

Fernanda Scussiato Lago

ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DE  
PARÂMETROS DE VIBRAÇÃO EM LAJES  
DE CONCRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, da Faculdade de Engenharia e Arquitetura, da Universidade de Passo Fundo, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, sob orientação do Prof. Dr. Zacarias Martin Chamberlain Pravia.

Passo Fundo

2019

Fernanda Scussiato Lago

ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DE  
PARÂMETROS DE VIBRAÇÃO EM LAJES  
DE CONCRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, da Faculdade de Engenharia e Arquitetura, da Universidade de Passo Fundo, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, sob orientação do Prof. Dr. Zacarias Martin Chamberlain Pravia.

Data da aprovação: 28/02/2019

Membros componentes da Banca Examinadora:

Doutor Zacarias Martin Chamberlain Pravia

Orientador

Doutor Gustavo de Souza Veríssimo

Universidade Federal de Viçosa - UFV

Doutor Moacir Kripka

Universidade de Passo Fundo – UPF

Doutor Gustavo Prates Mezzomo

Universidade de Passo Fundo – UPF

Passo Fundo

2019

## **AGRADECIMENTOS**

O desenvolvimento desta dissertação de mestrado contou com o apoio e incentivo de pessoas importantes que permitiram a concretização desse projeto, às quais serei eternamente grata.

Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Zacarias Martin Chamberlain Pravia, pela paciência, envolvimento e dedicação despendida nas orientações e no trabalho como um todo. Muito obrigada pelas correções e pela motivação ao longo dessa trajetória. Foste um mestre não somente no sentido acadêmico, mas ensinou-me valores que levarei para a vida.

Gostaria de agradecer igualmente ao Professor Doutor Osama Salem pelas recomendações, transparência e ensinamentos repassados durante o intercâmbio acadêmico. Sua sabedoria transcendeu o sentido técnico e evoluiu para uma grande amizade que guardarei no meu coração.

Agradecer a todos os docentes e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGEng) pela instrução e atenção despendida no decorrer do curso.

Consciente de que sozinha nada disto seria possível, dirijo um agradecimento especial aos meus pais Marínes Scussiato e Idamir Lago e ao meu esposo Daniel Carlos Cardoso pelo apoio e suporte incondicional, pela amizade e total incentivo no decorrer desta caminhada. Vocês são a razão que me move a superar os obstáculos e dedicar todos os meus esforços para alcançar meus objetivos.

Agradeço aos todos os meus familiares, amigos e colegas que de alguma forma colaboraram para a realização desse sonho.

## RESUMO

Investigar as características dinâmicas em lajes de piso tem-se tornado muito importante uma vez que estruturas modernas, devido à evolução da resistência mecânica do aço e do concreto, têm sido construídas mais leves e com vãos livres maiores, e conseqüentemente mais suscetíveis ao fenômeno de vibração. Sendo assim, conhecer alguns parâmetros de vibração, como por exemplo frequências naturais e fatores amortecimentos, na fase de projeto, pode evitar problemas futuros de vibrações. Esta pesquisa visa a estudar o comportamento dinâmico de dois tipos de lajes: nervuradas e pré-moldadas com vigotas treliçadas. Inicialmente são realizados ensaios experimentais através do método de impacto de calcanhares com utilização de acelerômetro e dispositivo de celular para obtenção das frequências naturais para o primeiro modo normal e fatores de amortecimento por meio de dois métodos explicitados na revisão de literatura. As respostas em termos de aceleração são passadas em filtro de frequência para avaliação das vantagens da utilização de filtros na obtenção das frequências e amortecimentos. Também são levantados os parâmetros modais de frequência natural e modos de vibração por meio de fórmulas analíticas e pela modelagem numérico-computacional utilizando software de elementos finitos. Os resultados experimentais mostram que a utilização de celulares é uma alternativa simples e econômica para a obtenção dos parâmetros de frequência e amortecimento em lajes. Os fatores de amortecimento podem ser previstos através dos dois métodos apresentados, no entanto o método do decremento logarítmico é a melhor alternativa quando utilizam-se ensaios não instrumentados. Os filtros de frequência foram indispensáveis para a avaliação do amortecimento das estruturas. Quanto aos resultados analíticos, as formulações para placas ortotrópicas apresentam valores conservativos com boas aproximações para a obtenção das frequências naturais, embora a suposição de placas isotrópicas possa ser utilizada para uma estimativa inicial desse parâmetro. O modelo numérico-computacional que utiliza elementos de casca para a representação da geometria das lajes trouxe resultados aproximados aos valores experimentais, principalmente para as lajes nervuradas. De uma maneira geral, é possível afirmar que as frequências fundamentais para lajes nervuradas com comportamento bidirecional possuem grande relação com o vão livre menor, e uma equação simplificada para estimativa desse parâmetro pode ser definida.

