estimulando assim o pensamento crítico.

Outra característica desta metodologia em questão é fazer com que os estudantes aprendam, de forma colaborativa e através de desafios. As soluções a serem exploradas pelo professor podem contar com a utilização de tecnologia, recurso esse que incentiva a habilidade de investigar, (re)criar, comparar e analisar uma determinada situação.

Segundo Woods (1996), com a aplicação da PBL, os alunos devem desempenhar as oito tarefas seguintes:

1. Explorar o problema, levantar hipóteses, identificar e elaborar as questões de investigação;
2. Tentar solucionar o problema com o que se sabe, observando a pertinência do seu conhecimento atual;
3. Identificar o que não se sabe e o que é preciso saber para solucionar o problema;
4. Priorizar as necessidades de aprendizagem, estabelecer metas e objetivos de aprendizagem e alocar recursos de modo a saber o que, quanto e quando é esperado e, para a equipe, determinar quais tarefas cada um fará;
5. Planejar, delegar responsabilidades para o estudo autônomo da equipe;
6. Compartilhar o novo conhecimento eficazmente, de modo que todos os membros aprendam os conhecimentos pesquisados pela equipe;
7. Aplicar o conhecimento para solucionar o problema;
8. Avaliar o novo conhecimento, a solução do problema e a eficácia do processo utilizado e refletir sobre o processo.

O trabalho em equipe é fundamental na aplicação dessa metodologia. De acordo com Freitas (2015), a cooperação e a colaboração são atitudes essenciais à formação do ser humano. A escola precisa estimular essa prática, objetivando o crescimento e o fortalecimento do trabalho em sala de aula.

Portanto, conforme Woods (1996), a utilização da PBL consiste no seguinte: inicialmente o professor forma as equipes de trabalho, apresenta um desafio ou propõe um problema. As equipes precisam tentar solucionar o problema proposto com os conhecimentos que possuem. Após a organização de suas ideias, os alunos socializam, discutem com a classe e anotam questões relacionadas ao problema, levando em consideração o que compreenderam, o que não compreenderam, o que sabem a respeito e o que precisam saber.

Após partilharem suas descobertas, dificuldades e saberes com a classe, o grupo novamente explora as questões de aprendizagem, integrando os novos conhecimentos ao contexto do problema, planejam e criam estratégias de investigação para solucionar o que lhes foi proposto.

Terminando o trabalho e chegando à solução do problema, os alunos podem vir a definir novas questões de aprendizagem à medida que progridem neste processo. Para finalizar, os alunos avaliam seus pares e a si mesmos com o objetivo de desenvolver a habilidade de auto avaliação para construir uma aprendizagem autônoma e eficaz.

Segundo Torres (2002), a construção do conhecimento ocorre com:

Participação ativa do aluno no processo de aprendizagem; mediação da aprendizagem feita por professores e tutores; construção coletiva do conhecimento, que emerge da troca entre pares, das atividades práticas dos alunos, de suas reflexões, de seus debates e questionamentos; interatividade entre os diversos atores que atuam no processo; estimulação dos processos de expressão e comunicação; flexibilização dos papéis no processo das comunicações e das relações a fim de permitir a construção coletiva do saber; sistematização do planejamento, do desenvolvimento e da avaliação das atividades; aceitação das diversidades e diferenças entre alunos; desenvolvimento da autonomia do aluno no processo ensino aprendizagem; valorização da liberdade com responsabilidade; comprometimento com a autoria; valorização do processo e não do produto (TORRES, 2002, p. 50).

Nesse processo, o papel do professor é muito importante. Ele será o responsável por elencar uma situação problema que instigue e leve o aluno a uma inquietação, um desequilíbrio, que de fato o estimule a querer resolvê-lo. Portanto, a escolha do problema é o ponto principal desta concepção, que deve ser cuidadosamente escolhido e mediado pelo professor.

O professor assume o papel de mediador, provocador, instiga o aluno a buscar as soluções, precisa intermediar e saber a hora de interferir no processo. Deve dar retorno através de *feedback*, fazendo com que os alunos percebam onde cometeram erros e acertos através do caminho que escolheram para chegar ao resultado. Essa reflexão contribuirá para a construção do conhecimento, estimulando a crítica e a autonomia dos jovens.

A PBL é um método caracterizado pelo uso de problemas do mundo real, para encorajar os alunos a desenvolverem pensamento crítico e habilidades de solução de problemas e adquirirem conhecimento sobre os conceitos essenciais da área em questão (RIBEIRO; ESCRIVÃO FILHO; MIZUKAMI, 2003).

Para isso, de acordo com os estudos de Van Hiele, os alunos precisam estar no quarto nível de Pensamento Geométrico, pois é na quarta fase ou fase 4, que eles conseguem utilizar os conhecimentos já adquiridos para a resolução de situações problemas.

Referente a resolução de problemas, a BNCC considera importante contemplar diversos contextos, ressaltando que:

[...] os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática (2019, p. 535).

Destaca-se que o ensino deve vincular a escola e a vida do educando, explorando todos os componentes curriculares. É importante e necessário esse novo olhar para o ensino, onde a interação com o meio amplia as potencialidades e também auxilia nas tomadas de decisões.

Portanto, a utilização desse método para o desenvolvimento do conteúdo de prismas, parece ser adequada para desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, uma vez que, as dificuldades apresentadas pelos alunos em Geometria estão diretamente ligadas à visualização, à representação e à compreensão de conceitos fundamentais relacionados com o mundo real.

De acordo Paiva (2016), para elaborar os problemas devem ser observados alguns critérios: não devem ser muito simples nem muito complexos; devem conter situações próximas da realidade dos alunos; devem ter um contexto próximo ao que pode ser encontrado na prática; devem permitir a discussão, não se restringindo a perguntas e respostas diretas.

Com a utilização da PBL é dado ao aluno o direcionamento. Ele precisa aprender a analisar, refletir, investigar, buscar alternativas e produzir conhecimentos relevantes, tornando-se participante ativo no processo de aprendizagem. Para que esse propósito se concretize, conforme a BNCC (2019):

os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões conforme a e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (p. 529).

O uso das diversas tecnologias digitais contribui e possibilita, aos estudantes, alternativas que notadamente facilitam a aprendizagem, desenvolvem e reforçam a capacidade de testar, comparar, analisar, avaliar, validar e, a partir disso, raciocinar logicamente, argumentando, construindo ou reconstruindo conceitos nas mais diversas áreas do conhecimento.

Segundo a BNCC (2019, p. 474), deve-se considerar as tecnologias digitais e a computação porque:

- **pensamento computacional:** envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;

- **mundo digital:** envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros), compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger o grande volume de informação;
- **cultura digital:** envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

De acordo com as definições acima apresentadas, os estudantes no Ensino Médio precisam estar inseridos na cultura digital, pois são os protagonistas do processo de aprendizagem e a utilização das tecnologias digitais auxiliam no reconhecimento das potencialidades para a realização de atividades na busca de dados e informações nas diferentes mídias, apropriando-se e ampliando o acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho.

Outros recursos importantes são as ferramentas de softwares e aplicativos, que facilitam muito a visualização, demonstração e identificação de situações que seriam impossíveis sem a utilização de tais recursos. As diferentes tecnologias e aplicativos podem ser utilizados para auxiliar e facilitar a compreensão e construção de alguns conceitos matemáticos, também podem solucionar problemas complexos através do espírito de investigação e criatividade do educando.

Portanto, além da utilização da PBL, se faz necessária a utilização de tecnologias digitais, uma vez que os alunos apresentam dificuldade na representação, identificação e visualização dos objetos tridimensionais.

3.4 Breve estudo do que já foi trabalhado

Prosseguindo com os objetivos propostos, foi desenvolvida uma pesquisa sobre teses e dissertações com o objetivo de verificar algumas produções acadêmicas que abordam as

Metodologias Ativas para o desenvolvimento do conteúdo de Geometria Espacial – Prismas. A pesquisa foi desenvolvida nas áreas de Ensino e Multidisciplinar, Educação e Educação Matemática. Pretende-se analisar quais são as metodologias ativas e as tecnologias digitais utilizadas na pesquisa, suas contribuições e os resultados obtidos nessas produções.

De acordo com Fiorentino e Lorenzato (2012, p. 60), “A pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensão acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito”.

Foram escolhidas publicações com datas entre 2015 e 2018. As buscas foram feitas considerando as palavras-chaves: “metodologias ativas” ou “Geometria Espacial”, em qualquer lugar do texto, essa busca inicial gerou 709 resultados, um número bastante elevado.

O principal objetivo da revisão foi encontrar aplicações de metodologias ativas ao conteúdo de Geometria espacial – prismas, com utilização de tecnologias digitais. A partir disso foram selecionadas apenas as publicações que abordam metodologias ativas e tecnologias digitais na área de ensino, educação Matemática, ensino de ciências e Matemática e tecnologias. A partir deste detalhamento, o novo resultado gerado reduziu para 211 publicações.

Na revisão das publicações foram selecionadas apenas as que abordam metodologias ativas aplicadas no contexto de Geometria espacial. Da mesma forma que anteriormente, com a adoção destes novos critérios, o número de publicações selecionadas caiu para 39, sendo todas elas dissertações de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Das 39 dissertações foram selecionadas 6 para ser analisadas. Inicialmente foi feita a leitura e o fichamento do material. Na sequência foram analisados os dados para responder aos objetivos geral e específicos desta pesquisa, que são de pesquisar qual é a influência das metodologias ativas e das tecnologias digitais para o desenvolvimento do conteúdo de prismas em alunos do Ensino Médio. Partindo dessa pesquisa, a intenção é desenvolver uma sequência didática do conteúdo de prismas, através de investigações práticas, de problemas desafio e do uso de tecnologias digitais, com a utilização de metodologias ativas que descrevam o pensamento geométrico, aprofundado nas metodologias ativas como alternativa didático-pedagógica para o ensino. O resultado da pesquisa é apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Trabalhos Selecionados Pesquisa de Campo.

AUTOR	TÍTULO	TIPO/ANO INSTITUIÇÃO	METODOLOGIA UTILIZADA	TECNOLOGIA UTILIZADA
JULIO CESAR MARTINS DE FREITAS	Trabalhando poliedros através de aprendizagem cooperativa utilizando softwares	Dissertação/ 2015/ UFCA	Aprendizagem Cooperativa	Softwares: Poly e Educandus
THIAGO YAMASHITA PAIVA	Aprendizagem Ativa e Colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da Matemática	Dissertação/ 2016/ MAT/UnB	Peer Instruction ou Aprendizagem pelos Colegas (ApC)	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
LEYDE DAYANE MARTINHO DE ANDRADE	O processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial, utilizando Calques 3D fundamentado na teoria da Aprendizagem Significativa	Dissertação/ 2018/ UERR	Calques 3D	Aprendizagem Significativa
VANESSA DE SOUSA QUEIROZ	Contribuições da linguagem SCRATCH para o ensino da Geometria	Dissertação/ 2018/ IFSP	Linguagem de programação Scratch e software auxiliares	Aprendizagem Significativa e Ativa
ROSILEI CARDOZO MOREIRA	Ensino da Matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a “sala de aula invertida”	Dissertação/ 2018/ UFAM	Flipped Classroom	Sala de aula Invertida
CRISTINA SCHMITT	A interação das TDIC à Educação Matemática: Um estudo sobre o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas no ensino e aprendizagem de Matemática	Dissertação/ 2018/ IFSP	Google for Education e a Khan Academy	Metodologias ativas pautadas no Ensino Híbrido: Sala de Aula Invertida (SAI) e a Rotação por Estações

Fonte: Autora, 2019.

Após a leitura e análise dessas dissertações pode-se concluir que o uso da aprendizagem ativa, além de incentivar os alunos na construção do conhecimento, desenvolve as habilidades e competências necessárias para o mundo do trabalho. Com a utilização dessas metodologias, o aluno desenvolve o pensamento crítico e reflexivo, valores éticos, trabalho em equipe, autonomia e protagonismo. É possível afirmar, então, que as metodologias ativas são capazes de promover o processo de ensino-aprendizagem satisfatório.

Outro ponto evidenciado, é que o estudo das metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial é escasso, apresentando pouquíssimas contribuições. Com isso, verifica-se a importância dessa proposta de pesquisa.

Com o estudo realizado, pode-se verificar também que a utilização de software no contexto educacional é uma prática pouco adotada pelos educadores. Em síntese, há uma necessidade muito grande de novas pesquisas que busquem identificar quais os caminhos que a escola brasileira está tomando na busca pelo saber, que metodologias estão sendo

adotadas e quais as principais contribuições das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem.

3.5 Produto educacional

O produto educacional, que se encontra disponível no seguinte endereço <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/581810>>, é um material que propõe uma sequência didática para o estudo de Prisma a partir do Modelo de Van Hiele e Problem Based Learning (PBL). As atividades propostas nele objetiva auxiliar os professores como suporte teórico e pedagógico para o desenvolvimento, aplicação e aprendizado do conteúdo de Prisma para alunos da Terceira Série do Ensino Médio.

Na sequência didática foi optado pelo uso da Metodologia Ativa PBL associada a recursos tecnológicos, de modo a incentivar a habilidade de investigação, reflexão e criação de estratégias próprias para a resolução de situações problemas vinculados ao dia a dia dos alunos.

Essa proposta didática foi desenvolvida no curso de mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, RS, sob a orientação do professor Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

Sua aplicação ocorreu em uma escola da rede estadual, do município de Maravilha/SC, com alunos da Terceira Série do Ensino Médio, partindo de uma situação problemas que a escola apresenta (construção de uma piscina para a prática de natação nas aulas de esporte), os alunos foram instigados a contribuir nesse projeto da construção da referida piscina. A mesma será construída para a realização de atividades esportivas para as aulas de natação, no componente curricular de esporte e educação física.

A partir desta questão norteadora inicial foi pensada uma proposta que possa levar os alunos a desenvolver as habilidades necessárias de visualização, análise, dedução formal e informal do modelo de Van Hiele no estudo de prisma, bem como uma proposta que viesse a contribuir, de maneira participativa e crítica, nas resoluções de situações problemas propostos aos mesmos.

A aplicação da sequência didática foi desenvolvida em forma de oficina com duração de três 3 encontros, ou seja, três noites, totalizando 15 horas aula.

O Modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico é composto por cinco níveis de compreensão: Nível 01 (nível básico): Visualização; Nível 1: Análise; Nível 2: Dedução Informal; Nível 3: Dedução e Nível 4: Rigor. Nessa sequência pretende-

se atingir apenas os três primeiros níveis, uma vez que o Nível 4: Rigor, é o caso do estudo da geometria com outra estrutura axiomática, que não é abordada no ensino médio, como a geometria não-euclidiana, o que não se pretende explorar nesse momento.

Nesse processo é imprescindível levarmos em conta os conhecimentos e as experiências matemáticas já vivenciadas pelos alunos, onde o professor precisa criar situações de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade.

O ensino deve considerar a necessidade de vincular a escola e a vida, envolvendo os componentes curriculares, uma vez que a proposta do Ensino Médio consiste em uma visão integrada e aplicada a realidade e ao mercado do trabalho.

Inicialmente verificou-se em que nível de pensamento geométrico o aluno estava, através do modelo de Van Hiele, posteriormente foram aplicadas atividades desafiadoras que instigassem os alunos, para que estes conseguissem progredir de nível.

A associação da PBL com o modelo de Van Hiele tem o objetivo de verificar a relação existente entre os processos envolvidos na resolução de problemas e a progressão dos alunos, nos níveis de compreensão do pensamento geométrico.

Para tanto, um dos objetivos dessa proposta didática é que os alunos consigam compreender os conceitos de primas formulando, a partir de sua prática, conceitos mínimos referentes ao conteúdo e que os mesmos percebam a importância desses conhecimentos.

O produto Educacional aqui mencionado é o foco principal dessa dissertação e através de sua aplicação será realizada a análise dos resultados obtidos pela mesma ao qual está descrito no próximo capítulo.

4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DE RESULTADOS

Educar com o objetivo de desenvolver as habilidades e competências necessárias para a formação de cidadãos críticos e proativos requer do professor eficiência, conteúdo, estratégias, metodologias, dedicação, tempo, formação, enfim podem-se listar inúmeras características que são necessárias ao professor do século XXI para que o mesmo possa trabalhar na educação.

Assim como o conteúdo, as metodologias utilizadas também são muito importantes para que ocorra o aprendizado. De acordo com Schmitt (2018), os professores de Matemática devem proporcionar aulas diferenciadas, com a utilização de TDIC, com formato inovador e atraentes para os alunos contemporâneos. Ressalta que para a disciplina deixar de ser considerada chata e difícil necessita de:

[...] inovação necessária para transformar os alunos que hoje se configuram como aprendizes passivos, em pesquisadores e investigadores do saber, por meio de uma aprendizagem problematizadora e instigante – não só no campo da Matemática, mas em todos os outros – orquestrada por um professor mediador, capaz de formar alunos críticos, incentivando-os a percorrer seus próprios caminhos na construção de conhecimentos para se tornarem cidadãos emancipados neste mundo em constante transformação (SCHIMITT, 2018, p. 153).

Por muitas vezes, ouve-se colegas de profissão reclamando que os alunos não aprendem, não apresentam interesse, estão desmotivados e não contribuem no processo de ensino e aprendizado. Hoje, os alunos exigem muito mais que transmissão de conhecimentos, eles querem interagir, aprender de forma ativa e significativa. Querem, merecem e precisam ser tratados como sujeitos do seu processo de construção de conhecimento.

Portanto, precisa-se rever as estratégias e metodologias, dedicar tempo ao planejamento e proporcionar aos alunos aulas atraentes e ativas, pois, se por um lado os alunos não apresentam interesse, por outro, o professor não propicia aulas dinâmicas e envolventes.

Após a vivência de muitos anos no magistério, atuando principalmente com o Ensino Médio, percebe-se que os alunos apresentam muita dificuldade no conteúdo de Prismas. Não conseguem compreender conceitos mínimos, necessários para a interpretação e resolução de problemas. Muito menos conseguem transpor esses conteúdos às situações voltadas à sua prática diária.

Diante do exposto optou-se pela utilização da Metodologia Ativa (PBL - (Problem Based Learning), associada à tecnologia digital. De acordo com Guedes, Andrade e Nicolini (2015 apud GOMES; BRITO; VARELA, 2016), a organização dos conteúdos da PBL deve ser estruturada de forma que o aluno desenvolva, através de situações problemas⁵ fundamentadas na vida real (reais ou simulados), aprendizagem por meio da dúvida, favorecendo assim o seu aprendizado.

Considerando a BNCC (2019), deve-se garantir aos alunos as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, onde eles sejam os protagonistas nesse processo. Deve-se, enquanto educadores, formar os alunos para a vida, assegurar uma formação crítica, responsável e que permita a tomada de decisões e resoluções de problemas que se apresentam no cotidiano.

Dessa maneira, a pesquisa seguiu a perspectiva de atingir o objetivo de analisar e de identificar o nível de Pensamento Geométrico que os alunos se encontram e, a partir do Modelo de Van Hiele, desenvolver diversas atividades vinculadas ao contexto social para que os mesmos consigam progredir e atingir um nível de pensamento geométrico mais elevado.

Com isso, se quer verificar se a utilização da Metodologia Ativa PBL, associada ao modelo de Van Hiele, contribuiu para elevar o nível de pensamento geométrico. Desta forma, salienta-se também que os alunos necessitam aprender a formular e a resolver problemas envolvendo diversos conteúdos. Por fim, ressalta-se que a proposta é de que os alunos consigam resolver problemas envolvendo o conteúdo de Prismas em vários contextos.

4.1 Dados da Escola e da Turma

A Escola atende atualmente cerca de 1300 alunos nos três turnos, desde as Séries Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio Regular. Também atende o curso de Magistério, Ensino Médio Inovador (Ensino Integral), além do Ensino Especial, que atende portadores de deficiência auditiva e visual. A escola oferece aos seus alunos, laboratórios de Química, Matemática, informática e Lego. Disponibiliza, também, aos professores e alunos rede *wi-fi*.

Conforme o Projeto Político Pedagógico – PPP (2019) da escola onde foi aplicado o produto educacional:

⁵ **Problema:** Situação que necessita ser resolvida, descoberta de informações ou resultados.

O Objetivo da escola é construir conhecimento e garantir a aprendizagem, ajudando na formação de uma sociedade mais consciente e responsável. É também papel da escola ensinar a olhar o mundo bem adiante do nosso alcance. A escola deve ser um lugar que demonstre organização e persistência, onde se eduque para a vida, um espaço democrático, que trabalhe o conhecimento científico para gerar mudanças na sociedade, onde se promova a socialização, deve ser transformadora, preparando os educandos para serem cidadãos que saibam lutar e buscar caminhos para viver dignamente.

A filosofia e o papel dos professores, ainda segundo o Projeto Político Pedagógico – PPP (2019), são:

A filosofia da Escola é contribuir para a formação de seres humanos que valorizem o conhecimento, sendo íntegros, solidários, atuantes, responsáveis, com discernimento e comprometidos com a defesa da vida. Neste sentido, em consonância com a Proposta Curricular de Santa Catarina e a Base Nacional Comum Curricular, a Escola faz a opção pela concepção histórico-cultural de aprendizagem, também chamada de **sócio-histórica** ou **sociointeracionista**, inspirados em Vygotsky, que defende que a relação professor e aluno num sentido recíproco de interação contínua são necessários para a aprendizagem onde o aluno é agente do processo.

Os profissionais da educação devem assumir o compromisso com o processo educacional e com a proposta elaborada. Dividir responsabilidades, liderar mudanças, ter postura determinada, união de ideias e lutar para alcançarem objetivos. Devem também se utilizar técnicas e práticas que façam com que o aluno se sinta motivado a criar, participar, permanecer e até mesmo ter acesso à Escola, não sendo discriminado, mas tratado com igualdade.

A sequência didática foi aplicada em uma Escola da Rede Estadual de Ensino no município de Maravilha, estado de Santa Catarina. Foi aplicada em uma turma de Terceiro Ano do Ensino Médio noturno. Os encontros aconteceram em três noites em forma de oficina, totalizando 15 horas aulas.

A oficina se desenvolveu nos dias dezoito, dezenove e vinte de novembro de dois mil e dezenove. A turma em que foi aplicada a sequência didática é composta por 27 alunos, sendo 18 do sexo feminino e 09 do sexo masculino. Os alunos estudam no turno noturno e trabalham durante o período diurno. É uma turma, aparentemente, desmotivada, que desenvolve as atividades propostas conforme as notas que são vinculadas às mesmas, sem muito interesse e participação. Outra característica da turma é o individualismo, pois não socializam as informações e conhecimentos, bem como fazem poucas contribuições durante as aulas.

O conteúdo desenvolvido foi o estudo de Prismas a partir da utilização do Modelo de Van Hiele, aliado à PBL e ao uso das tecnologias digitais. Nesse processo metodológico de aprendizagem, o aluno é protagonista, principal responsável pelo seu processo de aprendizagem, e o professor é o mediador, facilitador e precisa contribuir a partir das

atividades propostas, para que os alunos consigam evoluir no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Perseguindo os objetivos propostos, foi utilizado o recurso das tecnologias digitais - aplicativo Geogebra - para a compreensão e construção de conceitos mínimos da Geometria plana e espacial, as quais, sabe-se, são favorecedoras na visualização de figuras bi e tridimensionais.

4.2 A pesquisa

A pesquisa realizada é justificada em dois aspectos: pessoal e profissional. O aspecto pessoal surgiu da necessidade de estabelecer uma relação com o novo, ou seja, após vinte anos de docência, vendo os alunos cada vez mais desmotivados com métodos de ensino convencionais, despertou a necessidade de buscar novas metodologias de ensino (PBL), aliadas ao uso de tecnologia como recurso para o processo de aprendizagem no conteúdo de Prismas. Por sua vez, o aspecto profissional tem relação com o fato de que a Geometria Espacial está muito presente na vida. A frustração profissional, em específico no conteúdo de Prismas, se deve ao fato de que os educandos apresentam grandes dificuldades de interpretação, não conseguindo compreender conceitos relativamente simples e de aplicá-los em situações e contextos diferentes. Diante disso, compreende-se que um conteúdo de tamanha importância na vida das pessoas, merece um estudo aprofundado para que sua aprendizagem seja adequada.

A Pesquisa apresentada será qualitativa, quantitativa e do tipo intervenção pedagógica. A abordagem será muito mais qualitativa que quantitativa, mas por se tratar e apresentar no decorrer da análise de dados, comparação de índices e utilização de cálculos percentuais se fez necessário sua utilização, mesmo que discretamente. A intervenção pedagógica, por se tratar da aplicação do Produto Educacional realizada pela pesquisadora e posteriormente a análise dos seus dados.

Na abordagem qualitativa os dados são construídos ao longo do processo de forma descritiva. O processo é mais importante que o resultado final, onde o investigador analisa detalhadamente o produto, bem como o percurso e progresso que os alunos obtiveram após o estudo realizado. O tipo participante é devido à pesquisa ser desenvolvida pelo próprio pesquisador.

Destaca-se o fato de que para Moreira, a pesquisa qualitativa tem como interesse central:

[...] interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos a suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa, isto é, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse. Os dados obtidos por meio dessa participação ativa são de natureza qualitativa e analisados correspondentemente. As hipóteses são geradas durante o processo investigativo. O pesquisador busca universais concretos alcançados através do estudo profundo de casos particulares e da comparação desse caso com outros estudados também com grande profundidade. Através de uma narrativa detalhada, o pesquisador busca credibilidade para seus modelos interpretativos (2002, p. 2).

De acordo com o autor, o pesquisador precisa descrever de forma detalhada todos os fatos ocorridos no seu produto para, posteriormente, analisar, comparar e interpretar os dados gerados nesse processo.

Moreira (2000), elencou em seu estudo os paradigmas qualitativos para uma pesquisa educativa, detalhando e conceituando os pressupostos, os objetivos, os métodos, o papel do pesquisador e a retórica, conforme pode ser observado no Quadro 3, apresentado a seguir.

Quadro 3 - Pesquisa Educativa.