Palavras chaves: frequência natural, amortecimento, lajes nervuradas, lajes pré-moldadas treliçadas.

## ABSTRACT

Investigating the dynamic characteristics of slabs has become very important since modern structures, due to the evolution of the mechanical strength of steel and concrete, have been built lighter with longer open spans, and consequently more susceptible to the phenomena of vibration. Therefore, knowing some parameters of vibration, such as natural frequencies and damping, in the design phase, can avoid vibrations problems in the future. This research aims to study the dynamic behavior of two types concrete slabs: waffle slabs and precast ribbed slabs. Initially, experimental tests were performed using the heel impact method using accelerometer and cell phone to obtain the fundamental frequencies and damping coefficients through two methods explained in the literature review. The acceleration responses are passed in a low-pass filter to evaluate the advantages of using filters in obtaining frequencies and damping. In addition, the modal parameters of natural frequency and vibration modes are computed using analytical formulas and computer modeling by finite element software. Experimental results show that the use of cell phones is a simple and economical alternative to obtain frequency and damping parameters in slabs. The damping factors can be predicted through the two methods presented, however the logarithmic decrement method is the best alternative when using non-instrumented tests, and the frequency filters were indispensable for the evaluation of the damping of the structures. Regarding the analytical results, analytical formulations for orthotropic plates have conservative values with good prediction to the natural frequencies, although the assumption of isotropic plates can be used for an initial estimation of this parameter. The computer modeling using shell elements to represent the slab geometry has shown approximate results to the experimental values, mainly for the waffle slabs. In general, it is possible to affirm that the fundamental frequencies two-way waffle slabs have substantial relation with the shorter span, and a simplified equation for estimating this parameter can be defined.

Keywords: natural frequency, damping, waffle slabs, precast ribbed slabs.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de laje maciça apoiada sobre vigas: (a) representação em planta e respectivo corte transversal e (b) modelo tridimensional .....	21
Figura 2 - Laje maciça bidirecional simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.....	22
Figura 3 – Sistema de laje nervurada bidirecional: (a) representação em planta e respectivo (b) corte transversal.....	23
Figura 4 – Seção $T$ empregada no cálculo usual.....	24
Figura 5 - Sistema de laje pré-moldada treliçada: (a) indicação dos principais elementos que compõem a laje e (b) corte transversal .....	26
Figura 6 - Comportamento de uma laje unidirecional sob carregamento distribuído .....	26
Figura 7 – Classificação das ações dinâmicas: (a) harmônica, (b) periódica, (c) transiente e .....	30
Figura 8 – Representação de um sistema massa-molda com um grau de liberdade.....	31
Figura 9 – Vibração livre de um sistema de um grau de liberdade .....	34
Figura 10 - Representação de um sistema massa-mola com $n$ graus de liberdade.....	35
Figura 11 – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências .....	41
Figura 12 - Modos de vibração para vibrações transversais em placas simplesmente apoiadas...	48
Figura 13 - Placas ortotrópicas retangulares para uma grelha de nervuras intertravadas em duas direções.....	51
Figura 14 - Placas ortotrópicas retangulares: placa com nervuras em uma direção.....	52
Figura 15 – Configuração básica de um sistema de registro de vibração com excitador.....	55
Figura 16 – Resposta da força exercida pelo impacto dos calcanhares no tempo.....	58
Figura 17 - Configuração básica de um acelerômetro.....	59
Figura 18 - Conceito de decomposição de uma função em ondas senoidais.....	60
Figura 19 - Resposta da estrutura (a) no domínio de tempo e (b) no domínio de frequência. ....	62
Figura 20 – Fenômeno de aliasing.....	62
Figura 21 – Utilização da FRF no método peak-picking.....	66
Figura 22 - Resposta para um simples impulso de uma estrutura vibrando em um modo dominante de vibração.....	68
Figura 23 – Determinação do amortecimento pelo método da largura da banda .....	69
Figura 24 - Representação esquemática do Modelo 4 de DIAS (2003) .....	73

Figura 25 - Limites de desconforto (em termos de aceleração de pico) causado por vibrações em pisos de edifícios residenciais, escolares e comerciais, devidas ao caminhar humano .....	77
Figura 26 - Limites de tolerância para conforto humano .....	80
Figura 27 - Esquema geométrico das lajes nervuradas.....	85
Figura 28- Esquema geométrico das lajes pré-moldadas treliçadas .....	87
Figura 29 - Fluxograma com as etapas da pesquisa .....	90
Figura 30 – Sistemas utilizados para a coleta de sinais: (a) Acelerômetro GP2Lx USB e (b) Interface do aplicativo Accelerometer Analyser .....	92
Figura 31 - Posição dos dispositivos de medição e do impacto das seções (a) M <sub>1</sub> e (b) M <sub>2</sub> .....	93
Figura 32 – Resposta da aceleração no tempo devida a repetição de três impactos dos calcanhares registrada no centro da laje LN24.....	94
Figura 33 – Resposta em termos de frequência da laje LN05, seção M <sub>1</sub> , utilizando celular .....	95
Figura 34 - Sinal no domínio da frequência da laje LP21, seção M <sub>2</sub> , utilizando o dispositivo de acelerômetro .....	95
Figura 35 – Método de extração de dados para o cálculo dos fatores de amortecimento pelo método do decremento logarítmico para a laje LP07.....	96
Figura 36 – Método de extração de dados para o cálculo dos fatores de amortecimento pelo método da largura da banda para a laje LP07.....	96
Figura 37 – Sinais no domínio do tempo e respectivo espectro de resposta em termos de frequência (laje LP08, seção M <sub>1</sub> , aparelho de celular), sem a utilização e com a utilização de filtro de frequência .....	97
Figura 38 – Exemplos de consideração das vinculações para estimativa das frequências naturais em (a) nervuradas e (b) pré-moldadas .....	99
Figura 39 – Definição das coordenadas do elemento SHELL181.....	101
Figura 40 – Configuração utilizada na modelagem computacional das lajes.....	102
Figura 41 – Modelo computacional da laje LN11 .....	102
Figura 42 – Modelo computacional da laje LP12.....	103
Figura 43 - Estudo de convergência de malha.....	104
Figura 44 - Modelo discretizado da laje LN16.....	104
Figura 45 - Frequências naturais experimentais das lajes nervuradas em função dos vãos .....	106
Figura 46 - Frequências naturais experimentais das lajes nervuradas bidirecionais em .....	108
Figura 47 – Resposta no domínio da frequência da laje LN19 .....	109
Figura 48 - Fatores de amortecimento pelo método do dec. logarítmico nas lajes nervuradas...	110

Figura 49 - Frequências naturais experimentais das lajes pré-moldadas em função do vão $B$ ....	112
Figura 50 - Fatores de amort. pelo método do decremento logarítmico nas lajes pré-moldadas	113
Figura 51 - Comparação entre as frequências naturais para as lajes nervuradas calculadas pelo método das placas isotrópicas e ortotrópicas.....	116
Figura 52 - Comparação entre as frequências naturais para as lajes pré-moldadas calculadas pelo método das placas isotrópicas e ortotrópicas.....	118
Figura 53 - Freq. naturais do modelo numérico das lajes nervuradas em função dos vãos .....	120
Figura 54 – Freq. naturais do modelo numérico das lajes nervuradas bidirecionais em função dos vãos.....	121
Figura 55 – Frequências e modos de vibração para a laje nervurada bidirecional LN11.....	122
Figura 56 – Frequências e modos de vibração para a laje nervurada unidirecional LN03.....	123
Figura 57 - Frequências naturais do modelo em elementos finitos das lajes pré-moldadas em função do vão $B$ .....	125
Figura 58 – Frequências e modos de vibração para a laje pré-moldada unidirecional LP12 .....	126
Figura 59 - Comparação entre as frequências naturais experimentais, numéricas e analíticas para lajes nervuradas .....	129
Figura 60 - Comparação entre as frequências naturais experimentais, numéricas e analíticas para lajes pré-moldadas .....	129
Figura 61 – Comparação entre os resultados experimentais e analíticos para lajes nervuradas .	130
Figura 62 – Relação entre frequências experimentais e analíticas para lajes nervuradas .....	131
Figura 63 – Comparação entre os resultados exp. e analíticos para lajes pré-moldadas.....	131
Figura 64 – Relação entre frequências experimentais e analíticas para lajes pré-moldadas: .....	132
Figura 65 – Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para lajes nervuradas	134
Figura 66 – Relação entre frequências experimentais e numéricas para lajes nervuradas .....	135
Figura 67 – Comparação entre os resultados exp. e numéricos para lajes pré-moldadas.....	136
Figura 68 – Relação entre frequências experimentais e numéricas para lajes pré-moldadas:.....	136