Paradigmas Qualitativos	
Pressupostos	Realidade socialmente construída; não há realidade independente dos esforços mentais de criar e moldar; o que existe depende da mente humana. O que se pesquisa não é independente do processo de pesquisa. Os instrumentos não têm lugar independentemente de aquilo que têm que medir, são extensões dos pesquisadores na sua tentativa de construir ou de dar forma à realidade. A realidade não tem existência prévia à pesquisa e deixará de existir se a pesquisa for abandonada. Não há dualismo sujeito-objeto. Verdade é questão de concordância em um contexto (Smith, 83).
Objetivos	Procuram a compreensão do fenômeno social segundo a perspectiva dos atores através de participação em suas vidas (Firestone, 87). Focam significados e experiências; ações em vez de comportamentos (Eisner, 81). Procuram a explicação interpretativa; heurísticas em vez de algoritmos; universais concretos alcançados através do estudo detalhado de um caso e da comparação com outros estudados com igual detalhe (Erickson, 86).
Métodos	Usam técnicas etnográficas, estudos de caso, antropologia educativa. Ocupam-se de observação participativa; significados individuais e contextuais; interpretação; desenvolvimento de hipóteses; indicadores de baixa inferência; casos, grupos ou indivíduos específicos; particularização. Podem fazer uso de estatística descritiva. São bem mais indutivos.
Papel do Pesquisador	Imerso no fenômeno de interesse (Firestone, 87); participante. Faz anotações, ouve, observa, registra, documenta, busca significados, interpreta. Procura credibilidade.
Retórica	Persuasiva, descritiva, detalhada. Extenso uso de transcrições, vinhetas, documentos, exemplos, comentários interpretativos. Usa a linguagem cotidiana com suficiente detalhe para evidenciar que são válidas as interpretações dos significados tidos pelos atores (Erickson, 86).

Fonte: Adaptado de Moreira, 2000. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquali.pdf>>.

Portanto, a presente investigação buscou analisar o nível de pensamento geométrico que os alunos da terceira série do Ensino Médio se encontram. Utilizando o modelo de Van Hiele, aliado à metodologia ativa PBL, verificar se a mesma contribuiu para elevar o nível de pensamento geométrico dos alunos.

Para Smolka (1996), a aprendizagem deve ocorrer por meio da construção realizada pelos educandos, de maneira ativa, onde os mesmos são vistos como agentes e não como seres passivos, que recebem e absorvem informações. Portanto, trata-se de inverter a grande maioria dos processos de aprendizagem praticados, pois até então se prioriza a sistemática de o professor transmitir e o aluno assimilar.

Diante do exposto, utilizou-se o diário de bordo como recurso para anotações e análises dos dados. O diário de bordo foi desenvolvido pelos alunos e pela pesquisadora, sendo que os mesmos registraram criteriosamente tudo que ocorrer nas aulas.

As falas e relatos dos alunos também serviram de instrumentos para a coleta de dados, bem como, as respostas às atividades didáticas propostas, nos momentos iniciais e finais da sequência didática.

As Pesquisas de Intervenção Pedagógica na definição de Damiani, Rochefort, Castro, Dariz e Pinheiro (2013) “são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) - destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências”.

Segundos os autores, esse tipo de pesquisa é de aplicação e com a finalidade de contribuir para a solução de problemas práticos, voltados ao mundo real, se opondo as pesquisas com objetivos básicos de ampliar conhecimentos.

Esse tipo de pesquisa se assemelha com experimentos, com a pesquisa ação. O professor desempenha o papel de investigador, descreve detalhadamente os procedimentos realizados, posteriormente avalia-os e produz explicações fundamentadas em teorias e dados obtidos a partir de sua prática desenvolvida. Para a coleta desses dados o investigador utiliza-se de diferentes instrumentos.

A Pesquisa intervenção apresenta dois importantes componentes metodológicos: a) Método da Intervenção – o pesquisador precisa ser criativo, desenvolver um bom planejamento do que pretende investigar estabelecendo elo com a teoria. O relatório dessa intervenção deve estar em destaque, bem fundamentado e descrito de forma detalhada para não ser confundido com relatos de experiências. b) Método da Avaliação – deve ser apresentado com clareza, onde o leitor consiga identificar as intenções investigativas e os resultados e ou análises apresentadas.

A partir das ideias de Tripp (2005) e Thiollent (2009), os autores Damiani, Rochefort, Castro, Dariz e Pinheiro (2013) resumem conforme Quadro 4 quais são os procedimentos que classificam a pesquisa em Intervenção Pedagógica:

Quadro 4 - Procedimentos Pesquisa Intervenção.

ETAPAS	PROCEDIMENTOS
O intuito de produzir mudanças	<ul style="list-style-type: none"> descrever e/ou explicar os fenômenos investigados, sem neles interferir;
A tentativa de resolução de um problema	<ul style="list-style-type: none"> organização e avaliação de uma ação voltada à resolução de um problema coletivo, na qual pesquisadores e participantes atuam de modo cooperativo ou participativo. método contínuo, sistematizado e fundamentado para o aprimoramento de determinada prática, ou seja, testar maneiras para resolução dos problemas.
O caráter aplicado	<ul style="list-style-type: none"> Pesquisa feita pelo prático, adaptada às exigências (formais) de trabalhos acadêmicos.
A necessidade de diálogo com um referencial teórico:	<ul style="list-style-type: none"> diálogo com as teorias existentes com o propósito de aumentar o conhecimento dos pesquisadores sobre as maneiras de enfrentar o problema a ser resolvido.
A possibilidade de produzir conhecimento	<ul style="list-style-type: none"> produção de conhecimento proveniente da pesquisa ação, testando ideias teóricas através da prática com o objetivo de promover avanços nessas ideias, contribuindo para a produção de teoria educacional. é o pesquisador quem identifica o problema e decide como fará para resolvê-lo, embora permaneça aberto a críticas e sugestões, levando em consideração as eventuais contribuições dos sujeitos-alvo da intervenção, para o aprimoramento do trabalho.

Fonte: Adaptado de Damiani, Rochefort, Castro, Dariz e Pinheiro, 2013.

Segundo Silva e Simon (2005) pesquisa quantitativa é quando apresenta dados numéricos para a análise de uma resposta. Esse tipo de pesquisa precisa apresentar o problema bem definido contendo informações e embasamento teórico acerca do objeto do conhecimento, ou seja, aquilo que se quer pesquisar e ou estudar.

Gatti, apoiada nas colaborações de Falcão e Régnier (2000) descreve a pesquisa quantitativa como um conjunto de procedimentos e técnicas com objetivo de auxiliar o pesquisador a responder a(s) pergunta(s) de sua pesquisa, ou seja, auxilia na obtenção de dados com informações por meio de indicadores, permitindo a observação de outro ponto de vista, ou seja, através de índices numéricos.

Por sua vez, os autores Pereira e Ortigão (2016) afirmam que pesquisas quantitativas são indicadas:

[...] para responder a questionamentos que passam por conhecer o grau e a abrangência de determinados traços em uma população, esta também é uma forma de estar sensível aos problemas sociais. Há, nesse tipo de pesquisa, um caráter mais ou menos generalizador; contudo a preocupação em relacionar a pesquisa aos contextos enriquece o trabalho. É, ainda, necessário perceber que trabalhar com dados estatísticos é operar com um princípio de incerteza; tais dados apontam frequências e indicativos, mas, de modo algum representam fielmente a realidade (se é que isso seja possível em qualquer pesquisa que seja!).

A investigação quantitativa é caracterizada por apresentar dados numéricos, ou seja, gerar dados que permitem ser analisados de maneira estatística. Portanto, seus resultados

também podem ser apresentados em gráficos, tabelas e índices. Esse tipo de pesquisa quantifica, mede, adéqua as respostas dos alunos, podendo ou não confirmar o problema de pesquisa inicial.

Nesse trabalho houve a combinação das pesquisas qualitativa e quantitativa, ou seja, uma associação entre esses dois tipos de pesquisa.

Um estudo poderá incluir abordagens qualitativas e quantitativas em diferentes fases do processo de pesquisa sem concentrar-se necessariamente na redução de uma delas a uma categoria inferior ou em definir a outra como sendo a verdadeira abordagem da pesquisa (FLICK, 2008, p. 43).

Conforme é possível observar, o autor sugere que nesse tipo de pesquisa, a pesquisa qualitativa seja utilizada no desenvolvimento de hipóteses para, posteriormente, analisá-las de forma quantitativa, pois segundo ele, a pesquisa qualitativa foca na exploração do fenômeno em estudo e a quantitativa nesse caso, complementa as descobertas fundamentadas.

Quando trabalhamos a transformação dos dados qualitativos em quantitativos, precisamos situar ambas as áreas de pesquisa. Ao compararmos e quantificarmos as frequências de maneira estatística, podemos dizer que essa tendência segue uma transformação acerca dos dados qualitativos em uma descoberta que faz referência a dados quantitativos.

Devido à análise dos dados do Pré Teste e Pós Teste realizado com os alunos se fez necessário investigar e comparar os resultados iniciais e finais da pesquisa intervenção realizada. Para constatar se houve ou não a evolução do pensamento geométrico dos alunos pesquisados (conforme o modelo de Van Hiele), a investigação se apoiou também em dados estatísticos envolvendo cálculos percentuais e apresentação de gráficos. De acordo com a pesquisa quantitativa os dados foram analisados e apresentados com clareza e objetividade.

Para tanto, os dados analisados no item 4.3, foram descritos com a utilização da pesquisa quanti-qualitativa e de Intervenção Pedagógica.

4.3 Análise dos Resultados

Para a análise dos resultados foram considerados o estudo teórico vinculado com a proposta didática desenvolvida. A proposta em questão foi sugerida para três encontros,

realizados nos dias dezoito, dezenove e vinte de novembro do ano de dois mil e dezenove, nas dependências de uma Escola da Rede Estadual de Ensino, no município de Maravilha, SC, turno noturno, em forma de oficina, com duração de 5 horas aula cada encontro. Com a implementação da proposta, frisa-se que foi analisado a evolução do pensamento geométrico dos alunos (segundo o Modelo de Van Hiele), com a utilização da PBL e dos recursos tecnológicos.

4.3.1 Primeiro Encontro: 18/11/2019

Inicialmente foi explicado aos alunos a proposta de trabalho, os objetivos a serem alcançados, a metodologia a ser utilizada e a forma de avaliação, também foi enfatizada a importância dos mesmos se fazerem presentes nos três encontros. Em seguida, foi aplicado a atividade 01 da sequência didática.

a) Atividade 1 - Avaliação diagnóstica, (APÊNDICE A), para verificar o conhecimento prévio dos alunos.

Van Hiele destaca que o diagnóstico é o ponto inicial para o desenvolvimento do pensamento geométrico, onde é preciso identificar em qual nível de pensamento o aluno se encontra, para que se possa, através de atividades, fazer com que o aluno consiga atingir um nível mais elevado.

Nesse sentido, a análise prévia do conhecimento parte de uma concepção construtivista que, ao iniciar sua prática pedagógica, por primeiro, o professor precisa, verificar quais são os conhecimentos prévios que os alunos apresentam referente ao conteúdo a ser trabalhado e, partindo dessa base de conhecimentos preexistentes, (re)construir novos conhecimentos.

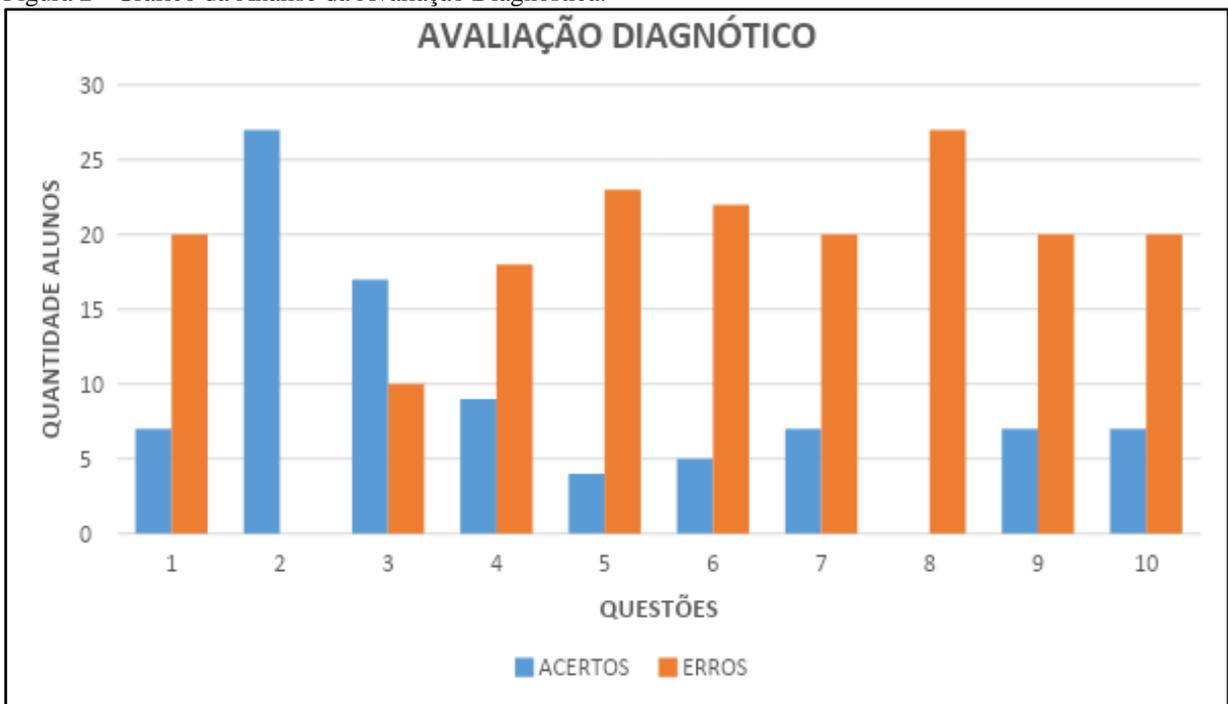
Para Jean Piaget (1972), o conhecimento somente é possível porque há outros conhecimentos anteriores. O processo do conhecimento ocorre desde o nascimento. Ele é contínuo e infinito. Ao longo de toda a vivência ele alcança um nível mais complexo e para que esse nível seja atingido é necessário que a construção intelectual siga uma sequência gradual, ou seja, a construção do conhecimento necessita das condições prévias para a elaboração de outras. “Para que um novo instrumento lógico se construa, é preciso sempre instrumentos lógicos preliminares; quer dizer que a construção de uma nova noção suporá sempre substratos, subestruturas anteriores e isso por regressões indefinidas” (PIAGET, 1972, p. 215).

4.3.1.1 Análise: Avaliação diagnóstica

Conforme a avaliação que se encontra no APÊNDICE A, foi verificado o que os alunos conhecem sobre o assunto de Geometria plana e espacial. A avaliação é composta por dez questões, sendo que cada questão está devidamente estruturada com o propósito de investigar aspectos como: visualização, identificação, classificação, características e conceitos mínimos de Geometria plana e espacial.

As questões foram analisadas uma a uma para verificar o nível de pensamento geométrico em que os alunos se encontram, levando em consideração o que foi citado anteriormente. Os resultados da Avaliação Diagnóstica foram reunidos, em forma de gráfico, na Figura 2.

Figura 2 - Gráfico da Análise da Avaliação Diagnóstica.



Fonte: Autora, 2020.

Analisando os dados do gráfico da Figura 2, partindo da primeira questão respondida, pode-se constatar que um número muito pequeno de alunos (apenas seis) diferencia as figuras planas das figuras espaciais, levando em consideração o contexto social. Provavelmente, isso ocorre pela falta de compreensão de conceitos e do conteúdo de Geometria. Essa hipótese parece ser fruto da consequência de quando o aluno recebe conceitos prontos e não construídos por ele, logo, esse processo é meramente mecânico e sem significado.

Os alunos precisam vivenciar as experiências para que, a partir das dificuldades e obstáculos encontrados, consigam superar, mudar e (re)construir novas ideias e conceitos. Conforme afirma Freire (1996) “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção”.

Na questão dois, constatou-se que todos os alunos consideram importante a utilização de materiais manipulativos e ou aulas práticas para a aprendizagem do conteúdo de Geometria espacial. “A utilização de materiais manipulativos facilita o entendimento de conceitos e conseguimos visualizar as figuras de forma tridimensional, o que não ocorre com o desenho no quadro” (DIÁRIO DE BORDO - ALUNO, 2019). E “Aprender de forma prática e com utilização de materiais concretos, nos permite compreender e diferenciar as formas geométricas, as aulas são mais atrativas e interessantes, assim conseguimos entender mais facilmente o conteúdo e de maneira prazerosa” (DIÁRIO DE BORDO - ALUNO, 2019).

Partindo da argumentação dos alunos sobre a utilização de materiais manipulativos, de aulas práticas (dinâmicas), entende-se que as atividades propostas com esses elementos sejam essenciais para a construção da aprendizagem, além das aulas apresentar um cunho mais atraente e significativo. Os materiais auxiliam os alunos na construção do conhecimento processual, conforme fica evidenciado nas palavras de Azevedo ao afirmar que “Nada deve ser dado à criança, no campo da Matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração” (1979, p. 27).

Na questão de número três foram apresentadas aos alunos figuras espaciais e figuras planas. Dos vinte e sete alunos, dez deles não conseguem diferenciar esses tipos de figuras. Fica mais uma vez evidenciada a falta dos conceitos mínimos para compreensão desse conteúdo.

Na questão de visualização e identificação de figuras planas, o que se refere à questão quatro, surpreendentemente nove alunos não conseguiram visualizar os retângulos e hexágonos que compõem o prisma hexagonal.

A melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é com a construção de objetos manipulativos e ou a utilização de softwares que simulem o espaço tridimensional, uma vez que a observação e suas relações espaciais estimulam o pensamento cognitivo e criativo.

A partir de seus estudos, Leivas (2009) define visualização não somente como uma forma de representar um objeto, mas, sim, como um processo de formar imagens mentais.

Portanto, na sua compreensão, esse processo auxilia na construção dos conceitos matemáticos.

Para verificar qual é o conhecimento que os alunos apresentam sobre faces, vértices, arestas e ângulos foi proposto, na questão cinco, que os mesmos quantificassem algumas figuras definindo suas faces, vértices, arestas e ângulos. Novamente houve deficiências, pois constatou-se que somente quatro alunos apresentam tal conhecimento e os demais não conseguiram resolver essa questão que envolvia conceitos mínimos do conteúdo de Geometria.

Na questão seis percebe-se ainda que, os alunos não têm noção de planificação de figuras espaciais, não compreendem situações simples e, mesmo através da visualização, não conseguem perceber quais figuras planas compõem o objeto em questão. Ainda, em se tratando de visualização, na questão sete, os alunos apresentam um nível muito baixo de compreensão de conceitos fundamentais e necessários para o estudo da Geometria espacial. Apenas sete alunos conseguiram desenvolver os cálculos de perímetro e área de figuras planas que lhes foram propostos.

A partir da habilidade de visualizar um objeto (imagem mental), o aluno consegue identificar os elementos, as características e suas propriedades, conseqüentemente consegue construir o conceito matemático que o auxilia na resolução de situações problema.

Quando se trata de figuras tridimensionais ficou evidenciado que os alunos não conseguiram realizar o cálculo necessário, conforme apresentou a questão oito. “Ao serem questionados, quando estávamos analisando e socializando as respostas do diagnóstico em questão, os alunos responderam que não conseguiram realizar a atividade, pois não lembravam das fórmulas que deviam utilizar para o cálculo” (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019). E “Com o passar do tempo esquecemos como desenvolver determinados cálculos, até porque, dificilmente utilizamos ou vemos a importância dos mesmos para nossa vida” (DIÁRIO DE BORDO - ALUNO, 2019).

Diante disso, entende-se que os alunos podem ter aprendido mecanicamente através de fórmulas e conceitos prontos, simplesmente para a resolução de exercícios que os leva a memorização momentânea. Com isso, não ocorre o aprendizado, pois como o processo não é significativo, ele acaba esquecendo tais informações.

A questão nove e a questão dez estão relacionadas a diferenciar figuras planas e espaciais, citando suas principais características. Apenas sete dentre os vinte e sete alunos conseguiram resolver as questões. Contudo, pode-se concluir que os alunos apresentam grande dificuldade nesse conteúdo em questão.

Outro ponto relevante e observado, é que quando os alunos apresentam pouco conhecimento de Geometria plana e espacial, conseqüentemente eles também apresentam dificuldades nas resoluções de situações problemas referentes a esse assunto. Constatou-se, também, que aproximadamente vinte e um alunos encontram-se no nível básico de desenvolvimento do pensamento geométrico. Entre esses, dois alunos conseguiram se destacar satisfatoriamente e podem ser classificados no nível dois. Ainda, conforme a análise das respostas do teste diagnóstico identificou-se que quatro alunos se encontram entre os níveis um e dois do desenvolvimento do Pensamento Geométrico, baseados na Teoria de Van Hiele.

Após a aplicação da avaliação diagnóstica, aproveitando o tempo disponível, houve uma conversa e troca de conhecimentos sobre a resolução das atividades. Nesse momento construiu-se alguns conceitos referente às figuras planas e espaciais, bem como sobre o cálculo do perímetro, área e volume.

Para a análise do nível de pensamento Geométrico que os alunos se encontram e que resultou a classificação no Quadro 6, utilizou-se as experiências baseadas em Van Hiele, de acordo com os seguintes critérios do Quadro 5.

Quadro 5 - Classificação do Nível de Pensamento Geométrico.

Nível básico	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconhece formas geométricas com base na aparência física como um todo; 2. Identifica uma figura ou uma relação geométrica; 3. Cria figuras; 4. Descreve figuras geométricas e construções usando linguagem adequada; 5. Trabalha com problemas manejando figuras, medindo ou contando;
Nível 1	<ol style="list-style-type: none"> 1. Descreve uma classe de figuras por suas propriedades; 2. Compara figuras segundo propriedades e características; 3. Classifica e reclassifica figuras por atributos isolados; 4. Identifica e desenha uma figura, por descrição oral ou descrita suas propriedades; 5. Deduz empiricamente regras e generalizações; 6. Resolve problemas que requeiram o conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas ou abordagens perspicazes;
Nível 2	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura; 2. Utiliza definições; 3. Acompanha e apresenta argumentos informais; 4. Acompanha argumentos dedutivos; 5. Tenta fornecer mais do que uma abordagem ou explicação; 6. Discute situações que focalizam uma afirmação e sua recíproca; 7. Resolve problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações são importantes;
Nível 3	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica aquilo que é dado e o que deve ser aprovado num problema; 2. Identifica informações implícitas numa figura ou numa dada informação; 3. Compreende o significado de conceito primitivo, postulado, teorema, definições, etc.; 4. Prova rigorosamente as relações desenvolvidas informalmente no nível 2; 5. Prova relações não familiares; 6. Compara demonstrações diferentes de um mesmo teorema; 7. Usa várias técnicas de demonstração e identifica estratégias gerais de demonstrações; 8. Reflete sobre o raciocínio geométrico envolvendo o raciocínio dedutivo ou indutivo; 9. Resolve problemas geométricos colocados em um contexto.

Fonte: Adaptado pela autora, de Lindquist e Shulte, 1998, p. 8-16.

A seguir, conforme apresenta o Quadro 6, constam os resultados obtidos com o Teste diagnóstico.

Quadro 6 - Resultado do Teste diagnóstico por aluno.

ALUNO	Nº DE ACERTOS	Nº DE ERROS	NÍVEL PENSAMENTO GEOMÉTRICO
1	3	7	Nível básico
2	3	7	Nível básico
3	4	6	Nível básico
4	6	4	Entre o nível 1 e nível 2
5	2	8	Nível básico
6	7	3	Nível 2
7	4	6	Nível básico
8	5	5	Nível básico
9	6	4	Entre o nível 1 e nível 2
10	2	8	Nível básico
11	4	6	Nível básico
12	5	5	Nível básico
13	3	7	Nível básico
14	4	6	Nível básico
15	4	6	Nível básico
16	3	7	Nível básico
17	3	7	Nível básico
18	4	6	Nível básico
19	4	6	Nível básico
20	2	8	Nível básico
21	7	3	Nível 2
22	6	4	Entre o nível 1 e nível 2
23	3	7	Nível básico
24	5	5	Nível básico
25	2	8	Nível básico
26	4	7	Nível básico
27	6	4	Entre o nível 1 e nível 2

Fonte: Autora, 2020.

4.3.1.2 Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas

Os alunos trabalharam em equipes, onde a turma foi dividida em sete equipes, sendo seis com quatro integrantes e uma com três. O objetivo do trabalho em equipe, com a utilização da PBL, foi propiciar cooperação e ajuda mútua. Entre diversos outros benefícios, essa metodologia de trabalho em equipes menores ajuda a desenvolver a capacidade intelectual, expor e discutir ideias contrárias, trocar experiências, desenvolver responsabilidades, estimular a criatividade e interação ativa dentro da turma. Esse método ativo faz com que os alunos não recebam os conceitos prontos, já que o mesmo propõe a busca e troca de informações. Consequentemente, na socialização ocorre a (re)construção do conhecimento.

b) Atividade 2 - Construção de planificações, cálculos de área e triplicando a área original.

A construção dos prismas, a partir de sua planificação, objetiva trabalhar a visualização, que o modelo de Van Hiele define como nível básico ou zero. É sabido e amplamente difundido no campo educacional que trabalhar com materiais manipulativos contribui na visualização, pois aumenta a capacidade de os alunos tocar, sentir, manipular e movimentar os objetos em várias angulações e posições. Assim, a partir da manipulação e da familiarização desses objetos construídos, os alunos exploram melhor as propriedades dos objetos e elaboram, de maneira dinâmica, o registro da imagem mental, dando significado a ela.

A habilidade de visualização, segundo Gutiérrez (1992), é fundamental para que o aluno consiga compreender e interpretar situações problemas. A imagem tridimensional (imagem mental) é a habilidade básica e necessária para o aprendizado de Geometria espacial.

O professor precisa propor aos alunos diferentes estratégias de aprendizagem, para que os mesmos consigam construir, de forma estruturada, elaborada e consistente a imagem mental, a qual é tão necessária para a resolução de situações que envolvam objetos tridimensionais.

Os desenhos expressos nos livros didáticos podem não ser suficientes para que os alunos consigam desenvolver a habilidade de visualização. Devido a isso é importante a utilização de recursos concretos e digitais, os quais seguramente estimulam e potencializam esse processo.

A melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é construindo objetos que mostrem os conceitos espaciais. Construindo poliedros os alunos têm a oportunidade de observar e usar muitas relações espaciais. Recursos visuais interessantes também estimulam o pensamento criativo (LINDQUIST; SHULTE, 2003, p. 178).

Os alunos receberam miniaturas de planificações de prismas e, posteriormente, preencheram uma tabela com os nomes das figuras montadas. Informaram nessa tabela o número de faces, arestas, vértices de cada figura, bem como, quais eram as formas da base e das faces laterais de cada prisma. Ainda na tabela, descreveram as medidas dos ângulos internos da base e das faces laterais. Para conceituar faces, vértices, arestas e ângulos houve busca de informações, troca de experiências, socialização e a elaboração dos conceitos, por parte dos alunos.

Com o desenvolvimento dessa atividade esperava-se que os alunos conseguissem perceber as relações existentes entre os vértices, as faces e as arestas. Entretanto, constatou-se que os alunos não conseguiram identificar e fazer associação desses dados. Na sequência dessa atividade, os alunos socializaram o trabalho desenvolvido, com uma apresentação, onde os mesmos elencaram algumas propriedades ou características das figuras construídas. Pode-se perceber, com isso, que a partir do desenvolvimento dessa atividade os alunos conseguiram progredir de nível de pensamento geométrico, sendo que uns mais e outros menos. No geral, a maioria se encontra no nível de análise, ou seja, o nível 1 do Modelo de Van Hiele.

O próximo passo dessa atividade foi triplicar a área da figura em questão. Inicialmente, os grupos identificaram as figuras planas que formavam o prisma e desenvolveram o cálculo das áreas das planificações para, posteriormente, descobrir quais eram as novas medidas das arestas para que sua área ficasse triplicada. Os conceitos de área e volume foram construídos em conjunto, por meio de informações e conhecimentos desenvolvidos nas atividades e diálogos anteriores.

Nessa atividade, alguns grupos encontraram dificuldades para chegar ao resultado esperado.

Observou-se que alguns simplesmente multiplicaram as medidas das arestas por três achando que assim a área estaria triplicada, ao perceber que a área não havia somente triplicado, buscaram informações e trocaram conhecimentos com os colegas e conseguiram desenvolver corretamente a atividade proposta. A maioria dos grupos conseguiram desenvolver a atividade sem ajuda da professora e de forma correta. Essa atividade coloca os alunos em um nível mais elevado do conhecimento geométrico, o nível de dedução informal ou nível 2 (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

Os grupos também apresentaram dificuldades para desenhar a planificação com a área triplicada, foi necessário a intervenção da professora para a elaboração de uma estratégia e conclusão dessa atividade.

c) Atividade 3 - construir um prisma a partir das planificações recebidas que apresente o quádruplo da área da figura original.

Essa atividade foi uma sequência da atividade 2, onde o diferencial é a construção da planificação da figura em questão, sendo que a mesma devia ser construída com medidas que correspondam ao quádruplo da área original. Nessa atividade constatou-se que os alunos não apresentaram nenhum problema para descobrir as medidas que quadruplicariam

a área da figura. Entretanto, destaca-se que alguns grupos ainda apresentavam dificuldades no que tange ao desenho da planificação da figura. “Após a realização dessas atividades percebemos que os alunos progrediram significativamente do nível básico para o nível 1 e alguns alunos já conseguiram atingir o nível 2” (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

d) Atividade 4 - a proposta é rever o nível básico – do Modelo de Van Hiele, para resgatar os alunos que não conseguiram progredir de nível.

Os alunos, de posse de seus celulares e de fita métrica, foram para as ruas da cidade e registraram imagens que retratam formas planas e espaciais.

A empolgação dos alunos ao realizar essa atividade era simplesmente emocionante, eles acharam fantástico fotografar formas e classificá-las. Com isso podemos verificar que a utilização de Metodologias Ativas – aprender fazendo – é importante no processo da construção do conhecimento, uma vez que, além de diferente e prazeroso, é também significativo (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

Professora, não tem como esquecer o que é uma forma espacial. Foi muito legal e diferente a realização dessa atividade, gostei muito, nunca havia me dado conta, das infinitas e diferentes formas que encontramos no nosso dia a dia. Nunca esquecerei a diferença entre formas planas e tridimensionais (Comentário de um aluno após a realização da atividade) (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

e) Atividade 5 - nessa atividade, os alunos precisaram desenvolver uma estratégia para apresentar aos colegas as imagens registradas, descrevendo o nome da imagem e que figuras planas a compõem. Quantificaram seus lados, vértices, ângulos e arestas, descrevendo suas características e classificando-as. No final, apresentaram o perímetro, a área e o volume das imagens.

Essa atividade teve o objetivo de fazer o aluno perpassar pelos três primeiros níveis do pensamento geométrico, isto é, nível 0, 1 e 2.

Com a aplicação dessas atividades, percebeu-se que os alunos conseguiram resolver os problemas que eram propostos e, conseqüentemente, podemos apontar um progresso no nível do pensamento geométrico. Percebe-se, ainda, que eles estão entusiasmados, estimulados e com vontade de aprender. Desenvolvem as atividades com grande envolvimento, buscam as informações necessárias para a construção de alguns conceitos, trabalham em equipe de forma ativa e participativa (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

Ao se relacionar os níveis do pensamento geométrico com a resolução de problemas, analisa-se especialmente o progresso que os alunos obtiveram na resolução de situações

problemas. Consequentemente, percebe-se que, quanto mais alto o nível do pensamento geométrico, mais facilmente os alunos conseguem resolver as propostas de situações problemas.

f) Atividade 6 - Elaboração de situações problemas através das imagens registradas na atividade anterior. As equipes foram desafiadas em construir três situações problemas e entregar à professora no final da aula.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BNCC, 2019, p. 536).

A resolução de problemas proporciona aos alunos o desenvolvimento do pensamento matemático, de forma ativa. O problema a ser desenvolvido ou resolvido pelo aluno deve ser formulado de maneira significativa, com referência à realidade. Conforme a BNCC (2019), no caso da resolução e formulação de problemas:

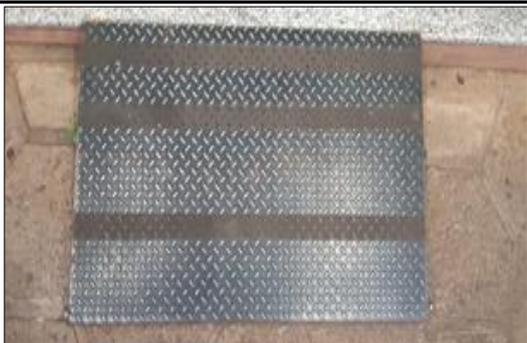
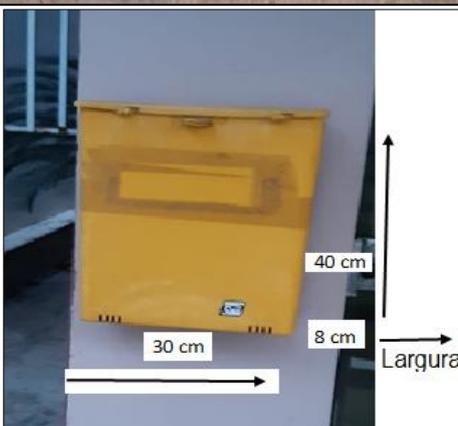
[...] é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (BNCC, 2019, p. 535).

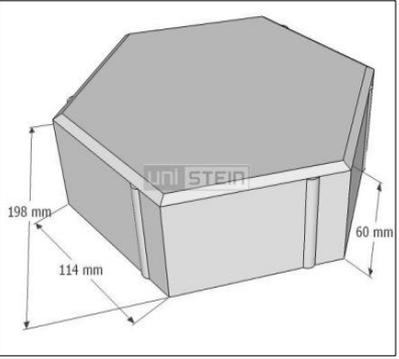
Uma das grandes dificuldades apontadas com a resolução de problemas está diretamente relacionada com a interpretação dos dados, em especial, se tratando do conteúdo de Geometria (prismas). Se o aluno não apresentar um nível de pensamento geométrico elevado não conseguirá compreender e ou desenvolver a situação problema proposta.

Na execução dessa atividade, podemos perceber que os alunos necessitavam de conhecimento para a elaboração dos problemas. Uma das preocupações dos grupos era em elaborar os problemas a partir do que já haviam estudado. Tinham o cuidado de contextualizar os problemas e, de certa forma, não envolver conceitos e procedimentos de fácil entendimento (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

A seguir, no Quadro 7, são apresentados alguns problemas propostos pelos alunos e selecionados pela pesquisadora para, posteriormente, serem resolvidos pelos grupos de trabalho.

Quadro 7 - Situações Problemas.

IMAGEM	PROBLEMA																													
	<p>Essa rampa possui as seguintes dimensões: 120 cm de comprimento, 60 cm de largura e 4 cm de espessura. Nossa escola necessita de 8 dessas rampas para acessibilidade de alunos cadeirantes. Qual o espaço em metros quadrados que todas elas utilizam?</p>																													
	<p>A caixa de correio é similar a um prisma. Responda em relação a essa imagem:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Qual o nome do prisma? 2. Que figuras planas você identifica nesse prisma? 3. Quantas faces, aresta e vértices tem esse prisma? 4. Qual a área total e o volume desse prisma? 																													
 <p>Formas Próprias:</p>  <p>Os Sinais de Advertência têm a forma quadrada, com posicionamento definido por diagonal na Vertical, fundo na cor Amarela. Podem ter o formato retangular.</p> <p>Dimensões Padrões - Forma Quadrada:</p> <table border="1" data-bbox="256 1827 903 2029"> <thead> <tr> <th>Dimensões Mínimas (lado)</th> <th>Orla Externa</th> <th>Orla Interna</th> <th>Cor de Fundo</th> <th>Símbolo</th> <th>Aplicação</th> <th>Exemplos de Uso</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>450 x 450 mm</td> <td>10 mm</td> <td>20 mm</td> <td rowspan="4">Amarelo</td> <td rowspan="4">Preto</td> <td>ÁREA URBANA</td> <td>Placa "Quebra-Molas" de Cidade</td> </tr> <tr> <td>600 x 600 mm</td> <td>10 mm</td> <td>20 mm</td> <td>ÁREA RURAL</td> <td>Placa "Curva a Direita" em Estradas de Chão</td> </tr> <tr> <td>800 x 800 mm</td> <td>10 mm</td> <td>20 mm</td> <td>RODOVIA Tipo I</td> <td>Placa "Pista Irregular" em Rodovias Tipo I</td> </tr> <tr> <td>1000 x 1000 mm</td> <td>20 mm</td> <td>30 mm</td> <td>RODOVIA Tipo II</td> <td>Placa "Depressão" em Rodovias Tipo II</td> </tr> </tbody> </table>	Dimensões Mínimas (lado)	Orla Externa	Orla Interna	Cor de Fundo	Símbolo	Aplicação	Exemplos de Uso	450 x 450 mm	10 mm	20 mm	Amarelo	Preto	ÁREA URBANA	Placa "Quebra-Molas" de Cidade	600 x 600 mm	10 mm	20 mm	ÁREA RURAL	Placa "Curva a Direita" em Estradas de Chão	800 x 800 mm	10 mm	20 mm	RODOVIA Tipo I	Placa "Pista Irregular" em Rodovias Tipo I	1000 x 1000 mm	20 mm	30 mm	RODOVIA Tipo II	Placa "Depressão" em Rodovias Tipo II	<p>Para construir as placas de trânsito devem ser respeitadas as medidas das tabelas abaixo. Em nossa cidade, na Avenida 7 de Setembro foram localizadas, aproximadamente, 25 placas desse formato. Se o custo por mm² para sua fabricação é de R\$ 0,054. Qual foi o valor gasto para a fabricação de todas as placas?</p>
Dimensões Mínimas (lado)	Orla Externa	Orla Interna	Cor de Fundo	Símbolo	Aplicação	Exemplos de Uso																								
450 x 450 mm	10 mm	20 mm	Amarelo	Preto	ÁREA URBANA	Placa "Quebra-Molas" de Cidade																								
600 x 600 mm	10 mm	20 mm			ÁREA RURAL	Placa "Curva a Direita" em Estradas de Chão																								
800 x 800 mm	10 mm	20 mm			RODOVIA Tipo I	Placa "Pista Irregular" em Rodovias Tipo I																								
1000 x 1000 mm	20 mm	30 mm			RODOVIA Tipo II	Placa "Depressão" em Rodovias Tipo II																								

		<p>Quantos prismas hexagonais iguais a esses das figuras são necessários para obtermos um metro quadro?</p>
	<p>As lixeiras apresentam as seguintes medidas: altura 136 cm - largura 111 cm e comprimento 135,5 cm. Qual é a capacidade em litros que as lixeiras possuem?</p>	
	<p>O escritório do despachante Silva possui a faixa de propaganda, apresentada na imagem. Sabe-se que a altura desse adesivo é de 18 centímetros e que a sala do escritório possui 6 portas de 1,5 metro de largura. Qual a quantidade de material para a fabricação do adesivo para colocar nas seis portas do escritório?</p>	
	<p>As lajotas que revestem a área coberta da escola possuem o formato quadrangular. A área de uma lajota é igual a 289 cm^2 e a área total em metros quadrados da área coberta é de $118,5 \text{ m}^2$. Quantas lajotas serão necessárias para o revestimento desta área?</p>	

Fonte: Registros dos alunos, 2019.

Para elaborar esses problemas de forma contextualizada, os alunos precisavam possuir conhecimento dos conceitos estudados. Os problemas apresentados foram desenvolvidos a partir das imagens registradas por eles e que fazem parte do seu dia a dia.

A imaginação e a criatividade das equipes são notórias, assim como o progresso do pensamento geométrico que já apresentavam nesse momento.

Nessa atividade alguns grupos apresentaram imagens de cilindro, cone e pirâmide. Esse momento foi oportuno para explicar essas imagens selecionadas pelos grupos. Foi discutido e reforçado o conceito de Prisma, também elencado algumas características do cone, pirâmide e cilindro, para que os alunos conseguissem compreender e diferenciar esses sólidos geométricos.

4.3.2 Segundo Encontro: 19/11/2019

Para iniciar a aula os alunos foram encaminhados ao laboratório de informática. Nesse encontro foi apresentado aos alunos o software GeoGebra, com o objetivo de familiarização e explicação de como utilizar algumas ferramentas. Com o software GeoGebra foi desenvolvida a atividade 7 da sequência didática.

g) Atividade 7 - Consiste na construção de um Hexágono e um Cubo. Após a explicação e as devidas construções, calcular a área, o volume e a diagonal dessas figuras. Na sequência os alunos foram desafiados a trocar o tamanho das arestas e verificar o que aconteceu com os respectivos cálculos.

Os alunos nunca utilizaram de tecnologias digitais para a visualização e construção de objetos tridimensionais. Ficaram encantados ao aprender e ao utilizar o GeoGebra como recurso de aprendizagem. A aula foi maravilhosa e muito produtiva. Ao interagir com o Software eles compreenderam e conseguiram relacionar, diferenciar, analisar, construir, calcular, projetar, (re)construir conceitos, propriedades e características de diferentes figuras (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

A proposta desta atividade corrobora com o que é explicitado na competência cinco da BNCC (2019), relacionada à Matemática e suas tecnologias, a qual deixa claro que é preciso propor e oportunizar aos alunos a investigação, a utilização de diferentes estratégias pedagógicas e tecnológicas, a experimentação e a observação para a construção de conceitos e propriedades matemáticas.

A BNCC (2019), vincula a tecnologia em todas as etapas e áreas do conhecimento, objetivando o desenvolvimento de habilidades, conhecimentos, atitudes e valores. Sua utilização deve priorizar a capacidade de compreender, analisar, definir, comparar e resolver problemas, de forma contextualizada e crítica.

4.3.2.1 Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas

As atividades 8, 9 e 10 foram desenvolvidas em duplas, no laboratório de informática, com o a utilização do Software GeoGebra.

h) Atividade 8 - Na atividade 8, os alunos escolheram uma das imagens que haviam registrado e construíram o esboço dela no GeoGebra, calculando área, volume, perímetro e descrevendo as principais características da figura.

i) Atividade 9 - Na atividade 09, os alunos receberam uma lista de tarefas para desenvolver no software GeoGebra. Com a atividade eles concluíram: que com algumas medidas não é possível construir um triângulo; como se calcula a diagonal de determinadas figuras; como se constrói uma figura a partir do número de vértices e arestas que as mesmas possuem; como se calcula a área de uma figura, a partir da informação do volume, entre outras conclusões.

j) Atividade 10 - Na Atividade 10, os alunos exploraram e observaram no GeoGebra algumas planificações dos prismas, com controle deslizante. A professora pediu aos mesmos que observassem a relação existente entre o número faces, vértices e arestas dessas figuras. Após observarem as figuras, os alunos socializaram com a turma o que haviam visualizado e compreendido. Nesse momento um dos alunos contribuiu afirmando que em todas as figuras em questão, somando os números de vértices com o número das faces, o resultado seria igual ao número de aresta mais dois, ou seja, conseguiu comprovar a relação de Euler: $V+F=A+2$.

Foi imensamente gratificante perceber e concluir que os alunos, a partir da visualização, investigação, trocas de experiências e conhecimentos, conseguem (re)formular conceitos e teorias por si só. Nós professor, precisamos instigá-los, desafía-los, não levar para sala de aula conceitos prontos e acabados, desconexos do contexto social. Precisamos rever nossa prática de ensino, dar significado ao que ensinamos e fazer com que nossos alunos sejam, de fato, protagonistas do seu processo de aprendizado (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

No desenvolvimento das atividades pôde-se perceber o engajamento e o interesse apresentado pelos alunos. Conseguiu-se, nitidamente, perceber que houve grande progresso no nível de pensamento geométrico dos alunos. No entanto, não se pode determinar, neste momento, em que nível cada aluno está, mas pode-se afirmar que não se encontram no mesmo nível que iniciaram essa oficina.

4.3.3 Terceiro Encontro: 20/11/2019

Nesse encontro foi proposto aos alunos que colaborassem ajudando na resolução de uma situação problema existente na escola. A escola necessita da construção de uma piscina para a prática de natação. Essa piscina precisa possuir um tamanho adequado ao valor orçado, disponibilizado pela mantenedora (o Estado), que é no valor de R\$ 48.000,00. Os alunos precisam desenvolver o projeto respeitando algumas informações, que foram passadas para a execução dessa obra.

Para finalizar e verificar se houve realmente progresso no nível do pensamento geométrico dos alunos, foi aplicada atividade com situações problemas (APÊNDICE B), relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e ao ENEM (Questões de 2015 a 2018). A avaliação final possui um total de 16 questões e foram avaliados 27 alunos. O objetivo dessa avaliação, através de situações problemas contextualizadas, foi verificar se os alunos conseguiram evoluir no nível do pensamento geométrico.

Precisa ficar registrado, que o tempo para a realização das atividades propostas nesse último encontro, precisou ser ampliado e organizado em mais dois momentos. Um deles para a apresentação e culminância do desenvolvimento do projeto da construção da piscina, e outro para a resolução dos problemas criados pelos alunos e o Pós Teste.

4.3.3.1 Análise: Desenvolvimento das Atividades Propostas

Inicialmente, os alunos foram até as dependências externas da escola para analisar, medir e escolher o lugar adequado para a construção da piscina. Na sequência, cada grupo desenhou o esboço do seu projeto. Alguns grupos questionaram qual seria o tamanho ideal para essa piscina. Nesse momento aproveitamos para trocar ideias e informações entre os grupos, posteriormente, cada grupo definiu o tamanho que considerava adequado e dentro do orçamento para executar o projeto.

A visualização do espaço escolhido pelas equipes e a representação do esboço da piscina foi desenvolvido de forma coerente. As equipes observaram e analisaram o espaço, posteriormente realizaram as devidas medições para constatar se o espaço escolhido era ou não ideal para a execução do projeto. Conseguiram elaborar o projeto utilizando corretamente os conceitos, propriedades e relações da imagem formada. Para isso utilizaram o Software GeoGebra.

No desenvolvimento do problema apresentado da construção da piscina, todos os grupos, literalmente todos, conseguiram realizar a proposta de forma correta e com muita criatividade. “A Matemática torna-se mais significativa para o aluno que está constantemente em contato com uma ampla variedade de problemas. Ele estará mais capacitado a se adaptar a novas situações e a abordar novos problemas com segurança” (LINDQUIST; SHULTE, 1998, p. 86).

Os alunos respeitaram as seguintes etapas para a resolução do problema proposto: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e apresentação da resolução.

Os grupos trabalharam de forma ativa, estavam empenhados ao executar as etapas para a resolução do problema proposto. Demonstravam grande interesse e conhecimento no que estavam desenvolvendo. Em nenhum momento foi preciso a ajuda da professora para a interpretação, análise e aplicação dos conceitos estudados para a execução da atividade. Percebe-se, ainda, que os alunos desenvolvem a atividade de forma prazerosa e significativa (DIÁRIO DE BORDO - PESQUISADORA, 2019).

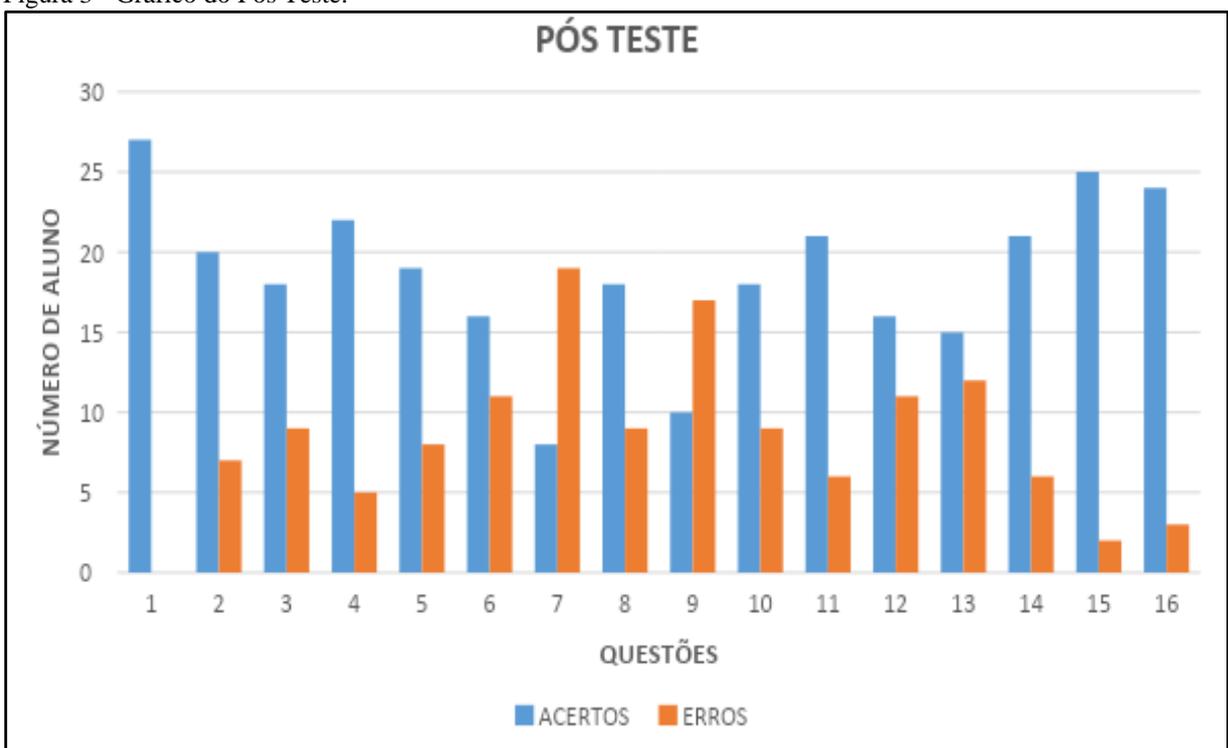
A tese defendida aqui é a de que as aulas práticas e ativas despertam a atenção dos alunos. Elas são mais agradáveis e prazerosas, tornando o aprendizado mais significativo. A atividade, de fato, despertou o interesse da turma, pois os alunos estavam motivados e desenvolveram a atividade proposta, de maneira criativa com entusiasmo, participação e empenho. “A aula de hoje foi muito produtiva, aulas como essas deveriam ser desenvolvidas mais vezes. Não vimos o tempo passar, aprendemos de maneira prática e com isso conseguimos assimilar os conceitos e conteúdo mais facilmente” (DIÁRIO DE BORDO - ALUNO, 2019). E “Hoje foi show, aula nota dez, desenvolvemos na prática alguns conceitos estudados anteriormente. Não tivemos dificuldades em realizar a atividade. É muito bom aprender Matemática dessa maneira, fica muito mais fácil de aprender” (DIÁRIO DE BORDO - ALUNO, 2019).

Após o desenvolvimento da atividade, os alunos apresentaram seus projetos, relatando seu desenvolvimento e execução. Justificaram a escolha do tamanho da piscina e o espaço escolhido para a construção. Após a apresentação dos grupos, é possível afirmar que todos atingiram o objetivo proposto. Observou-se, ainda, que com um nível de pensamento geométrico condizente a alunos do Ensino Médio, a resolução da situação problema foi compreendida e executada com maior facilidade. Os alunos conseguem situar-se, visualizar mentalmente, analisar e compreender os dados do problema e desenvolver estratégias para atingir o resultado esperado.

De acordo com a BNCC (2019), para a resolução de problemas, inicialmente os alunos precisam identificar quais conceitos matemáticos e quais procedimentos devem utilizar. Após a aplicação desses conceitos e execução dos procedimentos é necessário trocar informações e compartilhar os resultados com os demais colegas. Em função do adiantado do tempo, não foi desenvolvida a atividade de resolução de problemas que foram criados pelos alunos no primeiro encontro. Então, para finalizar o encontro, aos alunos foi proposta a resolução de 16 problemas. Os alunos desenvolveram essa atividade de forma individual.

Os resultados das resoluções das situações problemas foram analisados a partir do objetivo de cada questão. Dessa forma, as questões selecionadas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e do ENEM (Questões de 2015 a 2018), além de contextualizadas, visavam investigar se o aluno conseguiu desenvolver os conceitos aprendidos e, de acordo com o Modelo de Van Hiele, atingir um nível mais elevado do pensamento geométrico, sendo esses níveis: a visualização, a análise, a dedução informal e a dedução. Pensa-se que, se o aluno possuir tais habilidades relacionadas ao modelo proposto, conseqüentemente, conseguirá analisar, interpretar, criar estratégias e resolver situações problemas significativas através do conhecimento adquirido. A seguir, o gráfico da Figura 3 apresenta o resultado da Avaliação final.

Figura 3 - Gráfico do Pós Teste.



Fonte: Autora, 2020.

Após a aplicação dessa atividade, observaram-se quais os resultados haviam sido obtidos. Notadamente, puderam-se comprovar avanços dos alunos para níveis superiores do pensamento geométrico. Percebeu-se, por meio dos dados obtidos, que a melhora foi significativa e que os alunos conseguiram realizar de forma correta e satisfatória, as atividades propostas.