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Métodos de teste de vibrações em pisos .....	56
Tabela 2 – Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas. ....	76
Tabela 3 – Amortecimento dos pisos em percentual do amortecimento crítico.....	79
Tabela 4 – Valores recomendados de fator de amortecimento.....	81
Tabela 5 – Harmônico do passo coincidindo com a freq. natural em pisos de alta frequência.....	82
Tabela 6 – Valores de $K$ e $\beta$ para uso na Equação (57).....	83
Tabela 7 – Resumo das características geométricas das lajes nervuradas (dimensões em cm) ....	86
Tabela 8 – Resumo das características geométricas das lajes pré-moldadas treliçadas (dimensões em cm) .....	88
Tabela 9 – Classificação do índice de precisão de experimentos conforme avaliação do coeficiente de variação C.V. ....	98
Tabela 10 – Frequências naturais experimentais de lajes nervuradas utilizando acelerômetro e celular, e respectivas medidas de dispersão.....	106
Tabela 11 - Comparação entre frequências naturais para as lajes LN02, LN07 e LN25 .....	107
Tabela 12 – Fatores de amortecimento correspondentes ao primeiro modo de vibração nas lajes nervuradas obtidos pelo método do decremento logarítmico e largura da banda, e respectivas medidas de dispersão .....	109
Tabela 13 – Frequências naturais experimentais de lajes pré-moldadas utilizando acelerômetro e celular, e respectivas medidas de dispersão.....	111
Tabela 14 – Fatores de amortecimento correspondentes ao primeiro modo de vibração nas lajes pré-moldadas pelo método do decremento logarítmico e largura da banda, e respectivas medidas de dispersão .....	113
Tabela 15 – Frequências naturais calculadas para o primeiro modo de vibração para as lajes nervuradas.....	115
Tabela 16 – Frequências naturais calculadas para o primeiro modo de vibração para as lajes pré-moldadas.....	117
Tabela 17 – Frequências naturais obtidas pelo modelo numérico para os dez primeiros modos de vibração para as lajes nervuradas .....	119
Tabela 18 – Comparação entre frequências naturais para as lajes LN02, LN07 e LN25.....	120

Tabela 19 – Frequências naturais obtidas pelo modelo numérico para os dez primeiros modos de vibração para as lajes pré-moldadas .....	124
Tabela 20 – Lajes nervuradas: frequências naturais experimentais, analíticas e numéricas, e amortecimentos pelo método do decremento logarítmico e da largura da banda .....	127
Tabela 21 – Lajes pré-moldadas: frequências naturais experimentais, analíticas e numéricas, e amortecimentos pelo método do decremento logarítmico e da largura da banda .....	128
Tabela 22 – Comparação de frequências naturais entre lajes nervuradas e pré-moldadas.....	137

## LISTA DE SÍMBOLOS

$f_n$	Frequência natural experimental
$f_a$	Frequência natural analítica
$f_1$	Frequência natural numérica para o primeiro modo normal
$f_{crit}$	Frequência crítica da estrutura
$\omega_n$	Frequência natural circular
$\omega$	Frequência circular de excitação
$\hat{\phi}$	Modo natural de vibração
$\zeta$	Fator de amortecimento
$a$	Aceleração
$\gamma$	massa por unidade de área
$\lambda$	Parâmetro adimensional função das condições de apoio
$r$	Razão de frequências
$\phi$	ângulo de fase
$h$	Espessura total da laje
$h_c$	Espessura da capa de concreto
$h_e$	Espessura equivalente para uma laje nervurada
$h_t$	Altura da nervura/treliça
$b$	Largura das nervuras
$B$	Menor vão livre da laje
$C$	Constantes de torção
$D$	Parâmetro de rigidez à flexão em placas
$I$	Momento de inércia da seção
$L$	Maior vão livre da laje
$S$	Espaçamento entre os eixos das nervuras
$E$	Módulo de elasticidade
$f_c$	Resistência simples do concreto à compressão
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto à compressão

$\nu$	Coefficiente de Poisson
$x$	vetor de deslocamento da estrutura idealizada
$\dot{x}$	Vetor de velocidade
$\ddot{x}$	Vetor de aceleração
$[C]$	Matriz de amortecimento viscoso
$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de inércia
$\alpha$	Coefficiente de massa proporcional
$\beta$	Coefficiente de rigidez proporcional
$c$	Coefficiente de amortecimento viscoso
$c_c$	Amortecimento crítico
$f(t)$	Função de forças harmônicas
$k$	Rigidez
$m$	Massa
$t$	Tempo em segundos
$T$	Período em segundos