Nesse sentido, torna-se importante destacar que se tratava de resolução de problemas relacionados ao conteúdo de Prismas, o que é uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos do Ensino Médio, conforme já mencionado em diversos momentos ao longo dessa pesquisa. Entende-se que, a partir dos depoimentos dos alunos e dos resultados evidenciados, tanto em sala de aula quanto nessa análise final, pode-se afirmar que a utilização da PBL e das tecnologias digitais potencializam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa afirmação é sustentada e comprovada quando se observa os resultados da avaliação Pós Teste, no Quadro 8, e do comparativo entre as avaliações Pré e o Pós Teste, apresentado no Quadro 9.

Quadro 8 - Resultado do Pós Teste por aluno.

ALUNO	Nº DE ACERTOS	Nº DE ERROS	NÍVEL PENSAMENTO GEOMÉTRICO
1	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
2	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
3	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
4	12	4	Nível 3
5	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
6	13	3	Nível 3
7	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
8	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
9	12	4	Nível 3
10	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
11	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
12	12	4	Nível 3
13	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
14	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
15	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
16	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
17	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
18	12	4	Nível 3
19	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
20	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
21	12	4	Nível 3
22	13	3	Nível 3
23	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
24	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
25	8	8	Entre o nível 1 e nível 2
26	10	6	Entre o nível 2 e nível 3
27	10	6	Entre o nível 2 e nível 3

Fonte: Autora, 2020.

Quadro 9 - Comparando o Nível do Pensamento Geométrico - Pré Teste X Pós Teste.

ALUNO	NÍVEL PENSAMENTO GEOMÉTRICO: PRÉ TESTE	NÍVEL PENSAMENTO GEOMÉTRICO: PÓS TESTE
1	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
2	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
3	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
4	Entre o nível 1 e nível 2	Nível 3
5	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
6	Nível 2	Nível 3
7	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
8	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
9	Entre o nível 1 e nível 2	Nível 3
10	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
11	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
12	Nível básico	Nível 3
13	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
14	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
15	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
16	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
17	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
18	Nível básico	Nível 3
19	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
20	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
21	Nível 2	Nível 3
22	Entre o nível 1 e nível 2	Nível 3
23	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
24	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
25	Nível básico	Entre o nível 1 e nível 2
26	Nível básico	Entre o nível 2 e nível 3
27	Entre o nível 1 e nível 2	Entre o nível 2 e nível 3

Fonte: Autora, 2020.

Observa-se o crescimento, em termos de aprendizagem, ocorrido com os 27 alunos. Isso foi possível porque houve a aplicação da sequência didática, que compõe o produto educacional. Os resultados finais validam a experiência e recompensam o trabalho realizado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para que o aprendizado de Geometria seja concretizado, inicialmente o professor precisa compreender o nível de conhecimento geométrico em que o aluno se encontra. Na sequência, o professor deve criar condições para que os alunos consigam progredir para um nível de pensamento mais elevado. É interessante a utilização de algum recurso tecnológico nesse processo, pois se pensa que com isso, o aluno tem mais chances de (re)construir seu aprendizado.

Identificou-se que a dificuldade em relação ao aprendizado de Geometria ocorre por diversas razões. No Ensino Fundamental, muitas vezes, o conteúdo é deixado para o final do ano letivo, ou, o mesmo é trabalhado de forma superficial, ou seja, o aluno não tem a oportunidade de um ensino concreto e sistematizado. Já no Ensino médio, muitas vezes, o professor não se preocupa em saber qual é o nível de conhecimento geométrico em que o aluno está, com isso dificultando a compreensão do que o aluno vai estudar, pois o nível da linguagem utilizada pelo professor não está ao nível do conhecimento do aluno.

Contudo, destaca-se que essa sequência de fatores gera um “aprender” mecânico e temporário. Hoje, para que os alunos desenvolvam as competências necessárias no conteúdo de Geometria, precisa-se falar sobre a Matemática, estimulando-os a produzir linguagens próprias e textos relacionados sobre ela. Não se fazem mais necessárias a exposição ou a decoreba de fórmulas. É preciso criar estratégias de ensino, onde o aluno, por si só, a partir de suas análises e descobertas, perceba e descubra como chegar a determinado resultado.

Notadamente, o conteúdo de prismas não é complexo, considerando que envolve poucos elementos, mas, mesmo assim, os alunos apresentam muitas dificuldades na transposição de seus elementos em situações problemas, na parte de interpretação. Os alunos precisam estabelecer uma relação entre os elementos teóricos dos prismas, para conseguir desenvolver as habilidades necessárias à compreensão desse conteúdo.

Outra consideração importante é a utilização das tecnologias digitais para a construção do conhecimento. Para a geração de alunos digitais, a utilização das tecnologias se faz necessária, por se tratar de um recurso que potencializa o processo de ensino e de aprendizagem, como forma de integrar os alunos na construção ativa, crítica e criativa neste contexto.

De acordo com a BNCC, as tecnologias digitais são consideradas de grande valia e indispensáveis no percurso formativo do estudante. Portanto, o professor precisa buscar

subsídios para conseguir dominar esse recurso e proporcionar aulas interessantes, que despertem o interesse dos alunos.

Os professores têm o compromisso de formar alunos que sejam sujeitos atuantes no mundo do trabalho. Cabe aos professores despertar nos alunos o interesse e o entusiasmo em aprender, relacionando o conteúdo de sala de aula com o dia a dia dos alunos, dando significado e sentido ao seu aprendizado. Devido a isso, são necessários métodos que despertem o interesse dos alunos e é nesse sentido que as metodologias ativas podem contribuir e fazer a diferença no seu aprendizado.

A prática pedagógica com a utilização da Metodologias Ativa PBL, é um recurso didático que, além de estimular o interesse do aluno, promove a criatividade e a formação crítica. Após a leitura e análise de trabalhos que utilizaram em sua prática pedagógica, o uso de Metodologias Ativas, pode-se concluir que sua utilização é um recurso didático que potencializa o aprendizado, desenvolve o pensamento crítico, criatividade, trabalho em equipe e autonomia no processo de ensino e aprendizagem do educando.

Hoje, não se pode mais ensinar da mesma maneira que fora feito anteriormente, pois se está diante de alunos que querem aprender e dar significado a esse processo. Alunos que questionam a todo instante e que não aceitam passivamente uma resposta qualquer.

Observa-se que se está lidando com uma nova geração de estudantes. Geração essa que tem sede de saber, que não aceita ser apenas receptora de informações, que exige protagonismo e contribui na construção de seu aprendizado, que quer conhecimento além dos muros da escola, que questiona para que ou quando utilizará determinado conteúdo que se está “ensinando”. Portanto, urgentemente, precisa-se rever as práticas pedagógicas, dar significado a elas, precisa-se aliar a teoria da sala de aula à realidade dos alunos.

A BNCC (2019), considera que a escola deve promover e garantir aos alunos o protagonismo de seu próprio processo de escolarização, assegurando uma formação que contribua a definir seu projeto de vida.

Diante do exposto, tem-se a convicção de que essa nova geração precisa ser estimulada, desafiada, precisa ser tirada da zona de conforto, inverter os papéis e (re)significar as práticas pedagógicas, bem como, a formação dos alunos.

Pensa-se que o método ativo proporciona aos alunos um novo olhar para o aprendizado. O aprender, fazendo e buscando informações relevantes que se fazem necessárias nesse processo, é de fundamental importância na contribuição da aprendizagem.

Outra vantagem da utilização das Metodologias Ativas é a interação pelos pares, o trabalho em equipe, que proporciona ao aluno uma (re)elaboração do conhecimento,

colocando-o como o principal agente do seu aprendizado. O trabalho em grupos operativos leva os alunos a exercitarem e refletirem sobre os resultados alcançados, pois aprendem a discutir sobre o assunto, trocar ideias, aceitar a opinião do outro e assim (re)construir conceitos e saberes.

Destaca-se, também, outro ponto importante a ser considerado no processo de aprendizagem do aluno: a utilização de recursos tecnológicos. A BNCC (2019), a ser implantada no presente ano letivo, destaca muito bem a utilização desses recursos, uma vez que a contemporaneidade é marcada pelo desenvolvimento tecnológico e está cada vez mais presente na vida de todos nós.

A utilização das metodologias ativas, aliadas às práticas pedagógicas significativas, com o comprometimento do aluno e do professor, será possível viver, refletir, sentir, compartilhar e socializar uma nova educação. Com isso, formam-se homens e mulheres preparados para a vida e não somente para atingir índices escolares.

Conhecimento, conforme o dicionário, é ato de perceber ou compreender por meio da razão e/ou da experiência; Aprendizagem é o 'ato', 'duração' e 'experiência'.

Aprendizagem escolar conforme a teoria das metodologias ativas e, em específico a PBL, objetiva o aprendizado a partir de experiências práticas e contextualizadas. O aluno aprende melhor através do ato de fazer, ou seja, aprende fazendo.

Da mesma maneira, para o aprendizado de Geometria, é necessário que o professor oportunize aos alunos aulas criativas e desafiadoras. O aluno contemporâneo exige aulas com participação ativa e significativa. Cabe, portanto, ao professor buscar alternativas para dinamizar sua prática pedagógica, fazendo com que o aluno sinta gosto pelo aprender, e não entenda a Matemática de forma mecanizada e como “aplicação da fórmula correta”.

Após o estudo teórico do Modelo de Van Hiele, da metodologia ativa Problem Based Learning (PBL) e da aplicação do produto educacional, pode-se concluir que os objetivos propostos neste trabalho foram atingidos. Os alunos pesquisados conseguiram progredir de um nível para outro, alguns para um nível mais elevado que os outros, mas todos progrediram.

De acordo com o modelo de Van Hiele, é preciso verificar inicialmente em qual nível de pensamento geométrico o aluno se encontra e, a partir disso, propor atividades que elevem o seu nível de pensamento geométrico.

Partindo disso, foi aplicada a avaliação diagnóstica e constatou-se que 66,66% dos alunos não conseguiram resolver, de forma correta, questões simples de Geometria plana e espacial. Assim, ao analisar detalhadamente as respostas, percebeu-se que 21 dos 27 alunos

apresentam alguma dificuldade na visualização, pois não constroem a imagem mental dos objetos.

Um terço da turma encontrava-se inicialmente, no nível zero de conhecimento e ou pensamento geométrico. Para elevar esse nível, foram propostas aos alunos aulas práticas e ativas, com atividades selecionadas, utilizando-se da PBL e do Modelo de Van Hiele, aliadas às tecnologias digitais, afim de construir conceitos sólidos e significativos referente ao conteúdo de prismas. Bem como, foi proposto desenvolver competências e habilidades relacionadas à visualização, à análise e à interpretação, elementos importantes para a resolução de problemas.

Pode-se concluir, portanto, que após a aplicação do produto educacional com o uso de métodos ativos e de tecnologias digitais, o nível do pensamento geométrico dos alunos pesquisados evoluiu significativamente. É o que mostra o resultado do Pós teste, onde ao serem aplicados dezesseis problemas contextualizados sobre prismas, ficou evidenciado que os alunos atingiram um nível de pensamento geométrico condizente a alunos do Ensino Médio. Atingiu-se o nível três de pensamento geométrico, com 69% dos alunos conseguindo resolver os problemas propostos. Apenas 31% das questões não foram respondidas de forma correta. Pode-se concluir, então, que sete alunos conseguiram atingir o terceiro nível do pensamento geométrico, oito alunos ficaram entre o nível 2 e três, sendo que os demais ficaram entre os níveis um e dois.

Também, quando se compara os resultados da avaliação diagnóstica com a avaliação final, pode-se perceber que durante o processo da construção do conhecimento, quanto mais elevado o nível do pensamento geométrico dos alunos, menos dificuldades os mesmos apresentavam na compreensão e resolução dos problemas propostos.

Após esse estudo, levando em consideração o que foi proposto nesse trabalho e o resultado final apresentado, pode-se afirmar, com certa segurança, que a PBL, associada à utilização de tecnologias digitais, contribui para o aprendizado no conteúdo de prismas, assim como, o modelo de Van Hiele, aliado a PBL eleva o nível de pensamento geométrico dos alunos.

Portanto, a pesquisa e o trabalho desenvolvidos se aliam às palavras de Piaget, quando este aponta que “O ideal da educação, não é aprender ao máximo, [...], mas é antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola” (1972, p. 32).

Nesse sentido, concludo mais um trabalho, mais uma etapa da minha vida profissional, e porque não dizer pessoal. Sei que a caminhada é longa e precisamos

enquanto educadores estar em constante (re)construção, nos desafiar, sair da zona de conforto e aprimorar cada vez mais nossos conhecimentos. A única certeza que me resta, é que tenho muito a aprender e a continuar aprendendo.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Leyde Dayane Martinho de. *O processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial, utilizando Calques 3D fundamentado na teoria de Aprendizagem Significativa*. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista, 2018.

ARAÚJO, Ademar Rosa de. *Uma proposta de aplicação do conteúdo Geometria espacial no Ensino Médio*. 2017. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Piauí, Parnaíba, 2017.

ARRUDA, Gisele; KOZELSKI, Adriana Cristina. A importância da utilização das tecnologias nas aulas de matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 13, 2017, Curitiba. *Anais...* Curitiba: PUCPR, 2017. p. 2190-2202.

AZEVEDO, Edith D. M. Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano. *Revista de Educação e Matemática*, n. 3, p. 26-27, 1979.

BERBEL, Neusi Aparecida Navas. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. *Ciências Sociais e Humanas*, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, jan./jun. 2011.

BLOG ESCOLAR DO SESI 166. *Quais são as formas de aprendizado que existem?* Conheça a pirâmide do aprendizado. 21 abr. 2017. Disponível em: <<https://bit.ly/3ekeVj0>>. Acesso em: 18 abr. 2019.

BOZZA, Morgana. Pensando o ensino de geometria espacial: estratégias didáticas que utilizam o software GeoGebra e materiais concretos. *Scientia cum Industria*, v. 3, n. 3, p. 134-138, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular – BNCC*. Brasília, 2018. Disponível em: <<https://bit.ly/3i732j3>>. Acesso em: 10 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2002. Disponível em: <<https://goo.gl/quhrrJ>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 2, Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, Brasília, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental*. Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto. MEC-SEF. Brasília, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto. MEC-SEF. Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

CARVALHO, Hudney Alves Faria de; FERREIRA, Ana Cristina. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em Programas de Pós-Graduação nos últimos anos. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2015, São João Del Rei/MG. *Anais...* São João Del Rei/MG: Universidade Federal de São João Del Rei/MG, 2015. p. 1-13.

COSTA, André Pereira da; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Níveis de pensamento geométrico de alunos do Ensino Médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 7, n. 3, p. 1-19, 2016.

COSTA, Cleyton Bueno Silva; LIRA, Everton Henrique Cardoso de. O Modelo de Van Hiele no Ensino de Geometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 4, 2017, João Pessoa. *Anais...* João Pessoa: UEPB, 2017. p. 1-8.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

DAMIANI, Magda Floriana; ROCHEFORT, Renato Siqueira; CASTRO, Rafael Fonseca de; DARIZ, Marion Rodrigues; PINHEIRO, Silvia Siqueira. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de educação*, Pelotas, n. 45, p. 57-67, maio/ago. 2013.

DEWEY, John. *Democracia e educação*. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DEWEY, John. *Vida e educação*. Tradução e estudo preliminar por Anísio Spínola Teixeira. São Paulo: Melhoramentos; Rio de Janeiro: Fundação Nacional de Material Escolar, 1978.

FIorentini, Dario; LOrenzato, Sergio. *Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas, SP: Autores associados, 2012. (Coleção formação de professores).

FLICK, Uwe. *Introdução à metodologia da pesquisa: um guia para iniciantes*. Porto Alegre: Penso, 2013.

FRANCO, Sérgio; PEREIRA, Cesar. Estudo da geometria espacial e recursos pedagógicos manipuláveis: uma estratégia para aguçar o interesse e a criatividade do aluno. *Cadernos PDE*, v. 1, n. 1, p. 2-17, 2013.

FREIRE, Madalena. O que é um grupo? In: FREIRE, Madalena (Org.). *Grupo: indivíduo, saber e parceria: malhas do conhecimento*. 3. ed. São Paulo: Espaço Pedagógico, 2003. p. 29-38. (Série Seminários).

FREIRE, Paulo. *A educação na cidade*. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra, 2015.

FREITAS, Júlio César Matias de. *Trabalhando poliedros através de aprendizagem cooperativa utilizando softwares*. 2015. 108 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte (CE), 2015.

FREUDENTHAL, Hans. Mathematics as an educational task. In: FONSECA, Maria da Conceição F. R.; LOPES, Maria da Penha; BARBOSA, Maria das Graças Gomes; GOMES, Maria Laura Magalhães; DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. *O ensino de Geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GATTI, Bernardete Angelina. Estudos quantitativos em educação. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 30, n. 1, p. 11-30, jan./abr. 2004. Disponível em: <<https://bit.ly/2QQFTFr>>. Acesso em: 20 set. 2019.

GEHRKE, Tatiéle Tamara. *Trilhos matemáticos como contexto para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial com estudantes do Terceiro Ano do Ensino Médio*. 2017. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

GOMES, Rosa Maria; BRITO, Elisabeth; VARELA, Ana. Intervenção na formação no ensino superior: a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). *Revista Interações*, v. 12, n. 42, p. 44-57, 2016.

GUEDES, Karine de Lima; ANDRADE, Rui Otavio Bernardes de; NICOLINI, Alexandre Mendes. A avaliação de estudantes e professores de administração sobre a experiência com a aprendizagem baseada em problemas. *Administração: Ensino & Pesquisa*, v. 16, n. 1, p. 71-100, 2015.

GUEDES, Maria de Fátima dos Santos. *Estudando prismas com o auxílio de softwares educativos tridimensionais*. 2013. 99 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras (RJ), 2013.

GUTIERREZ, Angel. Exploring the links between Van Hiele levels and 3 – dimensional Geometry. *Structural Topology*, Valencia, Spain, v. 18, n. 1, p. 31-48, 1992.

JEHIN, Monique Detheux; CHENU, Florent. Comment évaluer le raisonnement géométrique?. *Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale*, Liège, v. 3, n. 4, p. 67-85, 2000.

JÓFILI, Zélia. Piaget, Vygotsky, Freire e a construção do conhecimento na escola. *Educação: Teorias e Práticas*, v. 2, n. 2, p. 191-208, dez. 2002.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*. Niterói: EdUFF, 2003.

LEIVAS, José Carlos Pinto. *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Matemática*. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. reimpressão. São Paulo: Atual, 1998.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, Campinas, n. 4, 1. sem., p. 3-12, 1995.

MACHADO, Helena Beatriz Witte Cruz. *O uso de recursos tecnológicos como auxiliares na cognição espacial*. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

MAMEDE, Sílvia.; PENAFORTE, Júlio Ceasr. (Orgs.). *Aprendizagem baseada em problemas: anatomia de uma nova abordagem educacional*. Fortaleza: Hucitec, 2001.

MEDEIROS, Amanda Marina Andrade; MENDES, Ana Clara Manhães; SOUZA, Camila Rosa Fernandes de; OLIVEIRA, Cynthia Bisinoto Evangelista de; MARINHO-ARAÚJO, Claisy Maria; RODRIGUES, Dayane Silva; OLIVEIRA, Maria Claudia Santos Lopes de; LEAL, Maria Lucia Pinto; CARMO, Marlúcia Ferreira do; DUARTE, Natália de Souza; YANNOULAS, Silvia Cristina; SOUZA, Tatiana Yokoy de. *Docência na socioeducação*. Brasília: Universidade de Brasília, Campus Planaltina, 2014.

MONTEIRO, Bruna Garcia. *O uso de material concreto para melhor visualização dos sólidos geométricos*. 2013. 74 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas (MG), 2013.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. *Inteligência visual e 3D: compreendendo conceitos básicos de Geometria Espacial*. São Paulo: Edgard Blucher, 2005.

MORACO, Ana Sheila do Couto Trindade. *Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio*. 2006. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2006.

MORAES, Magali Aparecida Alves de; MANZINI, Eduardo José. Concepções sobre a aprendizagem baseada em problemas: um estudo de caso na Famema. *Revista Brasileira de Educação Médica*, v. 30, n. 3, p. 125-135, 2006.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). *Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens*, v. 2, p. 15-33, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas).

MOREIRA, Marco Antonio. Investigación en enseñanza: aspectos metodológicos. *Actas de la I Escuela de Verano sobre Investigación en Enseñanza de las Ciencias*. Burgos, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos, 2000. p. 13-51.

MOREIRA, Marco Antonio. Pesquisa em Educação em Ciências: métodos qualitativos. Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Burgos, Espanha; Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Texto de Apoio n° 14. Publicado em: *Actas del PIDECE*, n. 4, p. 25-55, 2002.

MOREIRA, Rosilei Cardozo. *Ensino de Matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a “sala de aula invertida”*. 2018. 50 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

MUELLER, Liliane Carine. *Uso de recursos computacionais nas aulas de Matemática*. 2013. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2013.

OLIVEIRA, Liliane Lelis de; VELASCO, Angela Dias. *O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá*. Curitiba: Graphica, 2007.

PAIVA, Thiago Yamashita. *Aprendizagem ativa e colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da Matemática*. 2016. 55 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

PEREIRA, Guilherme; ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho. Pesquisa quantitativa em educação: algumas considerações. *Revista periféria*. Rio de Janeiro, v. 8, n. 1, p. 66-79, jan./jun. 2016. Disponível em: <<https://bit.ly/3gSkYMN>>. Acesso em: 13 jul. 2020.

PIAGET, Jean. *Problemas de psicologia genética*. Petrópolis: Vozes, 1972.

PIASESKI, Claudete Maria. *A Geometria no Ensino Fundamental*. 2010. 35 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2010. Disponível em: <<https://bit.ly/36vUmh9>>. Acesso em: 13 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da. Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Portugal, n. 21, p. 13-30, mar. 2010.

PORTAL PORVIR. *Jovens querem atividades práticas e tecnologia na escola*. 6 out. 2016. Disponível em: <<https://bit.ly/2X3cwDu>>. Acesso em: 29 jun. 2018.

QUEIROZ, Vanessa de Sousa. *Contribuições da linguagem Scratch para o ensino da Geometria*. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2018.

RIBEIRO, Luis Roberto de Camargo; ESCRIVÃO FILHO, Edmundo; MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. Uma experiência com a PBL no ensino de engenharia sob a ótica dos alunos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 31, 2003, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: COBENGE, 2003. p. 1-12.

SANTA CATARINA. *Projeto Político Pedagógico (PPP)*. Maravilha, SC, 2019.

SANTOS, Alessandra Hendi dos. *Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização*. 2014. 97 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

SCHEINER, Thorsten; PINTO, Márcia Maria Fusaro. Visualização e Ensino de Análise Matemática. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 637-654, 2015.

SCHMITT, Cristina. *A integração das TDIC à educação matemática um estudo sobre o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas no ensino e aprendizagem de Matemática*. 2018. 196 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2018.

SCHÖN, Donald Alan. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, António (Coord). *Os professores e a sua formação*. 2. ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. *Mediação pedagógica na sala de aula*. Campinas, São Paulo, 1996.

SOUZA, Cacilda da Silva; IGLESIAS, Alessandro Giraldes; PAZIN-FILHO, Antonio. Estratégias inovadoras para métodos de ensino tradicionais – aspectos gerais. *Medicina*, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 284-292, 2014.

TORRES, Patrícia Lupion. *Laboratório on-line de aprendizagem: uma proposta crítica de aprendizagem colaborativa para a educação*. 2004. 198 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

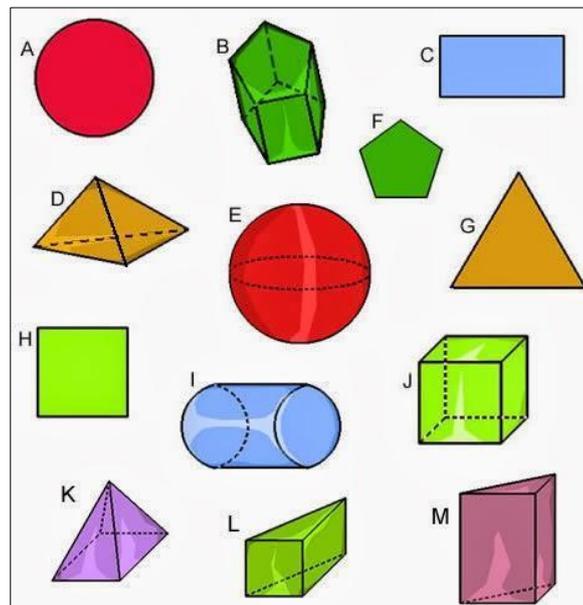
VILLIERS, Michael de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.

WOLF, Alexandre. Por que é preciso repensar as técnicas de ensino da matemática?. *Jornal da USP*, São Paulo, 18 out. 2017. Disponível em: <<https://bit.ly/2SZvVCH>>. Acesso em: 05 jul. 2019.

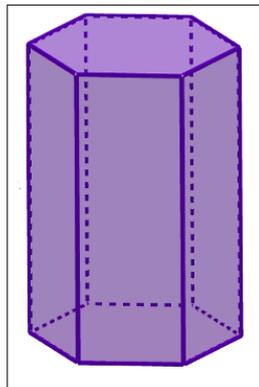
WOODS, Donald R. *Problem Based Learning: how to get most from PBL*. 3. ed. Canadá: McMaster University, 1996.

APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica

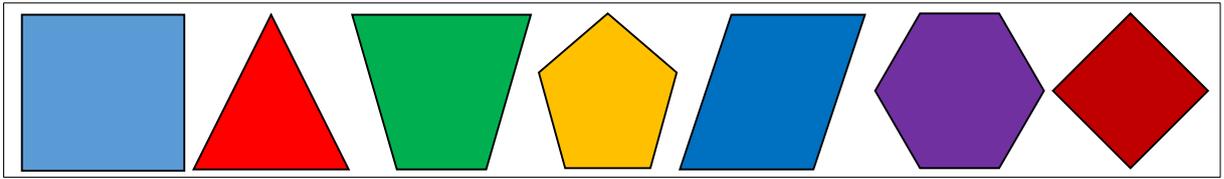
- 1) Quando se observa ao redor podem-se notar formas e sólidos geométricos. Cite alguns deles.
- 2) Você considera importante o uso de materiais manipulativos em sala de aula para sua aprendizagem no conteúdo de Geometria espacial? Por quê?
- 3) Geometria Espacial é o estudo da Geometria no espaço, onde se estudam as figuras que possuem três dimensões. No quadro a seguir, assinale com um x as formas geométricas espaciais.



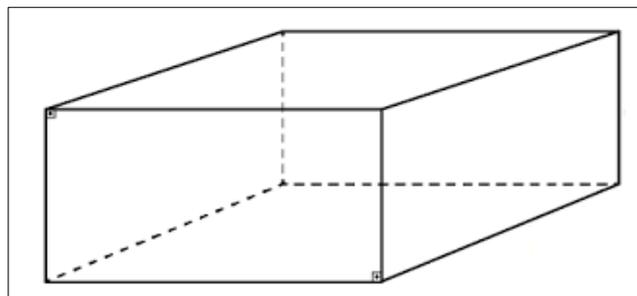
- 4) Quais formas geométricas planas você observa na composição do prisma abaixo?



5) Escreva o nome de cada figura, o número de faces, vértices, arestas e ângulos?



6) Foi construída com cartolinas recortadas em dois tamanhos e fita crepe, a seguinte figura:

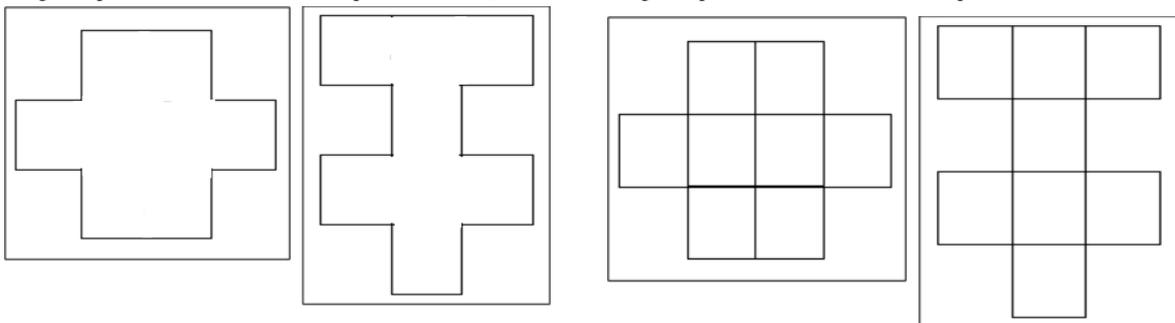


- a) Quantas peças de cartolina de cada tamanho foram necessárias para formar este sólido geométrico?
- b) A fita crepe foi utilizada para prender as peças de cartolina. Considerando que a peça menor tem 2 cm de largura e 3 cm de comprimento e que a peça maior tem 3 cm de largura e 6 cm de comprimento, qual a quantidade aproximada de fita crepe utilizada?

07) A figura abaixo representa duas salas divididas em quadrados.

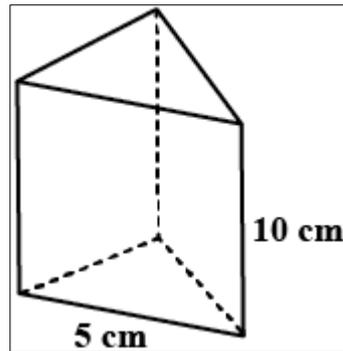
Imagem representada sem as divisórias (paredes internas) das salas.

Imagem representada com as divisórias (paredes internas) das salas



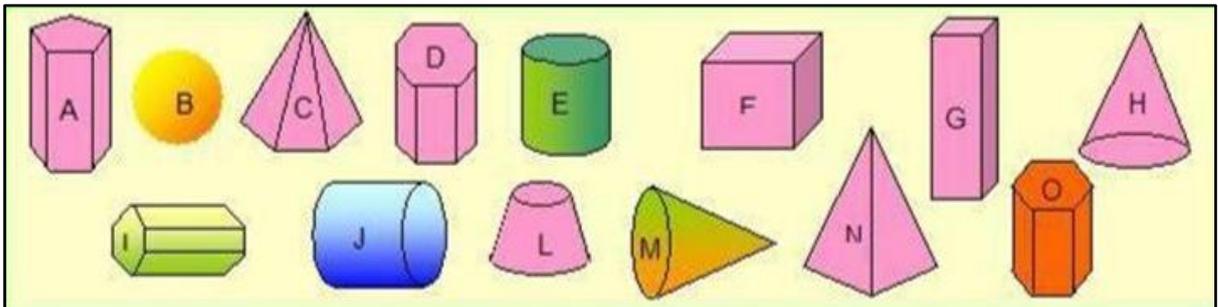
- a) Se colocarmos rodapé nas salas, a quantidade de material necessário será igual para ambas?
- b) Se for colocado piso nas salas, qual delas ocupará uma maior quantidade de cerâmicas?

08) Você consegue definir qual é a área e o volume da seguinte figura.



09) Diferencie figuras planas de sólidos geométricos, descrevendo suas características.

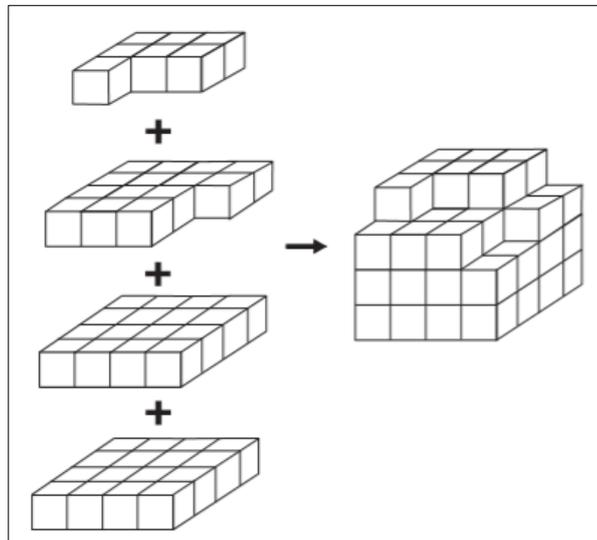
10) Observe os sólidos geométricos abaixo. Crie uma característica que os diferencie (cite esta). Agrupe os mesmos conforme esta característica.



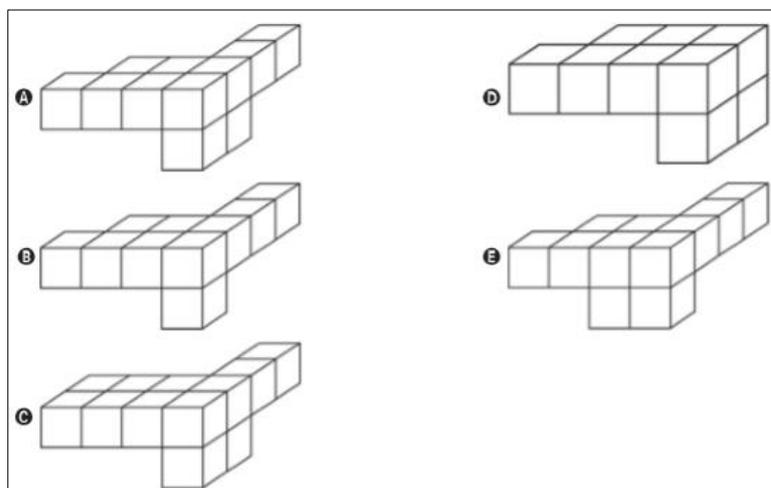
APÊNDICE B - Avaliação final

(ENEM 2018) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários conforme a figura:

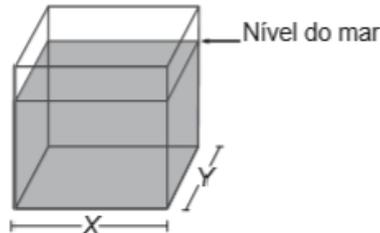


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é:



ENEM 2017

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- A 1 e 49
- B 1 e 99
- C 10 e 10
- D 25 e 25
- E 50 e 50

ENEM 2017

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.



Figura 1

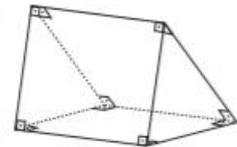


Figura 2

ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

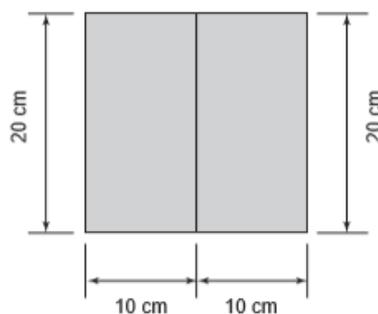
A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

- A tetraedro.
- B pirâmide retangular.
- C tronco de pirâmide retangular.
- D prisma quadrangular reto.
- E prisma triangular reto.

ENEM 2015

Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura.



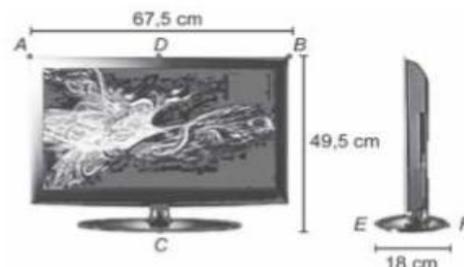
Atualmente, sua plantação de morangos ocupa uma área de 10 000 m², mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.

O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

- A 10 000.
- B 60 000.
- C 100 000.
- D 500 000.
- E 600 000.

ENEM 2015

Uma empresa especializada em embalagem de papelão recebeu uma encomenda para fabricar caixas para um determinado modelo de televisão, como o da figura.



A embalagem deve deixar uma folga de 5 cm em cada uma das dimensões. Esta folga será utilizada para proteger a televisão com isopor. O papelão utilizado na confecção das caixas possui uma espessura de 0,5 cm.

A empresa possui 5 protótipos de caixa de papelão, na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas externas: comprimento, altura e largura, em centímetro, são respectivamente iguais a:

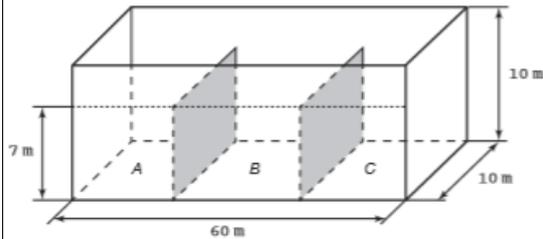
- Caixa 1: 68,0 × 50,0 × 18,5
- Caixa 2: 68,5 × 50,5 × 19,0
- Caixa 3: 72,5 × 54,5 × 23,0
- Caixa 4: 73,0 × 55,0 × 23,5
- Caixa 5: 73,5 × 55,5 × 24,0

O modelo de caixa de papelão que atende exatamente as medidas das dimensões especificadas é a

- A caixa 1.
- B caixa 2.
- C caixa 3.
- D caixa 4.
- E caixa 5.

ENEM 2015

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisorias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- A $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$
- B $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$
- C $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
- D $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
- E $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

ENEM 2016

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

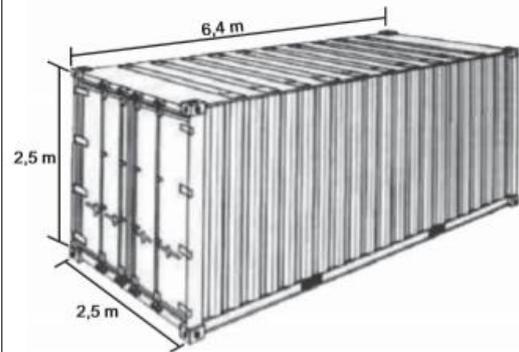


Figura 1

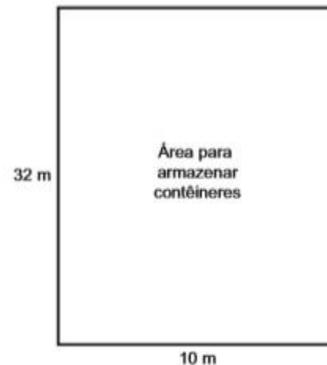


Figura 2

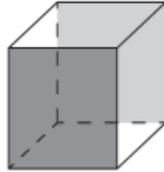
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

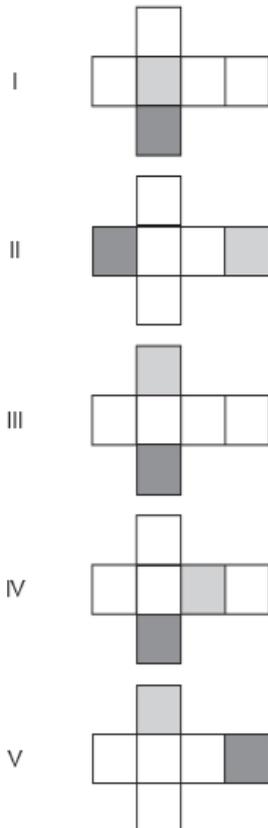
- A 12,5 m.
- B 17,5 m.
- C 25,0 m.
- D 22,5 m.
- E 32,5 m.

ENEM 2018

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:

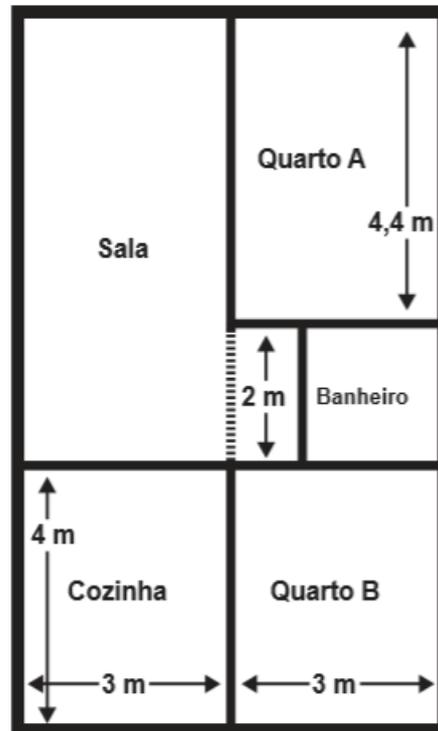


Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

ENEM 2017

A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m e das paredes internas, 0,10 m.



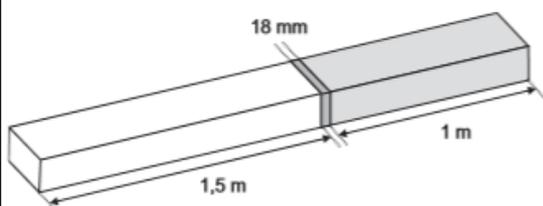
Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R\$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída.

O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

- A 250,00.
- B 250,80.
- C 258,64.
- D 276,48.
- E 286,00.

ENEM 2015

Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milímetros, conforme ilustrado na figura.

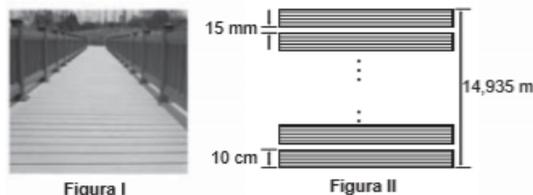


Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem?

- A 2,0230
- B 2,2300
- C 2,5018
- D 2,5180
- E 2,6800

ENEM 2015

Um marceneiro recebeu a encomenda de uma passarela de 14,935 m sobre um pequeno lago, conforme a Figura I. A obra será executada com tábuas de 10 cm de largura, que já estão com o comprimento necessário para instalação, deixando-se um espaçamento de 15 mm entre tábuas consecutivas, de acordo com a planta do projeto na Figura II.

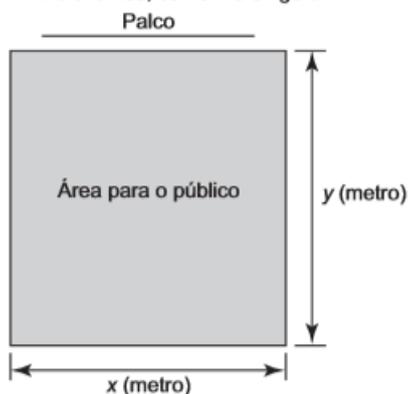


Desconsiderando-se eventuais perdas com cortes durante a execução do projeto, quantas tábuas, no mínimo, o marceneiro necessitará para a execução da encomenda?

- A 60
- B 100
- C 130
- D 150
- E 598

ENEM 2018

Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5,00.

A empresa dispõe de R\$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

- A 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
- B 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
- C 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
- D 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
- E 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

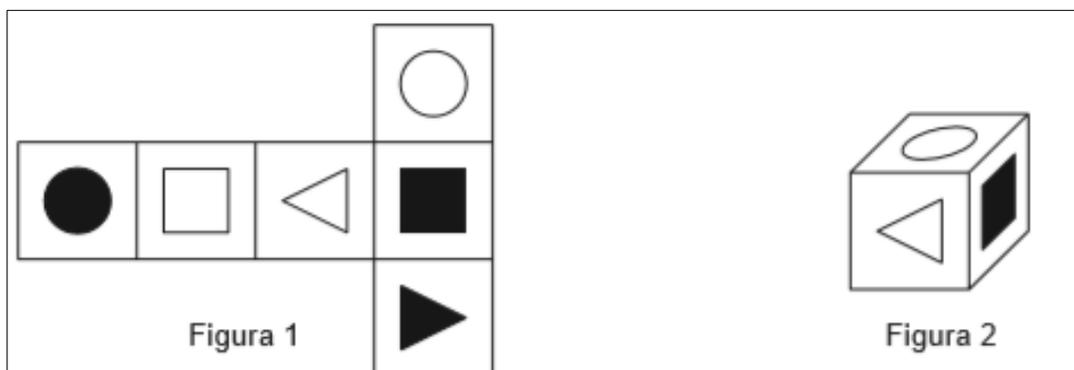
OBMEP 2017

Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P, Q, R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

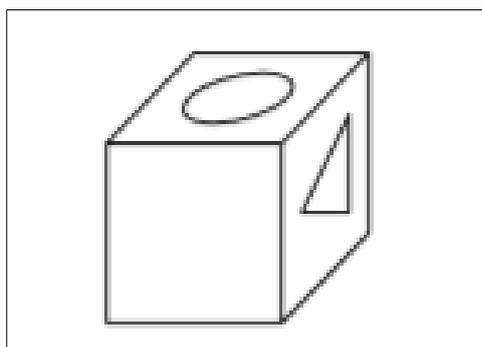
- A) S
- B) R
- C) Q
- D) P
- E) O



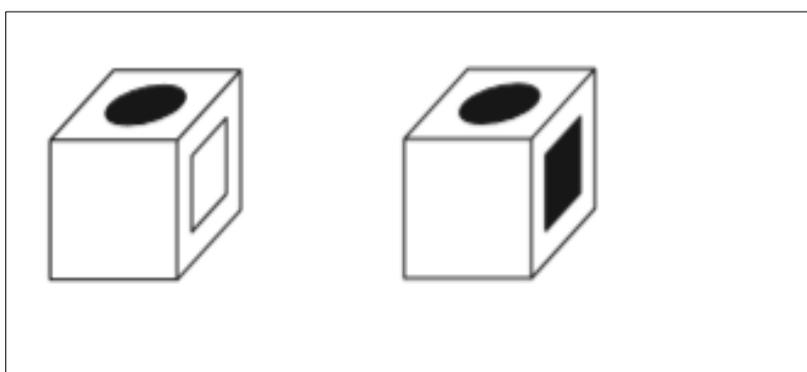
OBMEP 2019 - A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



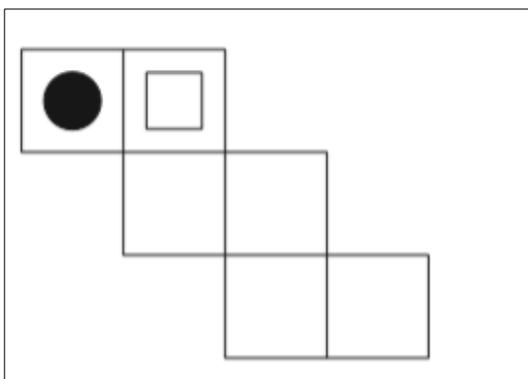
a) Em outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



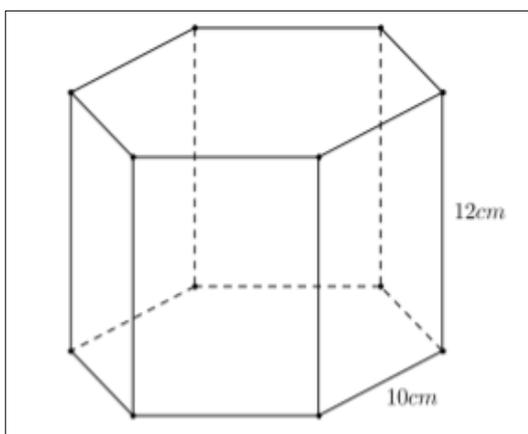
b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



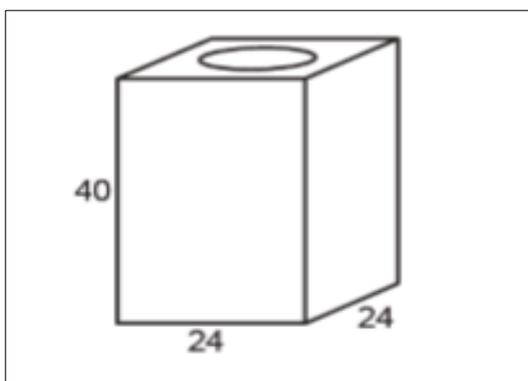
c) Abaixo temos outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



Precisamos confeccionar a tampa para a caixa de presente abaixo. Qual a quantidade de material gasto para sua confecção, sabendo que a altura da tampa é de 5 cm?



Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrados na figura. Qual a capacidade de tinta em litros que cabem nessa lata?



PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional encontra-se disponível nos endereços:

<https://www.upf.br/_uploads/Conteudo/ppgecm/2020/Elisandra_Picinin_PRODUTO.pdf>

<<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/581810>>



GUIA PARA ENSINO DE PRISMAS COM APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Elisandra Picinin
Adriano Canabarro Teixeira

Passo Fundo

2020

CIP – Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P953e Picinin, Elisandra

Guia para ensino de prismas com aprendizagem baseada em problemas [recurso eletrônico] / Elisandra Picinin. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2020.

2 MB ; PDF. – (Produtos Educacionais do PPGECEM).

Inclui bibliografia.

ISSN 2595-3672

Modo de acesso gratuito: <http://www.upf.br/ppgecm> Este material integra os estudos desenvolvidos junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECEM), na Universidade de Passo Fundo (UPF), sob orientação do Prof. Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

1. Inovações educacionais. 2. Teoria de Van Hiele.
3. Tecnologia educacional. 4. Aprendizagem. 5. Geometria - estudo e ensino. I. Teixeira, Adriano Canabarro. II. Título.
IV. Série.

CDU: 372.851

Bibliotecária responsável Jucelei Rodrigues Domingues - CRB 10/1569

LISTAS DE QUADROS E FIGURAS

Quadro 1 - Sólidos construídos.	12
Quadro 2 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.	37
Figura 1 - Planificação do Cubo e Paralelepípedo.	11
Figura 2 - Planificação de Prismas.	11
Figura 3 - Pontos A e B na Janela de Visualização no GeoGebra 3D.	15
Figura 4 - Caixa para inserção do número de vértices.	15
Figura 5 - Polígono da base do prisma em construção.	16
Figura 6 - Base do prisma em construção.	16
Figura 7 - Prisma Hexagonal.	17
Figura 8 - Construção do Cubo.	18

GLOSSÁRIO

Aprendizagem baseada em problemas: ou PBL - Problem Based Learning é uma metodologia ativa que desenvolve o conhecimento por meio de resoluções de problemas, voltadas ao mundo real, aliando a teoria da sala de aula com a prática do contexto social.

Metodologia Ativa: método de aprendizagem com o objetivo de estimular a participação ativa dos estudantes. O aluno é o centro da ação educacional, desenvolvendo o papel de protagonista, tem mais autonomia e é o principal responsável na construção do seu aprendizado.

Modelo de Van Hiele: modelo de aprendizagem de desenvolvimento do pensamento geométrico, baseado em cinco níveis, com objetivo de compreender as dificuldades de aprendizagem em Geometria apresentadas pelos seus alunos.

Geometria Euclidiana: Baseada nos postulados de Euclides. É a Geometria em duas e três dimensões.

Geometria Não Euclidiana: é uma Geometria baseada num sistema axiomático. Que pode auxiliar, por exemplo, na definição de situações geométrica sobre uma superfície curva.

Prisma: sólido geométrico definido no espaço tridimensional, ou seja, apresenta duas faces congruentes e paralelas chamadas base e as demais faces são laterais.

SUMÁRIO

1	APRESENTAÇÃO	5
2	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	8
2.1	Sequência didática com a utilização de Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL e o uso das tecnologias digitais	8
2.1.1	<i>Operacionalização da sequência didática</i>	8
2.1.2	<i>Objetivos da sequência didática</i>	9
2.1.3	<i>Materiais necessários</i>	9
2.1.4	<i>Desenvolvimento das atividades</i>	9
2.2	Primeiro Encontro	9
2.3	Segundo Encontro	13
2.4	Terceiro Encontro	19
	REFERÊNCIAS	23
	APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica	24
	APÊNDICE B - Avaliação final	27
	APÊNDICE C - Ao Professor é Importante Saber	34

1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é um material que propõe uma sequência didática para o estudo de prismas a partir da utilização do modelo Van Hiele, aliado com Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) e com o uso das tecnologias digitais.

O modelo de Van Hiele consiste em uma teoria de ensino e aprendizagem de Geometria, onde a aprendizagem passa por níveis progressivos de pensamento. Esse modelo apresenta cinco níveis de pensamento geométrico, onde cada nível apresenta uma linguagem própria. Os conteúdos são trabalhados de forma que os alunos consigam evoluir, de um nível para o outro, visando estimular o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Os cinco níveis do pensamento geométrico de Van Hiele, a partir do texto de Jehin e Cheneu (2000), traduzido por Costa e Santos (2014), apresentam as seguintes descrições e exemplos:



Primeiro nível – básico: Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um losango é losango “porque ele está na borda”, ou uma altura é uma altura “porque é vertical”.

Segundo nível – análise: Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos.

Terceiro nível – dedução informal: Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento.

Quarto nível – dedução formal: Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos,

compreendê-las. **Exemplo:** Os alunos são capazes de demonstrar que, um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango.

Quinto nível – rigor: Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias Geometrias, na ausência de modelos concretos. **Exemplo:** Os alunos são capazes de entender Geometrias não euclidianas.¹

A Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é uma metodologia ativa e tem o objetivo de envolver os alunos, tornando-os protagonistas do processo de ensino e aprendizagem. Neste trabalho, o conteúdo será trabalhado através de resolução colaborativa de desafios e problemas, sendo que as atividades desenvolvidas serão realizadas em grupo. A PBL é um método caracterizado pelo uso de problemas do mundo real, onde os alunos investigam, discutem, criam hipóteses e tentam resolver o que lhes foi proposto.