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	16
1.1	Considerações Iniciais .....	16
1.2	Justificativa .....	18
1.3	Objetivos.....	19
1.3.1	Objetivo geral.....	19
1.3.2	Objetivos específicos .....	19
2	REVISÃO DA LITERATURA .....	20
2.1	Lajes de Concreto .....	20
2.1.1	Lajes maciças .....	21
2.1.2	Lajes nervuradas .....	23
2.1.3	Lajes pré-moldadas com vigotas treliçadas .....	25
2.2	Dinâmica das Estruturas .....	27
2.2.1	Carregamento dinâmico .....	29
2.2.2	Sistemas de um grau de liberdade (SDOF).....	30
2.2.3	Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF).....	35
2.2.4	Amplitude de vibração .....	40
2.2.5	Ressonância.....	41
2.2.6	Frequência natural e modos de vibração em placas .....	42
2.3	Técnicas de Análise Dinâmica Experimental .....	53
2.3.1	Excitação.....	56
2.3.2	Aquisição de sinais .....	58
2.3.3	Processamento de sinais.....	60
2.3.4	Obtenção da frequência natural pelo método peak-picking.....	65
2.3.5	Obtenção experimental dos fatores de amortecimento .....	67

2.4	Método dos Elementos Finitos (MEF) .....	70
2.5	Critério de Aceitabilidade dos Níveis Vibratórios em Estruturas de Concreto .....	75
2.5.1	ABNT NBR 6118 (2014): projeto de estruturas de concreto .....	75
2.5.2	ABNT NBR 8800 (1986): projeto e execução de estruturas de aço em edifícios	76
2.5.3	AISC Design Guide #11 (2016) – vibrations of steel-framed structural systems due to human activity .....	79
2.5.4	PCI Design Handbook (2004) – precast and prestressed concrete .....	82
3	MATERIAL E MÉTODOS .....	84
3.1	Características dos Sistemas de Pisos .....	84
3.1.1	Lajes nervuradas (LN) .....	84
3.1.2	Lajes pré-moldadas treliçadas (LP) .....	86
3.2	Descrição dos Procedimentos Metodológicos .....	88
3.3	Procedimento Experimental.....	91
3.3.1	Equipamentos de medição .....	91
3.3.2	Ensaio de impacto .....	92
3.3.3	Processamento de sinais.....	93
3.3.4	Controle estatístico.....	98
3.4	Cálculo Analítico das Frequências Naturais .....	98
3.5	Modelagem Computacional em Elementos Finitos .....	100
3.5.1	Elemento finito de casca – SHELL181 .....	100
3.5.2	Descrição dos modelos .....	101
3.5.3	Estudo de convergência de malha.....	103
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	105
4.1	Resultados Experimentais.....	105
4.1.1	Lajes nervuradas .....	105
4.1.2	Lajes pré-moldadas .....	110

4.2	Resultados Analíticos .....	114
4.2.1	Lajes nervuradas .....	115
4.2.2	Lajes pré-moldadas .....	117
4.3	Resultados Numéricos Computacionais .....	118
4.3.1	Lajes nervuradas .....	119
4.3.2	Lajes pré-moldadas .....	124
4.4	Comparações.....	127
4.4.1	Frequências experimentais vs. resultados analíticos.....	129
4.4.2	Frequências experimentais x modelagem computacional.....	133
4.4.3	Lajes nervuradas vs. lajes pré-moldadas.....	137
4.4.4	Limites aceitáveis de vibrações .....	138
5	CONCLUSÕES .....	140
5.1	Recomendações para Trabalhos Futuros .....	143
6	REFERÊNCIAS.....	144

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais

Nos últimos anos o setor da construção civil vem passando por grandes transformações, reinventando a paisagem e a forma com que os seres humanos são capazes de edificá-la. As inovações estão relacionadas principalmente com aspectos arquitetônicos e estruturais cada vez mais arrojados, desafiando constantemente o conhecimento e experiência dos projetistas. Estas mudanças acontecem também no desenvolvimento da ciência dos materiais, no melhoramento contínuo de suas propriedades mecânicas, na utilização de novos materiais, evolução e aprimoramento das técnicas construtivas, e medidas que incluem novos modelos de processos como principais estratégias para atingir prazos e metas com maior sustentabilidade nos projetos.

A alta competitividade no mercado obriga as empresas a buscarem por vantagens competitivas através de sistemas estruturais mais eficientes e de rápida execução, proporcionando ambientes confortáveis e configurações estruturais que permitam melhor aproveitamento dos espaços.