A metodologia PBL pode ou não estar associada à utilização de recursos tecnológicos. Especificamente, nessa sequência opta-se pelo uso desses recursos, de modo a incentivar a habilidade de investigação, reflexão e criação de estratégias próprias para a resolução das atividades propostas aos alunos.

Essa proposta didática foi desenvolvida no curso de mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, RS, sob a orientação do professor Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

O ponto de partida foi que uma escola pretende construir uma piscina para a prática de natação, para a realização de atividades esportivas nas aulas de Educação Física. Partindo dessa situação problema, os alunos foram instigados a contribuir nesse projeto da construção da referida piscina.

A partir desta questão norteadora inicial foi pensada uma proposta que pudesse levar os alunos a desenvolver as habilidades necessárias de visualização, análise, dedução formal e informal do modelo de Van Hiele no estudo de prismas, bem como contribuir, de maneira participativa e crítica, nas resoluções de situações problemas propostos aos mesmos.

¹ **Geometria não Euclidiana:** é uma Geometria baseada num sistema axiomático distinto da Geometria Euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre, acesso em 01/07/2020.



Sugestão ao professor: Essa atividade pode ser adaptada e implantada para outro sólido qualquer.

As atividades deste produto educacional foram pensadas para o 3º ano do Ensino Médio, com duração prevista de 15 horas aulas. Foram aplicadas em forma de oficinas, com três encontros, ou seja, três noites.

Como descrito anteriormente, o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico consiste em cinco níveis de compreensão. Para aplicação desta sequência atingiu-se apenas os quatro primeiros níveis, uma vez que o Nível 4: Rigor, é o caso do estudo da Geometria com outra estrutura axiomática, que não é abordada no Ensino Médio, como a Geometria não-euclidiana, o que não se pretendia explorar nesse momento.

Nesse processo é imprescindível levar em conta os conhecimentos e as experiências matemáticas já vivenciadas pelos alunos. O professor precisa criar situações de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade.

Destaca-se que o ensino deve considerar a necessidade de vincular a escola e a vida, envolvendo os componentes curriculares, uma vez que a proposta do Ensino Médio consiste em uma visão integrada e aplicada à realidade e ao mercado do trabalho.

Inicialmente, através do modelo de Van Hiele, verificou-se em que nível de pensamento geométrico cada aluno se encontrava; posteriormente, foram propostas atividades desafiadoras, para que os alunos conseguissem progredir de nível.

A associação da PBL ao modelo de Van Hiele tem o objetivo de verificar a relação existente entre os processos envolvidos na resolução de problemas e a progressão dos alunos, nos níveis de compreensão do pensamento geométrico. Para tanto, após a aplicação desta proposta didática, espera-se que os alunos consigam compreender os conceitos de primas formulando, a partir de sua prática, conceitos mínimos referentes ao conteúdo e que os mesmos percebam a importância desses conhecimentos.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esse capítulo trata da apresentação detalhada da sequência didática desenvolvida e validada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, para o estudo de prismas, a partir da utilização do modelo Van Hiele, aliado ao PBL e ao uso das tecnologias digitais.

2.1 Sequência didática com a utilização de Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL e o uso das tecnologias digitais

2.1.1 Operacionalização da sequência didática

- Apresentar a proposta didática aos alunos;
- Organizar os grupos de trabalho;
- Relembrar conceitos de figuras geométricas planas;
- Estabelecer relação entre o número de lados da base de um prisma e o número de vértices, arestas e faces;
- Identificar as características de um prisma;
- Conhecer a planificação de alguns prismas;
- Associar as formas geométricas espaciais a objetos e elementos do cotidiano;
- Apresentar e desenvolver uma situação problema relacionada à construção de uma piscina nas dependências da escola, para a prática de aulas de natação;
- Trabalhar a resolução de problemas verificando se os alunos conseguiram compreender os conceitos construídos no decorrer das atividades propostas;
- Trabalhar, com o Geogebra, conhecimentos básicos das ferramentas dispostas na janela de visualização 2D e 3D;
- Verificar, por meio do modelo de Van Hiele, o nível de pensamento geométrico em que os alunos se encontram, antes e após a aplicação da sequência didática, analisando se os alunos progrediram ou não de nível de conhecimento.

2.1.2 *Objetivos da sequência didática*

- Aprofundar o conhecimento da metodologia ativa PBL, como alternativa didático-pedagógica para o ensino;
- Compreender o conteúdo de prismas, através de investigações práticas, problemas desafio e uso de tecnologias digitais, com a utilização da metodologia ativa PBL, para o ensino dos alunos de Ensino Médio.

2.1.3 *Materiais necessários*

Quadro, marcador para quadro, lápis, caderno, calculadora, computadores, *software* GeoGebra, trena, celular, cartolina, esquadro, régua, projetor multimídia, atividades impressas.

2.1.4 *Desenvolvimento das atividades*

As atividades da sequência didática totalizam 15 horas aulas e serão desenvolvidas em 3 encontros, no turno da noite, durante as aulas regulares dos alunos.

2.2 **Primeiro Encontro**

No primeiro encontro será realizada uma conversa inicial e explicativa sobre a proposta a ser desenvolvida. No decorrer dessa conversa, procurar-se-á buscar o objetivo de conscientizar os alunos no sentido de que o sucesso da atividade requer, por parte deles, cooperação, interesse, interatividade, ajuda mútua e desenvolvimento do raciocínio.

Objetivo do Encontro: Neste encontro será apresentada a proposta didática aos alunos e organizado os grupos de trabalho. Será realizada a aplicação de um questionário para verificar, por meio do modelo de Van Hiele, o nível do pensamento geométrico em que os alunos se encontram. Os conteúdos desenvolvidos serão: conceitos de figuras geométricas planas e espaciais; prismas (características, propriedades, planificação, vértices, faces, arestas,

perímetro, área da base, área lateral e área total e volume). Para dar significado ao assunto estudado, priorizar-se-ão as formas geométricas espaciais relacionadas a objetos e a elementos do cotidiano.

Atividade 01: Para iniciar os trabalhos, os alunos receberão um questionário para verificar em qual nível de pensamento geométrico eles se encontram. Esse teste diagnóstico tem como objetivo verificar em qual nível de conhecimento os estudantes se encontram, segundo o Modelo de Van Hiele, o qual verifica os conhecimentos prévios que os alunos apresentam, em relação à Geometria Plana e Espacial. Após responderem ao questionário, será socializado com a turma alguns conceitos referentes à Geometria, conforme apresenta o Apêndice A.

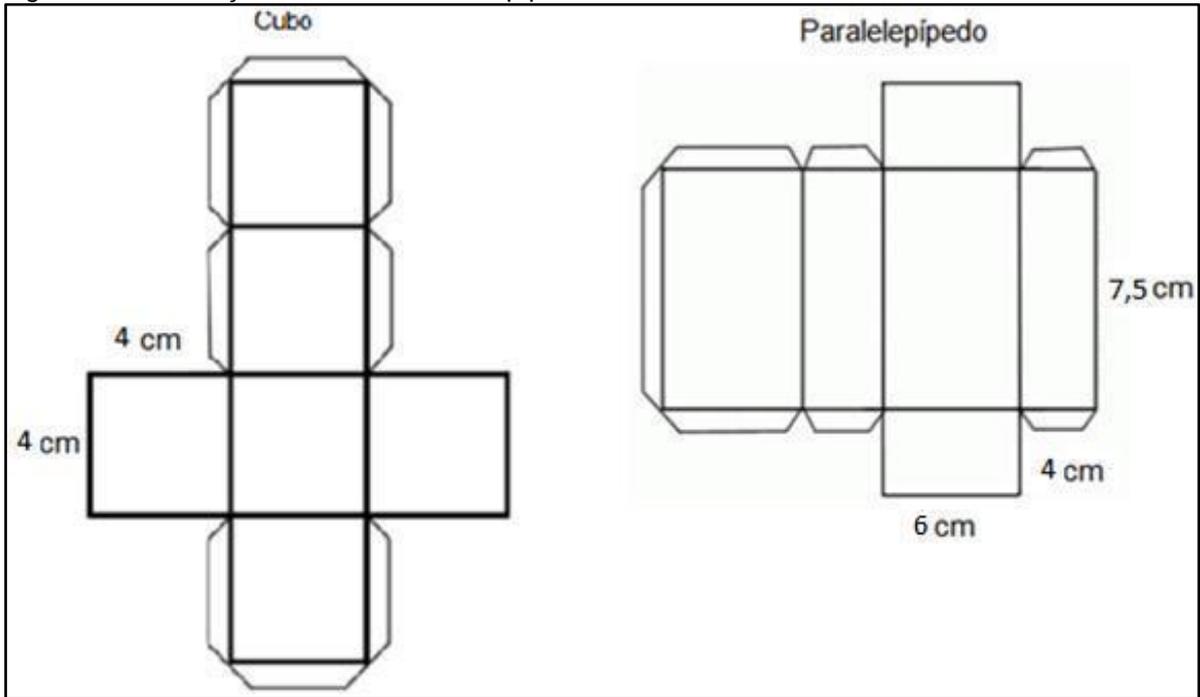
Nota ao professor (a): Identificar o conhecimento prévio do aluno através do diagnóstico é muito importante, praticamente indispensável. A partir disso, o professor consegue analisar qual deve ser o ponto de partida no assunto a ser estudado. Um dos objetivos de sua aplicação é conhecer as dificuldades dos alunos e fazer uma relação com o que eles sabem e com o que eles precisam aprender. Outro ponto importante é relacionar os conhecimentos prévios dos alunos em relação à formação dos conceitos geométricos em diferentes circunstâncias, tanto escolar quanto no seu meio social.



Na sequência, serão divididas as equipes de trabalho por livre escolha da turma, sendo que cada equipe deverá ser composta, no máximo, por quatro membros. Assim, as atividades propostas a seguir serão todas realizadas em equipe.

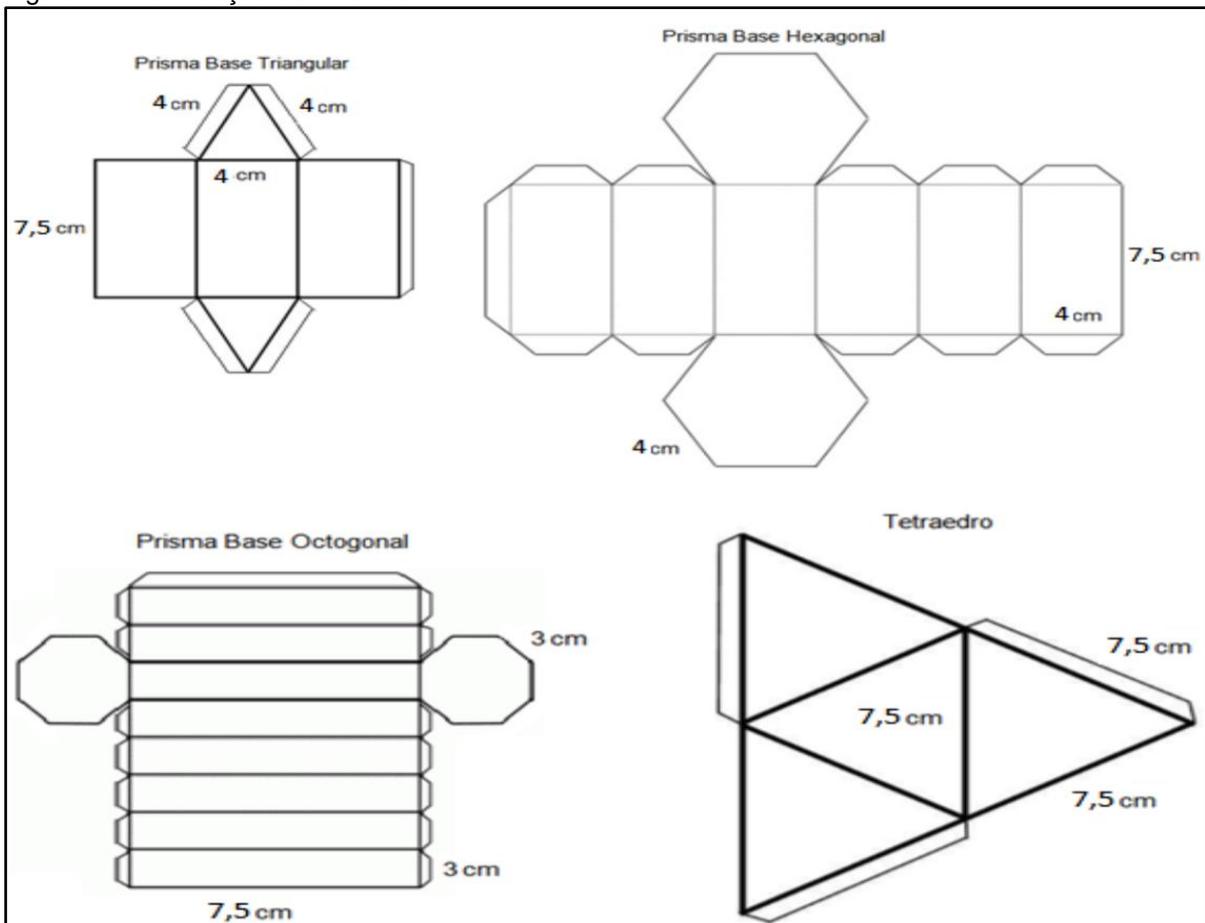
Atividade 02: Será entregue uma lista de modelos das planificações de alguns dos prismas, juntamente com régua, esquadros e transferidor para serem reproduzidas em cartolinas (também distribuídas), aumentando o triplo de suas medidas. Essa atividade, segundo o modelo de Van Hiele, é classificada como nível básico ou nível de visualização. Objetiva a manipulação e a identificação dos objetos apresentados, conforme apresentam as Figuras 1 e 2.

Figura 1 - Planificação do Cubo e Paralelepípedo.



Fonte: Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>.

Figura 2 - Planificação de Prismas.



Fonte: Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>.

Após a construção, passar-se-á para a fase de nomear os elementos dos sólidos geométricos. Para tanto, será preenchido o Quadro 1 e, posteriormente, discutido que figuras e propriedades emergiram dessa atividade.

Quadro 1 - Sólidos construídos.

Nome do sólido	Nº de faces	Nº de arestas	Nº de vértices	Forma da base	Formas das faces laterais	Medida dos ângulos da base	Medida dos ângulos das faces laterais

Fonte: Autores, 2019.

Em relação às figuras apresentadas anteriormente, os grupos realizam agrupamento das mesmas, levando em consideração alguma característica ou propriedade (descrevendo as propriedades/características). Se os alunos conseguirem agrupar e distinguir algumas propriedades em relação às figuras, pode-se concluir que este grupo já se encontra no nível 1, ou nível de análise.

Atividade 03: Após a confecção, em cartolina, dos modelos de planificação, os alunos serão desafiados a desenhar uma planificação com medidas correspondente ao quádruplo da área das figuras originais, acima relacionadas. Nessa atividade, os alunos precisam inicialmente descobrir a área das figuras originais para, conseqüentemente, conseguir encontrar o quádruplo de sua área e assim reproduzi-la. De acordo com os níveis de Van Hiele, a atividade é classificada como nível 2, ou dedução informal.

Atividade 04: Nesse momento, os alunos (em grupos já formados anteriormente), de posse de seus celulares, serão convidados a registrar imagens que retratam Geometria Plana e Espacial, presente nas construções, ruas, placas, ou objetos encontrados nas ruas de sua cidade. Esta atividade encontra-se no nível de observação, ou seja, no nível básico.

Atividade 05: As imagens registradas pelos alunos serão apresentadas para a turma e, posteriormente, discutidas com a orientação da professora. As imagens apresentadas atenderão às seguintes especificações:

- Nome da figura (objeto);
- Quantos lados, vértices, ângulos a figura possui;
- Características ou propriedades dessa figura;
- Pode-se classificar essas figuras, de que maneira;
- Qual o perímetro, área e volume dessa figura.

Nota ao professor(a): As atividades 04 e 05 têm o objetivo de perpassar tanto o nível básico, o nível 01 e 02 do Modelo de Van Hiele, resgatando, assim, os alunos que não conseguiram a progressão de um nível mais elevado. De acordo com as propriedades do Modelo de Van Hiele, “Se o aluno está em um certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejado podem não se verificar”. Ou seja, se as atividades propostas anteriormente aos alunos não foram significativas, os mesmos não conseguirão acompanhar os processos de pensamento geométrico, que serão propostos na sequência.



Atividade 06: Com relação às imagens registradas anteriormente (fotos) de objetos geométricos, os alunos construirão três situações problemas (intermediados pela professora e usando como referência o seu livro didático), através de três imagens escolhidas pelos mesmos. As questões serão entregues à professora no final da aula.

2.3 Segundo Encontro

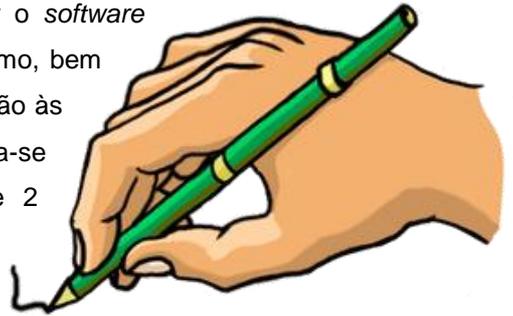
As atividades propostas neste encontro serão realizadas utilizando o *software* GeoGebra. Trata-se de um *software* livre de Matemática, com aplicativos gratuitos, o qual disponibiliza várias funções para Geometria, Álgebra, planilha, probabilidade, entre outros.

Objetivo do Encontro: retomar os conceitos aprendidos no primeiro encontro, e, a partir da utilização do *software* GeoGebra, apresentar aos alunos conhecimentos básicos das ferramentas dispostas na janela de visualização 2D e 3D, do GeoGebra.

Atividade 07: Será apresentado aos alunos o *software* GeoGebra, onde os mesmos construirão um hexágono e um cubo para a familiarização com essa ferramenta. Nesse momento será explorado, com os alunos, os principais recursos do *software* GeoGebra.

Nota ao professor(a): Para que você possa conhecer o *software* GeoGebra ou ampliar seus conhecimentos sobre o mesmo, bem como obter subsídios para orientar seus alunos em relação às atividades propostas nesta sequência didática, recomenda-se acessar os materiais disponíveis nos endereços 1 e 2 abaixo:

- 1) <<https://www.geogebra.org/m/gxwG1NgQ>> - Interface do GeoGebra e Construções iniciais.
- 2) <<https://www.geogebra.org/m/XEZPtpXD#material/DJ2wGfbc>> - Objetos e suas Propriedades.



Explorar o *software* e conhecer suas ferramentas é indispensável para o sucesso de sua utilização nas aulas. Para instalação do GeoGebra e para explorar o que ele oferece, acessar os links 3 e 4 abaixo:

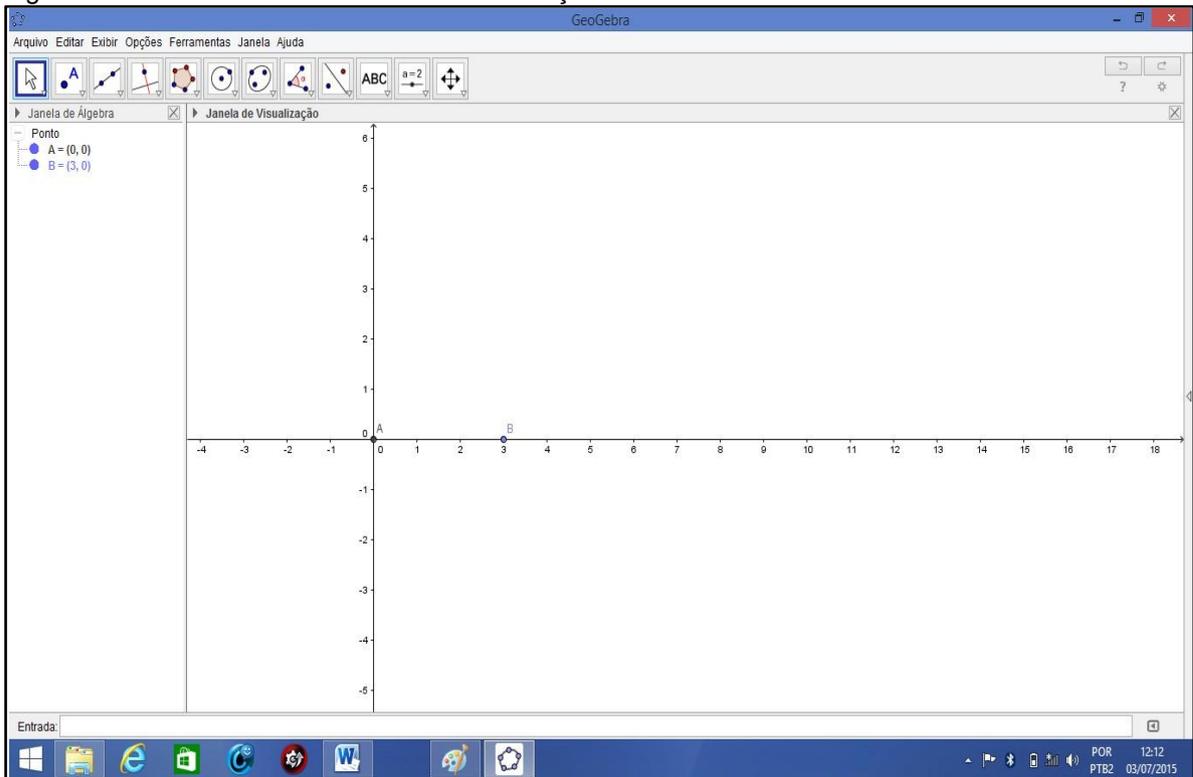
- 3) <<https://www.geogebra.org/>> - endereço para download do *software* GeoGebra.
- 4) <<https://www.youtube.com/watch?v=PxaLuRz5mD0>> - Tutorial Geometria Espacial (Prismas) no GeoGebra 5.0 (25min18seg).

Construção do Hexágono: A proposta é a construção de um prisma hexagonal, regular, reto, cuja aresta da base mede 3 cm e a aresta da face lateral mede 6 cm. Usando o GeoGebra, os alunos encontrarão a área e o volume desse prisma.

Para isso, é preciso clicar na barra de Ferramentas do GeoGebra em .

Em seguida,  Polígono Regular. Na sequência, clica-se em algum lugar do plano cartesiano da Janela de Visualização, para colocar dois pontos, A e B. Para que a aresta seja igual a 3, escolhe-se esses pontos sendo um na origem dos eixos e o outro no 3 do eixo x, conforme demonstra a Figura 3.

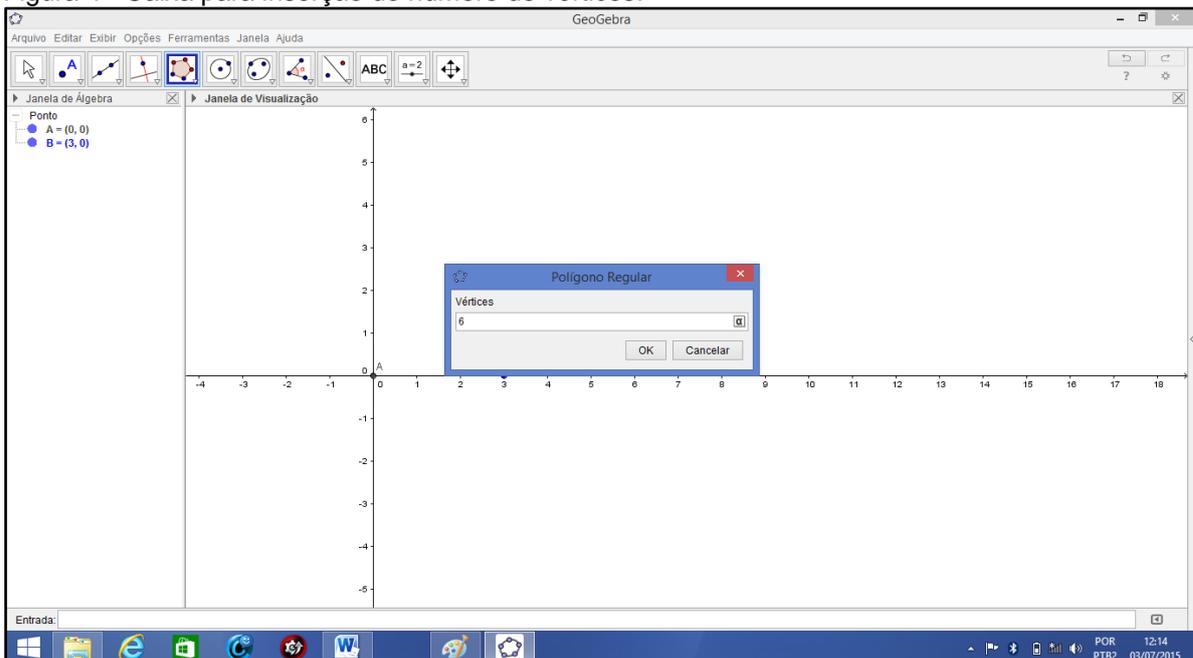
Figura 3 - Pontos A e B na Janela de Visualização no GeoGebra 3D.



Fonte: Autores, 2019.

A seguir, indica-se o número de vértices do polígono regular. Como se quer um prisma hexagonal, o número de vértice será 6. A Figura 4 apresenta esse procedimento.

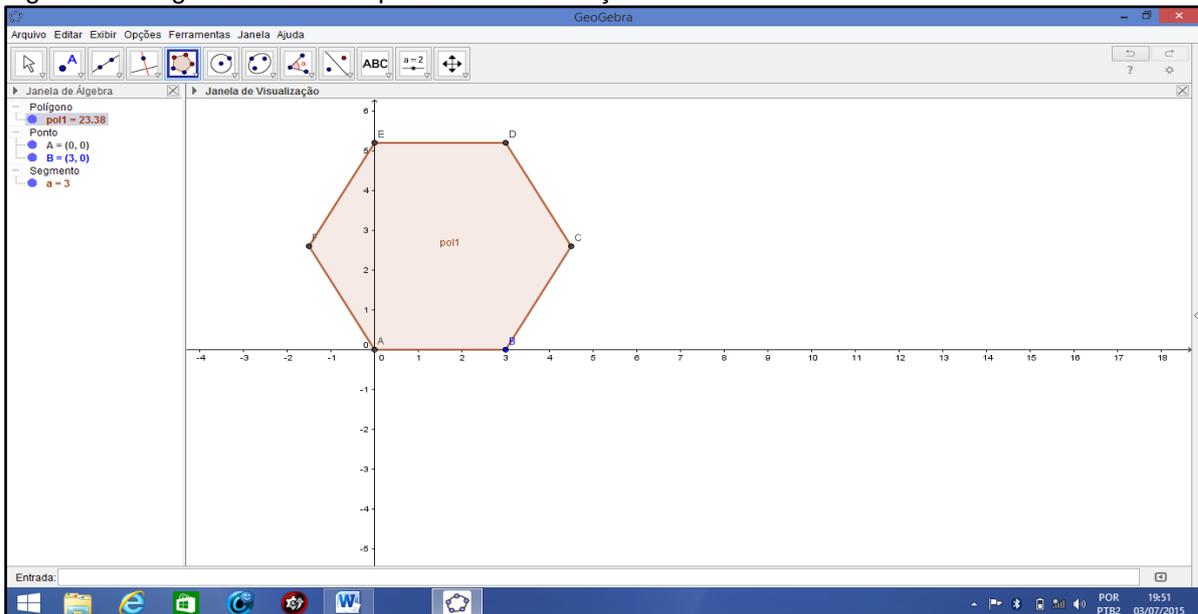
Figura 4 - Caixa para inserção do número de vértices.



Fonte: Autores, 2019.

Ao clicar em ok, o *software* mostrará o polígono da base do prisma (pol1) na Janela de Visualização, conforme a Figura 5.

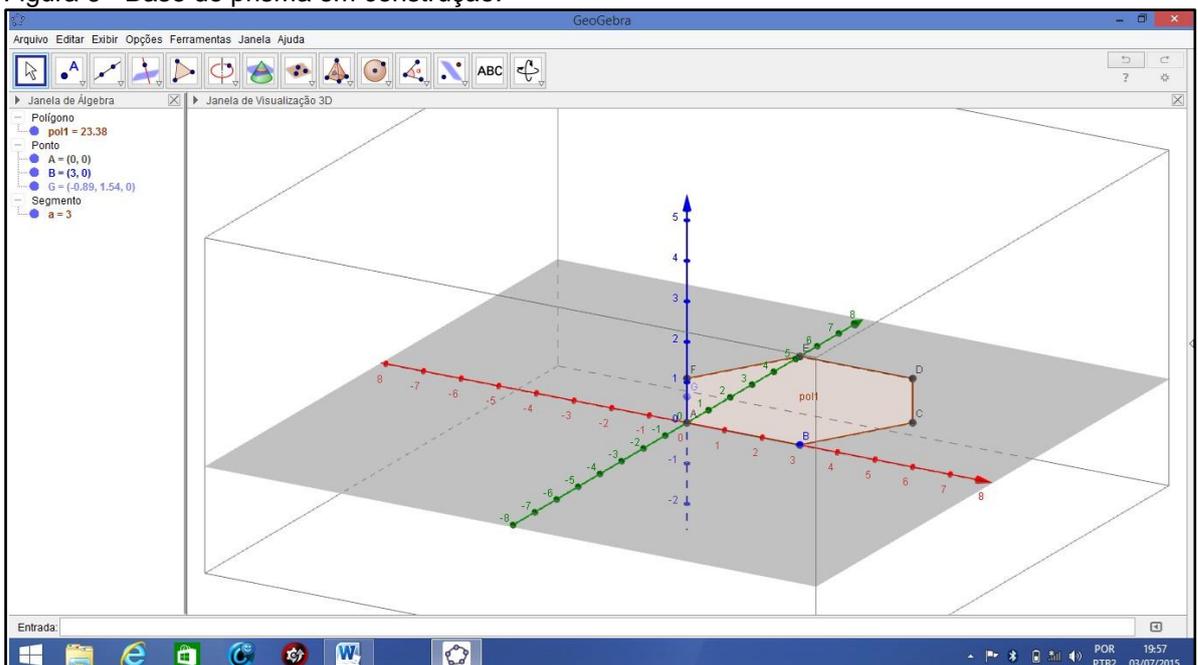
Figura 5 - Polígono da base do prisma em construção.



Fonte: Autores, 2019.

Prosseguindo, abre-se a Janela de Visualização 3D e, em seguida, fecha-se a Janela de Visualização, que foi vista na Figura 5, ficando apenas a imagem representada na Figura 6:

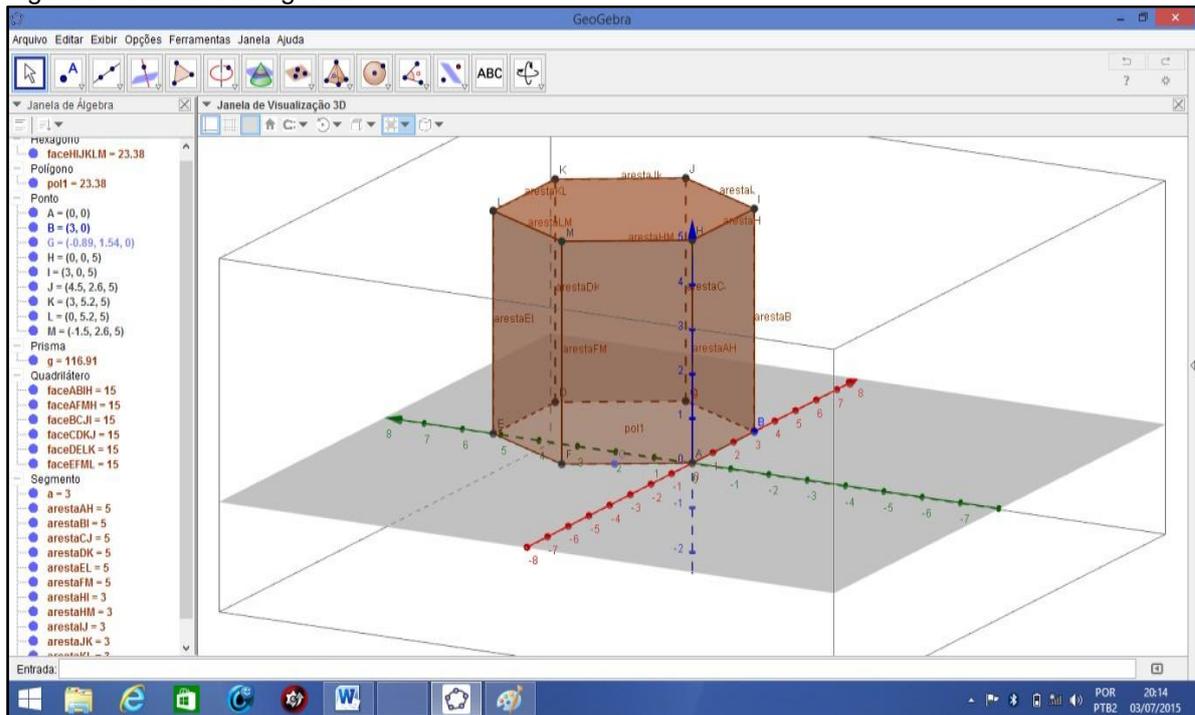
Figura 6 - Base do prisma em construção.



Fonte: Autores, 2019.

Na Barra de Ferramentas , no cone  "Extrusão para Prisma ou Cilindro" clica-se no polígono (pol1) na Janela de Visualização 3D e abrirá uma janela pedindo a altura do prisma, onde será informado 5. A Figura 7 apresenta o prisma construído.

Figura 7 - Prisma Hexagonal.

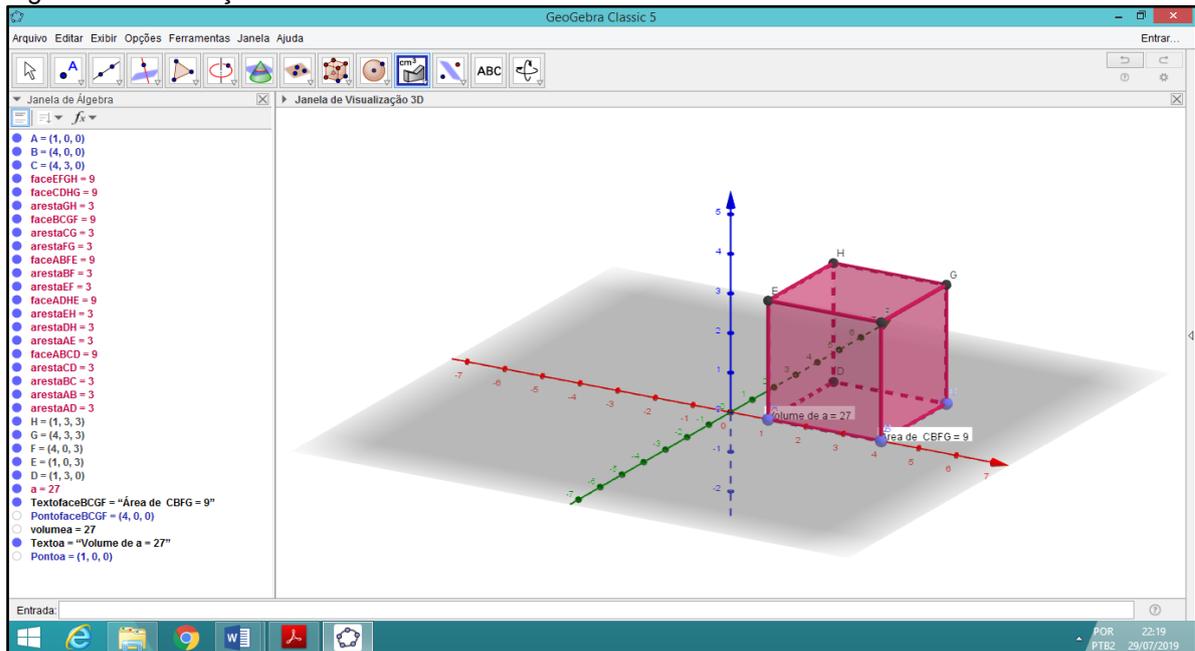


Fonte: Autores, 2019.

Na Janela de Álgebra, o programa fornecerá a área da base do prisma, o volume e a área de cada face lateral. Os quais serão apresentados e explicados aos alunos, a partir dos respectivos valores fornecidos pelo *software*.

Construindo um cubo: um cubo é um hexaedro regular. Tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. É um caso particular de prisma, pois suas faces são iguais e quadradas. O cubo é o sólido mais simples de ser criado no *software* GeoGebra. Primeiro deve-se ativar a janela 3D e, depois na nova janela, ativar a ferramenta Cubo. Em seguida, clicar em dois pontos para a formação do cubo. Para calcular a área e o volume, basta selecionar a décima primeira janela e clicar em área. Seleciona-se a figura na janela de visualização 3D e a área é fornecida. Esse procedimento deve ser repetido para descobrir o volume. A Figura 8 demonstra esses procedimentos.

Figura 8 - Construção do Cubo.



Fonte: Autores, 2019.

Nota ao professor(a): Para trabalhar com a janela de visualização 3D do *software* GeoGebra e ampliar seus conhecimentos para orientar seus alunos em relação às atividades, recomenda-se assistir aos seguintes vídeos, apresentados pelo professor Dantas.

Vídeo 01 - Visualização da janela 3D - parte 1, com duração de

11min e 38s. Disponível no endereço: <<https://www.youtube.com/watch?v=yRHb56uP6qg>>.

Vídeo 02 - Visualização da janela 3D - parte 2 - Construção de prismas e pirâmides, com duração de 9min e 47s. Disponível no endereço: <<https://www.youtube.com/watch?v=DOdl7h5iZ2U>>.



As atividades 08, 09 e 10 serão desenvolvidas no GeoGebra.

Atividade 08: A proposta é escolher uma imagem registrada pelo próprio grupo (foto) e fazer um esboço da mesma no GeoGebra, respondendo aos seguintes itens:

- Quantidade de vértices e arestas;
- Que tipo de retas a figura apresenta;
- Qual o perímetro da figura;
- Qual a área dessa figura;
- Qual o volume dessa figura.

Atividade 09: A atividade propõe que os grupos desenvolvam o que é solicitado.

- a) Construir um triângulo com as seguintes medidas: 5cm, 6cm e 12cm.
- b) Construir um quadrado de medidas quaisquer e calcular sua diagonal.
- c) Construir um prisma de base triangular, calculando sua superfície total e volume.
- d) Construir um prisma de base quadrada, com as seguintes medidas: aresta da base 4cm e altura 8cm. Calcular sua área total.
- e) Com 4 vértices e 6 arestas, construir um sólido no qual de cada vértice partem 3 arestas, cujas faces têm a forma de triângulo equilátero.
- f) Com 8 vértices e 12 arestas, construir um sólido em que partem 3 arestas de cada vértice e possuir faces quadrangulares.
- g) Calcular a área de um cubo, sabendo que seu volume é 3375 cm^3 .
- h) Fazer um relatório dos cálculos executados e o que foi observado com o desenvolvimento das atividades propostas.

Atividade 10: no endereço <<https://www.geogebra.org/m/xvq3qzd2>>, explorar as planificações dos prismas. Movimentar o controle deslizante e verificar como fica a planificação de cada um dos prismas. Observar o número de vértice, faces e arestas de cada figura para, a seguir, tirar conclusões. Nessa atividade espera-se que os alunos consigam comprovar a relação de Euler, assim, passando para o nível 3, conforme Modelo de Van Hiele.

2.4 Terceiro Encontro

Nesse encontro os alunos resolverão algumas situações problemas, estas relacionadas ao seu cotidiano, aplicando os conhecimentos adquiridos nos encontros anteriores. Posteriormente, será analisada a evolução do nível do pensamento geométrico de cada aluno. Espera-se que os alunos se encontrem no Nível 3: Dedução formal, do Modelo de Van Hiele. Portanto, nesse nível é preciso proporcionar aos alunos situações que estejam colocadas em um contexto, para que eles possam identificar o que já é conhecido e o que deve ser provado ou demonstrado em um problema.

Objetivo do Encontro: Os alunos desenvolverão uma situação problema, relacionada à construção de uma piscina nas dependências da escola, para a prática de aulas de natação. Também, resolverão problemas construídos pelos colegas, verificando se houve a compreensão dos conceitos construídos no decorrer das atividades. E, para finalizar, por meio de uma avaliação, será verificado em qual nível do pensamento geométrico os alunos se encontram, tomando por base o Modelo de Van Hiele.

Atividade 11: A atividade consiste na elaboração do projeto para a construção de uma piscina em uma escola, para realização de aulas de natação. A mesma receberá um recurso, no valor de R\$ 48.000,00, para a realização total da obra.

Seguem algumas informações para a execução do projeto.

- A escola apresenta espaço necessário para a construção da piscina;
- Cada grupo define as dimensões da piscina: comprimento, largura e profundidade;



De uma forma geral, o valor médio a ser investido nos materiais para uma piscina, por m², é de R\$ 250,00. É possível estabelecer um preço médio para as piscinas de alvenaria, no geral, que fica entre R\$ 12.000,00 e R\$ 70.000,00, dependendo do tamanho, formato e tipo de fundação utilizada na piscina.

- A piscina deve ser revestida com azulejos de 20 cm x 20 cm. Verificar a quantidade de peças de azulejos necessárias;
- Quantos litros de água são necessários para encher essa piscina, e qual o gasto que a escola terá para enchê-la? (Pesquisar o valor do metro cúbico de água).
- Os grupos de trabalho são os responsáveis pela construção desse projeto. Devem escolher o local para sua construção, tamanho da piscina

e profundidade (a piscina deve ter um formato quadrangular). O azulejo para seu revestimento será de escolha do grupo, desde que seja respeitado o tamanho. Deve-se levar em consideração o valor médio de investimento por metro quadrado e o gasto com água. Calcular o valor da obra e desenhar o projeto no *software* GeoGebra.

Inicialmente, os alunos fotografarão e medirão o local onde a piscina deverá ser construída. Para essa tarefa será solicitado aos alunos a utilização de seus celulares. Além da utilização do celular, cada equipe receberá também uma trena para realizar as medições do espaço escolhido.

Na sequência, as fotos serão compartilhadas com toda a turma e os grupos justificarão a escolha do espaço. Será realizada uma conversa com os alunos, com os seguintes questionamentos:

- Que sólido foi formado?
- Quais os dados que o problema forneceu?
- O que o problema pediu que fosse calculado?
- Com o que está relacionado o custo total da piscina?
- Qual o comprimento, a largura e a profundidade da piscina? E quais letras poderiam ser utilizadas para representar essas variáveis?
- Como calcular a quantidade de azulejos utilizados nessa construção?
- Como calcular a área total da piscina e a quantidade de água suficiente para enchê-la?
- Com que unidade de medidas foi trabalhado?

Após os questionamentos, os alunos escolherão entre o grupo um relator, para descrever as seguintes etapas para a execução do projeto:

Etapa 1: Compreendendo o problema;

Etapa 2: Estabelecimento de um plano;

Etapa 3: Execução do plano;

Etapa 4: Apresentação da resolução.

Para a culminância dessa atividade, os alunos apresentarão para a classe qual foi o plano escolhido pelo grupo, sua execução e as devidas resoluções.

Atividade 12: resolver situações problemas criadas por eles no primeiro encontro. Cada grupo criará três problemas, a partir das imagens registradas.

Será selecionado um problema por grupo, criando assim uma lista com oito exercícios para serem resolvidos. O objetivo dessa atividade é verificar se os alunos conseguem aplicar os conceitos de Geometria Espacial aprendidos, conseqüentemente, avançar nos níveis do Modelo Van Hiele.

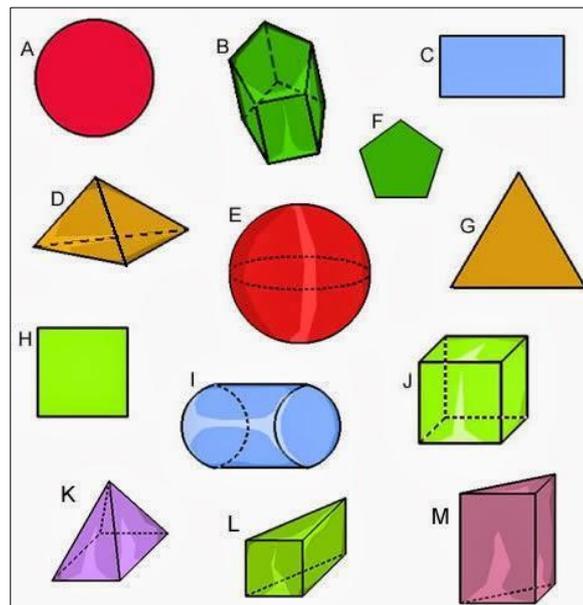
Atividade 13: Para finalizar, os alunos resolverão situações problemas. Questões essas propostas pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP e ENEM (questões do período de 2015 a 2018), objetivando verificar se houve aprendizado. As atividades serão realizadas de forma individual, as quais se encontram no Apêndice B.

REFERÊNCIAS

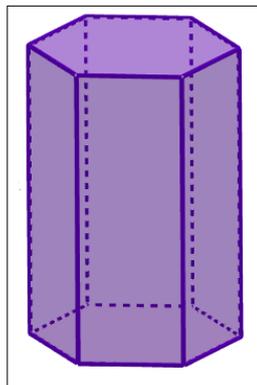
- GEOGEBRA. *GeoGebra: aplicativos matemáticos*. Download do *Software*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Interface do GeoGebra e construções iniciais*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/gxwG1NgQ>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Objetos e suas Propriedades*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/XEZPtpXD#material/DJ2wGfbc>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Planificações dos Prismas*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/xvq3qzd2>>. Acesso em: 17 jul. 2019.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Provas e Gabaritos do ENEM*. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. reimpressão. São Paulo: Atual, 1998.
- MOLDES de planificações. *Prisma*. Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. *Portal da Obmep*. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br>>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- TUTORIAL GEOGEBRA. *Visualização da janela 3D do GeoGebra - parte 1*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=yRHb56uP6q>>. Acesso em: 17 jul. 2019.
- TUTORIAL GEOGEBRA. *Visualização da janela 3D do GeoGebra - parte 2*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DOdl7h5iZ2U>>. Acesso em: 17 jul. 2019.

APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica

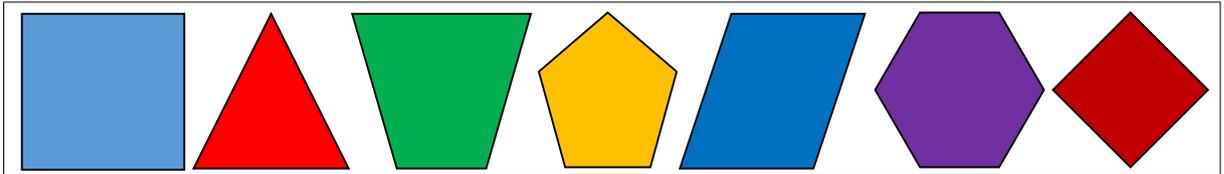
- 1) Quando se observa ao redor podem-se notar formas e sólidos geométricos. Cite alguns deles.
- 2) Você considera importante o uso de materiais manipulativos em sala de aula para sua aprendizagem no conteúdo de Geometria espacial? Por quê?
- 3) Geometria Espacial é o estudo da Geometria no espaço, onde se estudam as figuras que possuem três dimensões. No quadro a seguir, assinale com um x as formas geométricas espaciais.



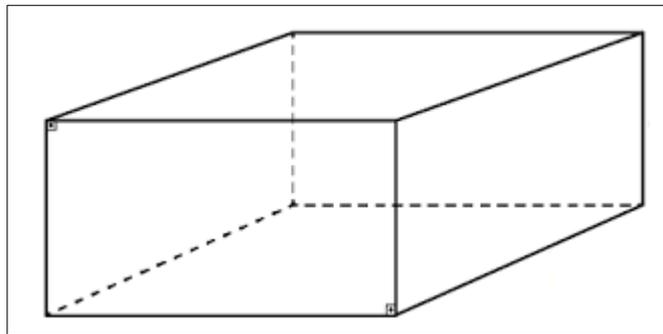
- 4) Quais formas geométricas planas você observa na composição do prisma abaixo?



5) Escreva o nome de cada figura, o número de faces, vértices, arestas e ângulos?



6) Foi construída com cartolinas recortadas em dois tamanhos e fita crepe, a seguinte figura:



a) Quantas peças de cartolina de cada tamanho foram necessárias para formar este sólido geométrico?

b) A fita crepe foi utilizada para prender as peças de cartolina. Considerando que a peça menor tem 2 cm de largura e 3 cm de comprimento e que a peça maior tem 3 cm de largura e 6 cm de comprimento, qual a quantidade aproximada de fita crepe utilizada?

07) A figura abaixo representa duas salas divididas em quadrados.

Imagem representada sem as divisórias (paredes internas) das salas.

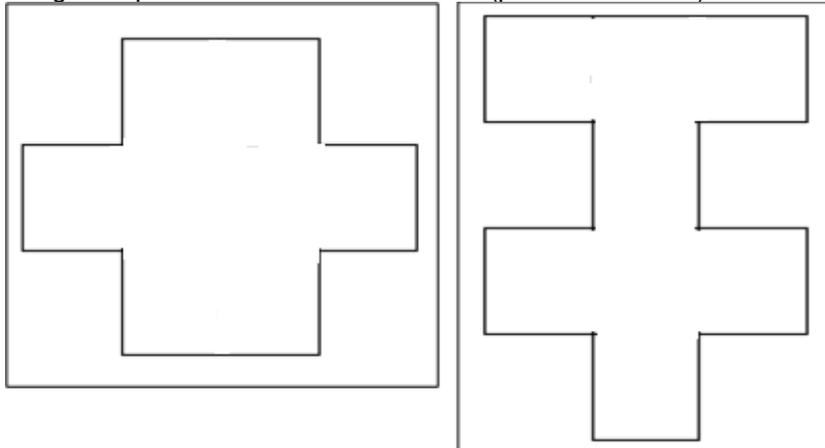
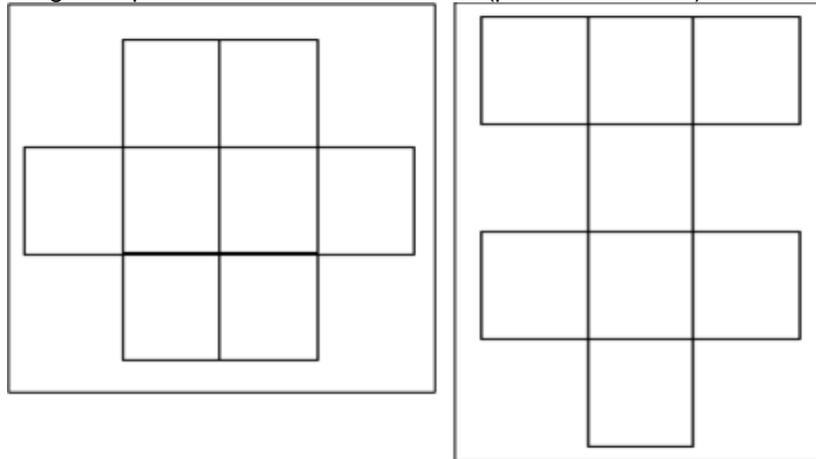
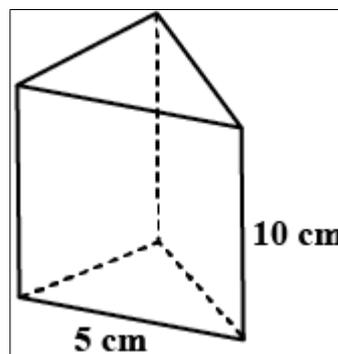


Imagem representada com as divisórias (paredes internas) das salas



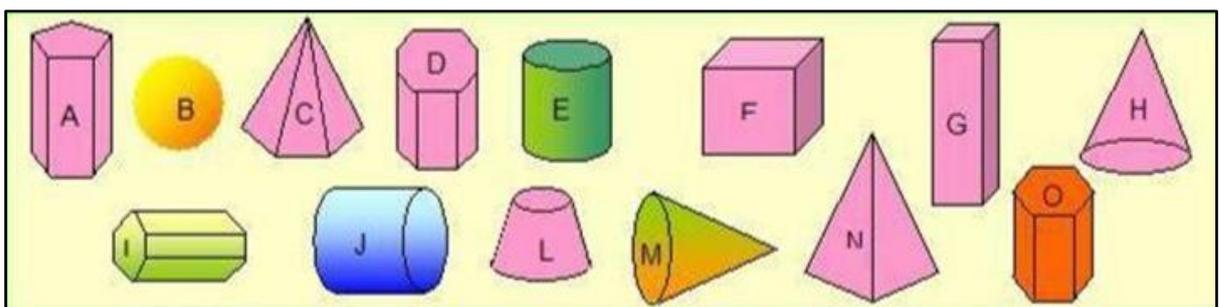
- a) Se colocarmos rodapé nas salas, a quantidade de material necessário será igual para ambas?
- b) Se for colocado piso nas salas, qual delas ocupará uma maior quantidade de cerâmicas?