A constante diminuição no consumo de materiais através da utilização de elementos estruturais que apresentam geometrias mais esbeltas com seções transversais diferenciadas é uma das tendências do setor, além da necessidade de se vencerem vãos maiores com a menor quantidade possível de elementos verticais, tornando as estruturas mais leves e flexíveis, por motivos econômicos, arquitetônicos e/ou sustentáveis. Embora essas configurações sejam inovadoras, trazem consigo alguns problemas que não eram de grande importância, mas que passaram a ser relevantes, como é o caso das vibrações.

Conforme Rao (2008), as vibrações podem ser entendidas como movimentos periódicos que se repetem após um intervalo de tempo, e compreendem a transferência alternada de energia potencial para energia cinética e de energia cinética para potencial. As fontes de vibração podem ser naturais, causadas por fenômenos da natureza como terremotos, ventos fortes; ou as causadas pelas atividades humanas, oriundas da movimentação de pessoas, máquinas e equipamentos industriais, tráfego, atividades da construção civil, entre outras.

Durante muito tempo os engenheiros no Brasil concentraram sua atenção às cargas estáticas, na determinação da resistência e estados limites de deflexão das estruturas, isto porque,



considerava-se que as cargas dinâmicas existentes não eram significativas o suficiente para causar problemas estruturais, e estas eram tratadas como forças estáticas equivalentes. No entanto, as lajes de pisos em edifícios residenciais e comerciais estão comumente sujeitas a ações dinâmicas induzidas por pessoas exercendo atividades rotineiras. Hoje os espaços precisam oferecer não somente segurança e estabilidade para os usuários, mas também condições de conforto, que possibilitem desempenhar as atividades rotineiras sem redução no nível de qualidade de vida ou de eficiência laboral.

Para garantir que as edificações apresentem desempenho adequado e evitar problemas de serviço decorrentes das vibrações, nos últimos anos o tema vem sendo abordado intensamente. Pesquisas anteriores relacionadas às condições de serviço quanto a vibração em sistemas de piso incluem lajes em concreto armado (Pavic e Reynodls, 2003), pisos de madeira (Casagrande et al., 2018), passarelas e pontes (Pravia e Braido, 2015; Setareh e Gan, 2018); lajes protendidas (Zhou et al., 2016; Zhou et al., 2017), entre outros.

Construções mais esbeltas e leves, a utilização de vãos maiores e as constantes mudanças no padrão de ocupação conduzem a estruturas em que as frequências naturais estão cada vez mais próximas da faixa de frequência de excitações produzidas pelas atividades humanas, tornando as construções suscetíveis aos efeitos das vibrações produzidas por pequenos impactos como o caminhar humano, correr, e atividades rítmicas (PINTO, 2015). Estes tipos de excitações, embora dificilmente possam comprometer as edificações do ponto de vista estrutural, podem resultar em desconforto para os usuários e induzir ao fenômeno de fadiga decorrente dos sucessivos ciclos de solicitação.

Mesmo em estruturas já construídas, é possível obter a frequência natural e amortecimento a partir de testes experimentais simplificados, e então propor técnicas de remediação quando as vibrações são excessivas. As frequências naturais de lajes podem ser previstas ainda na fase de projeto através de métodos teóricos ou numéricos. Pasquetti, Kripka e Meira (2001) recomendam que, ao dimensionar a estrutura, deve-se prever certa rigidez que mantenha a frequência de vibração da estrutura defasada em relação à frequência de repetição do carregamento. Já o amortecimento é um parâmetro complexo e não pode ser calculado ou estimado numericamente, a forma mais eficaz de prevê-lo na fase de projeto, é adotá-lo a partir de dados históricos.

Com isso, o presente trabalho visa a estudar os parâmetros de vibração (frequências naturais e fatores de amortecimento) de lajes nervuradas e lajes pré-moldadas com vigotas treliçadas,

através de testes experimentais, cálculo analítico e modelagem numérico-computacional. Os testes experimentais utilizam técnicas simplificadas de análise experimental dinâmica, com utilização de acelerômetro e dispositivo de celular munido com acelerômetro; a modelagem numérica é realizada em software de elementos finitos apropriado; e a estimativa analítica é realizada utilizando equações derivadas da mecânica vibratória de placas isotrópicas e ortotrópicas. No decorrer do trabalho são feitas comparações entre os resultados experimentais, analíticos e numérico-computacionais, e definidas correlações entre os parâmetros dinâmicos dos diferentes sistemas de piso e suas características construtivas e de projeto.

## **1.2 Justificativa**

Para que as edificações possam oferecer o máximo desempenho acompanhando as mudanças que vêm ocorrendo na forma de projetar e construir, é necessário conceber os projetos considerando não somente as ações estáticas, mas também as ações dinâmicas. Conhecer o comportamento de estruturas já existentes quando submetidas a ações dinâmicas também é importante, pois é comum ocorrerem mudanças no padrão de utilização desses espaços, alterando também a intensidade e comportamento do carregamento atuante.

Nesse último caso, os ensaios dinâmicos experimentais se mostram pertinentes e importantes, pois possibilitam a obtenção de parâmetros de vibração em várias regiões da estrutura, fatores que não são possíveis de se obter com a utilização de análise estática, viabilizando a avaliação da integridade da estrutura e contribuindo para as tomadas de decisões.

Hoje, a aceleração, a frequência natural e o amortecimento de lajes de piso, podem ser determinados a partir da mensuração com aplicativos para celular, que são capazes de registrar sinais de aceleração facilitando e simplificando o trabalho dos projetistas e pesquisadores. Além disso, é crescente o acesso a ferramentas computacionais de simulação numérica, que viabilizam a resolução desses problemas, e permitem reproduzir estruturas com comportamento mais próximo da realidade.

Embora haja evidências relevantes da influência das ações dinâmicas no comportamento das estruturas, a abordagem das ações para a composição dos projetos estruturais, e principalmente, a influência dessas ações no bem-estar dos seres humanos, ainda é pouco difundida no Brasil. Nota-se certa deficiência no estudo das características dinâmicas das edificações, principalmente através

de pesquisas que envolvem campanhas de medição com grande quantidade de dados. Estes aspectos também são pouco discutidos nos cursos de graduação de engenharia civil, salientando a carência na abordagem do tema.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo geral**

Investigar o comportamento dinâmico de lajes nervuradas e pré-moldadas de edifícios através da obtenção dos parâmetros modais dinâmicos de frequência natural e amortecimento, a partir de ensaios experimentais, cálculo analítico e modelagem numérico-computacional, e verificar essas estruturas em relação aos limites de conforto humano.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

São objetivos específicos deste trabalho:

- a) obter os parâmetros de vibração de frequência natural e amortecimento de lajes nervuradas e pré-moldadas experimentalmente, por meio de sinais obtidos com a utilização de acelerômetro e dispositivo de celular;
- b) determinar as frequências naturais de lajes nervuradas e pré-moldadas analiticamente, por meio de equações simplificadas para lajes isotrópicas e ortotrópicas;
- c) obter as frequências naturais dessas estruturas numericamente pela modelagem simplificada das lajes em programa computacional de elementos finitos;
- d) utilizar sinais obtidos por acelerômetro e dispositivo de celular para validar os resultados numéricos e analíticos, e, a partir desses dados, calcular os fatores de amortecimento das lajes pelo método do decremento logarítmico e da largura da banda;
- e) a partir da comparação dos resultados sugerir relações que possibilitem estimar de maneira simplificada a frequência natural das estruturas;
- f) avaliar se as estruturas estudadas atendem aos limites aceitáveis de vibrações em função de critérios recomendados internacionalmente de conforto humano.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Lajes de Concreto

Existe uma grande variedade de formas de construção de lajes como, por exemplo, lajes construídas in loco, lajes pré-moldadas e lajes compostas por unidades pré-moldadas com concreto adicionado in loco. As lajes podem ser construídas de diferentes formas estruturais como lajes maciças, lisas, nervuradas, cogumelo, pré-moldadas, etc. Podem ser ainda de concreto armado ou protendido. A escolha da forma estrutural dependerá de uma série de fatores como a magnitude das cargas atuantes, o vão livre requerido, o padrão de utilização, e outros.