08) Você consegue definir qual é a área e o volume da seguinte figura.



09) Diferencie figuras planas de sólidos geométricos, descrevendo suas características.

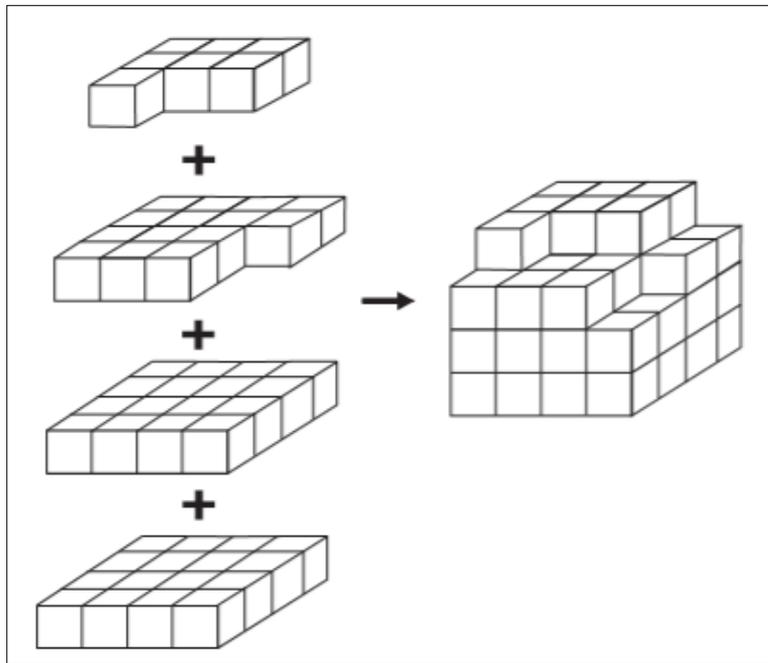
10) Observe os sólidos geométricos abaixo. Crie uma característica que os diferencie (cite esta). Agrupe os mesmos conforme esta característica.



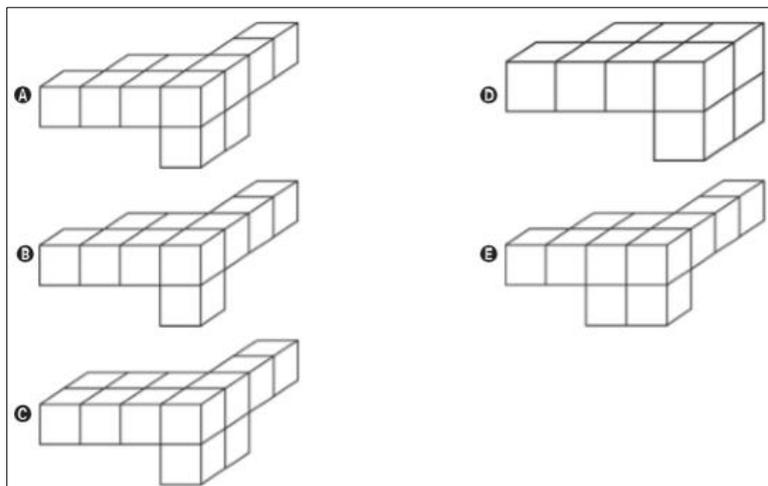
APÊNDICE B - Avaliação final

(ENEM 2018) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões 4x4x4. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários conforme a figura:

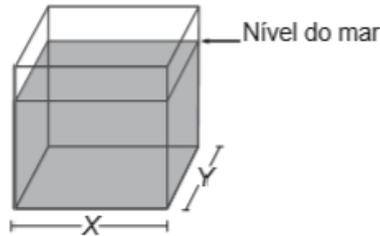


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo 4x4x4 é:



ENEM 2017

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- A 1 e 49
- B 1 e 99
- C 10 e 10
- D 25 e 25
- E 50 e 50

ENEM 2017

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.



Figura 1

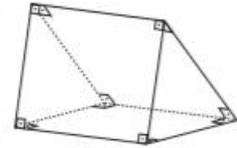


Figura 2

ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

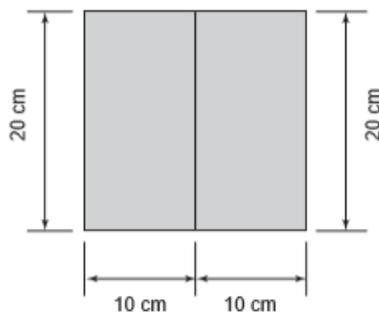
A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

- A tetraedro.
- B pirâmide retangular.
- C tronco de pirâmide retangular.
- D prisma quadrangular reto.
- E prisma triangular reto.

ENEM 2015

Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura.



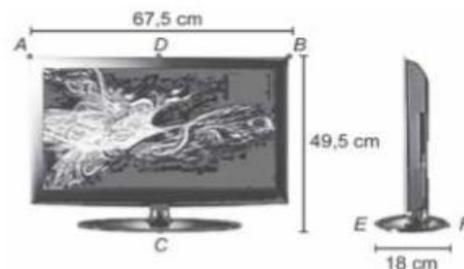
Atualmente, sua plantação de morangos ocupa uma área de 10 000 m², mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.

O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

- A 10 000.
- B 60 000.
- C 100 000.
- D 500 000.
- E 600 000.

ENEM 2015

Uma empresa especializada em embalagem de papelão recebeu uma encomenda para fabricar caixas para um determinado modelo de televisão, como o da figura.



A embalagem deve deixar uma folga de 5 cm em cada uma das dimensões. Esta folga será utilizada para proteger a televisão com isopor. O papelão utilizado na confecção das caixas possui uma espessura de 0,5 cm.

A empresa possui 5 protótipos de caixa de papelão, na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas externas: comprimento, altura e largura, em centímetro, são respectivamente iguais a:

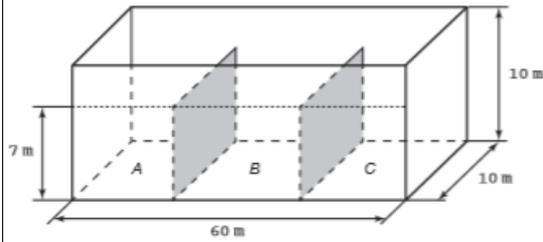
- Caixa 1: 68,0 × 50,0 × 18,5
- Caixa 2: 68,5 × 50,5 × 19,0
- Caixa 3: 72,5 × 54,5 × 23,0
- Caixa 4: 73,0 × 55,0 × 23,5
- Caixa 5: 73,5 × 55,5 × 24,0

O modelo de caixa de papelão que atende exatamente as medidas das dimensões especificadas é a

- A caixa 1.
- B caixa 2.
- C caixa 3.
- D caixa 4.
- E caixa 5.

ENEM 2015

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisorias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- A $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$
- B $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$
- C $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
- D $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
- E $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

ENEM 2016

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

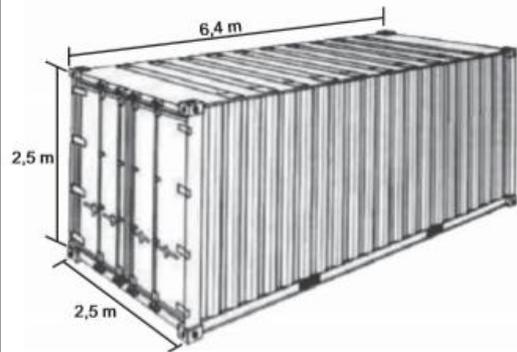


Figura 1

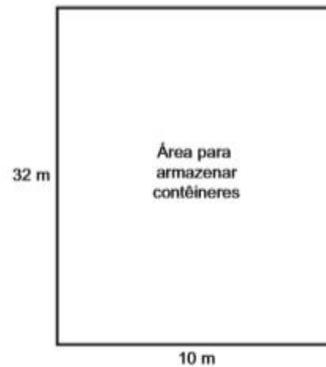


Figura 2

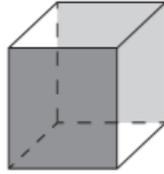
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

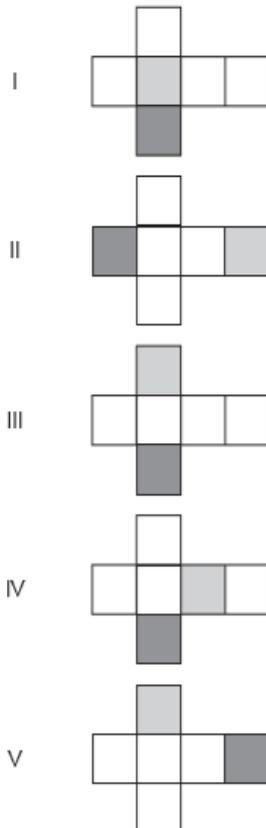
- A 12,5 m.
- B 17,5 m.
- C 25,0 m.
- D 22,5 m.
- E 32,5 m.

ENEM 2018

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:

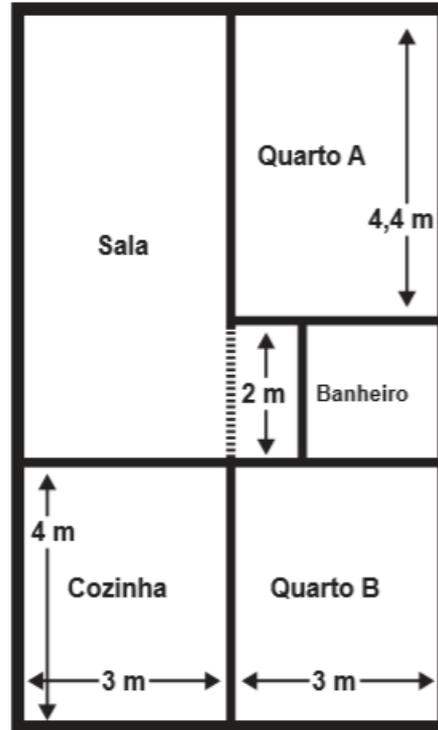


Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

ENEM 2017

A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m e das paredes internas, 0,10 m.



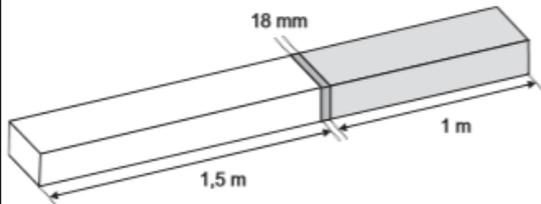
Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R\$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída.

O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

- A 250,00.
- B 250,80.
- C 258,64.
- D 276,48.
- E 286,00.

ENEM 2015

Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milímetros, conforme ilustrado na figura.

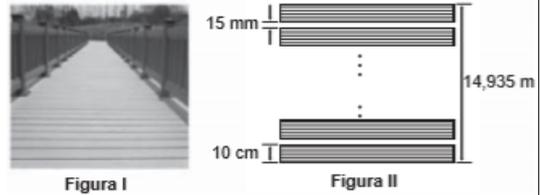


Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem?

- A) 2,0230
- B) 2,2300
- C) 2,5018
- D) 2,5180
- E) 2,6800

ENEM 2015

Um marceneiro recebeu a encomenda de uma passarela de 14,935 m sobre um pequeno lago, conforme a Figura I. A obra será executada com tábuas de 10 cm de largura, que já estão com o comprimento necessário para instalação, deixando-se um espaçamento de 15 mm entre tábuas consecutivas, de acordo com a planta do projeto na Figura II.

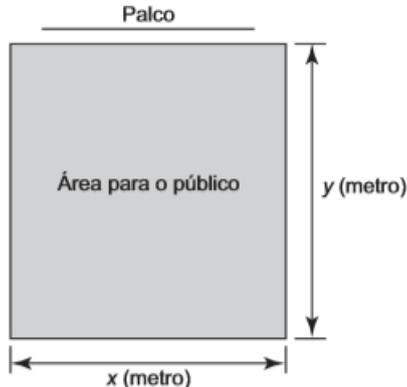


Desconsiderando-se eventuais perdas com cortes durante a execução do projeto, quantas tábuas, no mínimo, o marceneiro necessitará para a execução da encomenda?

- A) 60
- B) 100
- C) 130
- D) 150
- E) 598

ENEM 2018

Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5,00.

A empresa dispõe de R\$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

- A) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
- B) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
- C) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
- D) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
- E) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

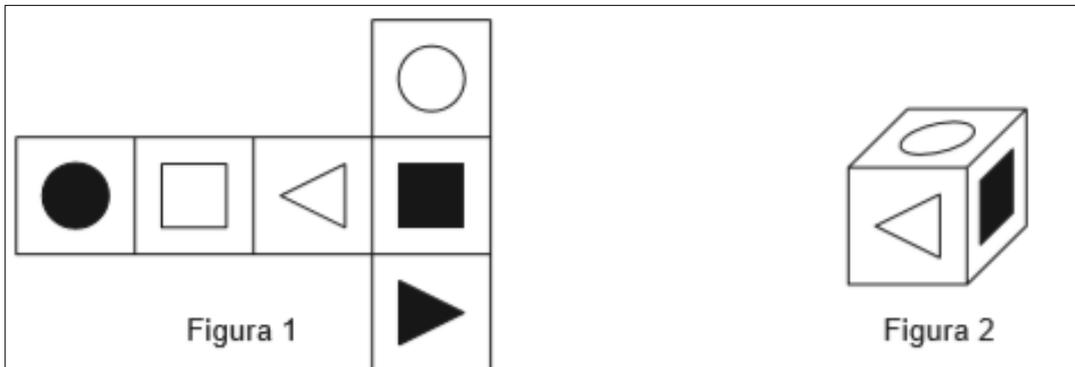
OBMEP 2017

Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P, Q, R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

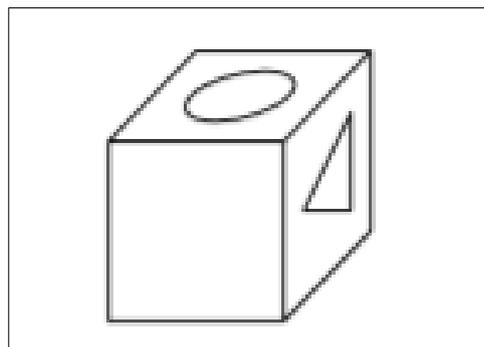
- A) S
- B) R
- C) Q
- D) P
- E) O



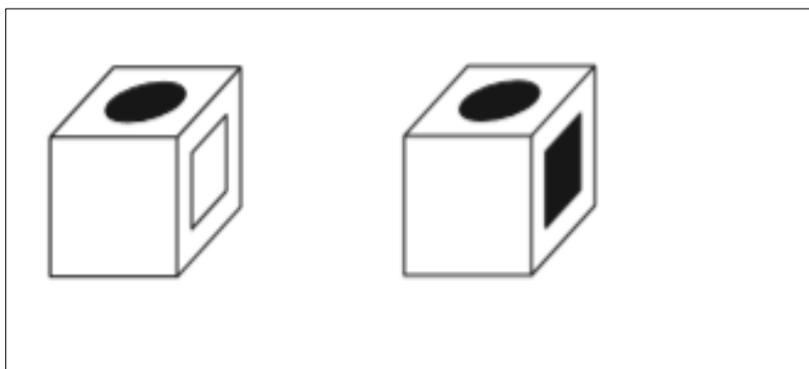
OBMEP 2019 - A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



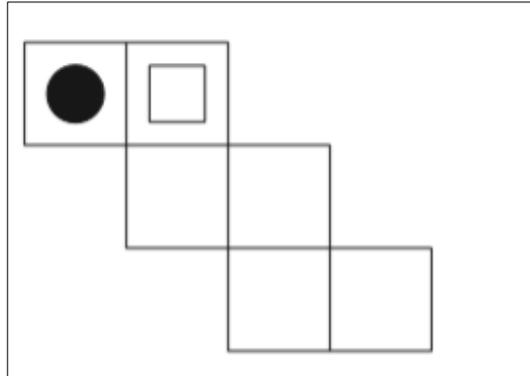
a) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



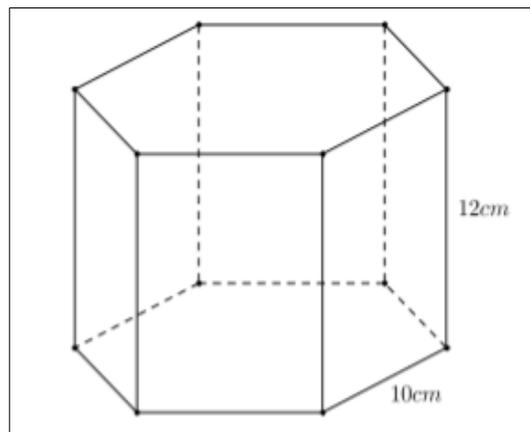
b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



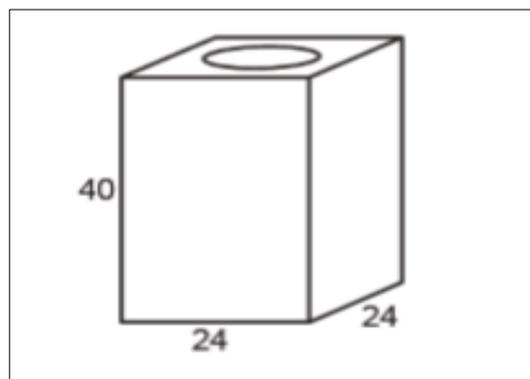
c) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



Precisamos confeccionar a tampa para a caixa de presente abaixo. Qual a quantidade de material gasto para sua confecção, sabendo que a altura da tampa é de 5 cm?



Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrados na figura. Qual a capacidade de tinta em litros que cabem nessa lata?



APÊNDICE C - Ao Professor é Importante Saber

AO PROFESSOR É IMPORTANTE SABER

Metodologia ativa baseada na resolução de problemas (PBL)

De acordo com Moraes (2006) e Mamede (2001), a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL, é uma perspectiva de ensino e aprendizagem fundamentada no construtivismo. Os conhecimentos precisam ser (re)construídos e o processo de aprendizagem é centrado no estudante.

Ainda, conforme os autores, a aprendizagem necessita ser orientada para a compreensão e a resolução dos problemas apresentados. O aluno é o sujeito ativo e o professor atua como mediador, auxiliando o aluno a alcançar seus objetivos no processo de aprendizagem.

Outra característica desta metodologia em questão é fazer com que os estudantes aprendam, de forma colaborativa e através de desafios. As soluções a serem exploradas pelo professor podem contar com a utilização de tecnologia, recurso esse que incentiva a habilidade de investigar, (re)criar, comparar e analisar uma determinada situação.

Segundo Woods (1996), com a aplicação da PBL, os alunos devem desempenhar as oito tarefas seguintes:

1. Explorar o problema, levantar hipóteses, identificar e elaborar as questões de investigação;
2. Tentar solucionar o problema com o que se sabe, observando a pertinência do seu conhecimento atual;
3. Identificar o que não se sabe e o que é preciso saber para solucionar o problema;
4. Priorizar as necessidades de aprendizagem, estabelecer metas e objetivos de aprendizagem e alocar recursos de modo a saber o que, quanto e quando é esperado e, para a equipe, determinar quais tarefas cada um fará;
5. Planejar, delegar responsabilidades para o estudo autônomo da equipe;

6. Compartilhar o novo conhecimento eficazmente, de modo que todos os membros aprendam os conhecimentos pesquisados pela equipe;
7. Aplicar o conhecimento para solucionar o problema;
8. Avaliar o novo conhecimento, a solução do problema e a eficácia do processo utilizado e refletir sobre o processo.

O trabalho em equipe é fundamental na aplicação dessa metodologia. De acordo com Freitas (2015), a cooperação e a colaboração são atitudes essenciais à formação do ser humano. A escola precisa estimular essa prática, objetivando o crescimento e o fortalecimento do trabalho em sala de aula.

Portanto, conforme Woods (1996), a utilização da PBL consiste no seguinte: inicialmente o professor forma as equipes de trabalho, apresenta um desafio ou propõe um problema. As equipes precisam tentar solucionar o problema proposto com os conhecimentos que possuem. Após a organização de suas ideias, os alunos socializam, discutem com a classe e anotam questões relacionadas ao problema, levando em consideração o que compreenderam, o que não compreenderam, o que sabem a respeito e o que precisam saber.

Após partilharem suas descobertas, dificuldades e saberes com a classe, o grupo novamente explora as questões de aprendizagem, integrando os novos conhecimentos ao contexto do problema, planejam e criam estratégias de investigação para solucionar o que lhes foi proposto.

Terminando o trabalho e chegando à solução do problema, os alunos podem vir a definir novas questões de aprendizagem à medida que progredem neste processo. Para finalizar, os alunos avaliam seus pares e a si mesmos com o objetivo de desenvolver a habilidade de auto avaliação para construir uma aprendizagem autônoma e eficaz.

Nesse processo, o papel do professor é muito importante. Ele será o responsável por elencar uma situação problema que instigue e leve o aluno a uma inquietação, um desequilíbrio, que de fato o estimule a querer resolvê-lo. Portanto, a escolha do problema é o ponto principal, que deve ser cuidadosamente escolhido e mediado pelo professor.

O professor assume o papel de mediador, provocador, instiga o aluno a buscar as soluções, precisa intermediar e saber a hora de interferir no processo. Deve dar retorno através de *feedback*, fazendo com que os alunos percebam onde

cometeram erros e acertos através do caminho que escolheram para chegar ao resultado. Essa reflexão contribuirá para a construção do conhecimento, estimulando a crítica e a autonomia dos jovens.

De acordo com Paiva (2016), para elaborar os problemas devem ser observados alguns critérios: não devem ser muito simples nem muito complexos; devem conter situações próximas da realidade dos alunos; devem ter um contexto próximo ao que pode ser encontrado na prática; devem permitir a discussão, não se restringindo a perguntas e respostas diretas.

Com a utilização da PBL é dado ao aluno o direcionamento. Ele precisa aprender a analisar, refletir, investigar, buscar alternativas e produzir conhecimentos relevantes, tornando-se participante ativo no processo de aprendizagem.

Teoria de Van Hiele: desenvolvimento do pensamento geométrico

A Teoria de Van Hiele é estruturada em cinco níveis: Nível Básico ou zero: Reconhecimento ou Visualização; Nível 1: Análise; Nível 2: Síntese ou Abstração; Nível 3: Dedução e Nível 4: Rigor. De acordo com esse modelo, o aluno só avança para o próximo nível após ter passado pelo nível anterior, ou seja, ter compreendido o nível anterior.

É necessário, inicialmente um pré-teste para verificar em que nível de pensamento o aluno se encontra. Para que o aluno progrida para o próximo nível é extremamente importante que o professor apresente atividades significativas, que sejam bem elaboradas, (re)estruturadas e (re)organizadas, a fim de (re)construir o pensamento geométrico. Portanto, destaca-se que para a promoção de um nível $(n+1)$ do pensamento geométrico, é fundamental a vivência com atividades adequadas, que ao serem trabalhadas em sala de aula, favoreçam a aprendizagem geométrica.

O Quadro 1, apresentado a seguir, faz relação aos 5 níveis do pensamento geométrico de Van Hiele. O mesmo foi organizado a partir do texto de Jehin e Chenu (2000), traduzido por Costa e Santos (2014).

Quadro 2 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.

NÍVEL	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
Primeiro nível - básico	Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos.	Os alunos consideram que, um losango é losango “porque ele está na borda”, ou uma altura é uma altura “porque é vertical”.
Segundo nível - análise	Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos.
Terceiro nível - dedução informal	Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento.
Quarto nível - dedução formal	Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las.	Os alunos são capazes de demonstrar que, um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango.
Quinto nível - rigor	Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias Geometrias, na ausência de modelos concretos.	Os alunos são capazes de entender Geometrias não euclidianas.

Fonte: Adaptado por Costa e Santos, 2014, p. 5.

Cada nível apresenta uma característica distinta de compreensão e todos são importantes. É fundamental que o professor consiga desenvolver, de forma ordenada e gradual, cada um deles, apresentando aos alunos uma proposta pedagógica com atividades selecionadas que estimulem ou proporcionem a mudança de nível de conhecimento.

O Modelo de Van Hiele apresenta cinco fases sequenciais para o desenvolvimento da aprendizagem. De acordo com Crowley (1994 apud GEHRKE, 2017) são elas:

- Fase 1:** interrogação/informação: professor e estudantes conversam e desenvolvem atividades sobre o objeto de estudo. É uma fase preparatória em que o professor apresenta materiais e informações sobre o conteúdo que será desenvolvido, dando oportunidade para o estudante demonstrar seu conhecimento prévio e adquirir conhecimentos básicos.
- Fase 2:** orientação dirigida: nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de explorar os materiais trazidos pelo professor. É importante que as tarefas sejam cuidadosamente elaboradas a fim de preparar os estudantes para novos conceitos que irão surgir, favorecendo a mudança de nível.

- Fase 3:** explicação: nessa fase, o professor estimula os estudantes a expressarem suas descobertas por meio do diálogo. Busca orientá-los quanto ao uso de uma linguagem precisa e adequada, o que favorece uma boa comunicação entre o grupo e demonstra a assimilação dos novos conceitos adquiridos na fase anterior.
- Fase 4:** orientação livre: nessa fase, propõem-se aos estudantes tarefas mais complexas, o que permite que todos os conceitos trabalhados até o momento sejam colocados em prática. O professor sugere determinadas tarefas e o estudante com sua experiência busca suas próprias estratégias para resolvê-las.
- Fase 5:** integração: na fase final, os estudantes reveem e organizam o que aprenderam até o momento, com a finalidade de formar uma visão mais geral sobre o conceito desenvolvido. “No final da quinta fase, os estudantes alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os estudantes estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte” (GEHRKE, 2017, p. 22-23).

Pode-se perceber que as fases são muito importantes para que essa teoria possa ser desenvolvida com sucesso. Cabe ao professor o desenvolvimento ordenado, com atividades contextualizadas e bem formuladas, para dar condições ao aluno avançar de nível. O professor, ainda, deve respeitar o nível de pensamento geométrico em que o aluno se encontra, pois se o conteúdo for realizado acima do nível de compreensão do aluno, acarretará no não aprendizado dos conceitos estudados.