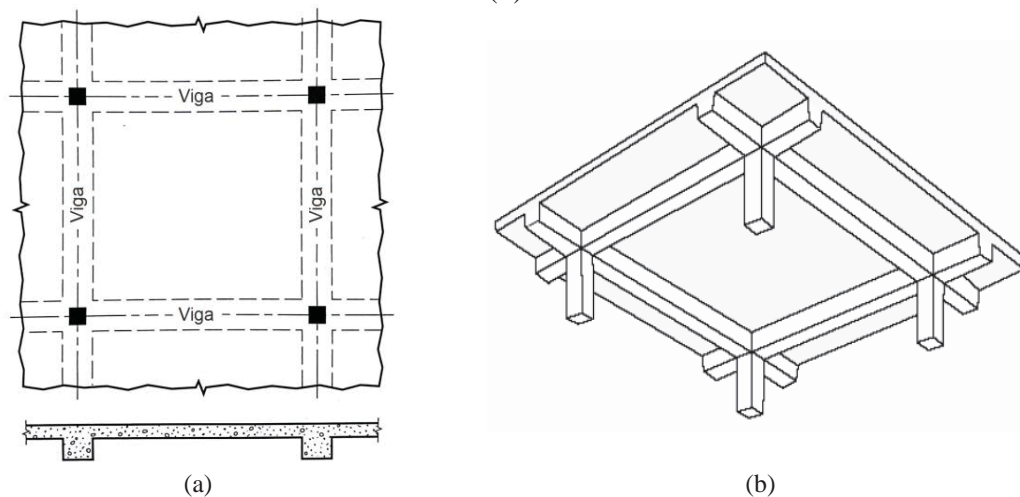
As lajes podem ser suportadas por vigas de concreto armado (geralmente concretadas monoliticamente), por alvenaria de vedação ou estrutural, por vigas de aço, apoiadas sobre colunas, capitéis ou ainda construída diretamente sobre o solo. Quando apoiadas sobre vigas, de acordo com a geometria da laje e localização das vigas, as lajes podem ser classificadas como lajes unidirecionais, quando sofrem flexão principalmente em uma direção, ou bidirecionais, quando sofrem flexão nos dois sentidos. Quando a laje é apoiada em duas vigas paralelas, as ações atuantes na laje são essencialmente unidirecionais e as cargas são transportadas pela laje na direção perpendicular às vigas de apoio. Já quando as vigas são arranjadas em todo o contorno, a laje pode ser considerada bidirecional. Ainda, se a razão entre o comprimento e a largura de um painel de laje é superior a dois, a maior parte da carga é transportada na menor direção para as vigas de apoio e a ação unidirecional é obtida mesmo que hajam suportes em todo o contorno (PARK; GAMBLE, 2000).

A seguir são discutidos conceitos fundamentais sobre pavimentos em lajes maciças, nervuradas e pré-moldadas treliçadas. Os dois últimos são objetos de estudo deste trabalho. Os conceitos de lajes maciças são abordados pois, como visto mais adiante, as lajes com nervuras podem ser representadas por lajes maciças de inércia equivalente, utilizando a Teoria de Placa Ortotrópica Equivalente. De maneira geral as lajes em concreto armado abordadas nesse estudo devem atender as orientações da ABNT NBR 6118 (2014) e as normas complementares ABNT NBR 14859-1 (2016) e ABNT NBR 14859-2 (2016).

### 2.1.1 Lajes maciças

As lajes maciças são placas finas com espessura uniforme, apoiadas sobre vigas ou sobre alvenarias em seu contorno, e possuem relação entre a espessura e o menor vão da laje do pavimento geralmente variando entre  $1/40$  e  $1/60$ . Entre as diversas vantagens na utilização de lajes maciças é que sua aplicação facilita o posicionamento das tubulações elétricas e outros tipos de instalação (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015). No entanto, a utilização de fôrmas representa grande parcela no custo final da laje, custo que pode diminuir a medida em que os pavimentos são repetidos. A Figura 1 (a) mostra um arranjo típico em planta e respectivo corte transversal de uma laje maciça e (b) apresenta o modelo tridimensional da mesma.

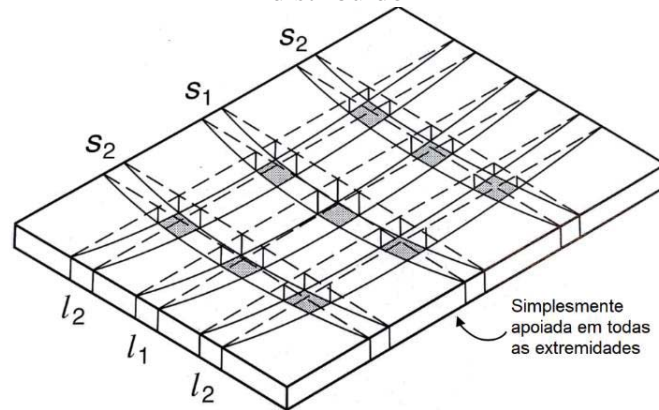
Figura 1 – Sistema de laje maciça apoiada sobre vigas: (a) representação em planta e respectivo corte transversal e (b) modelo tridimensional



Fonte: Adaptado de Nilson, Darwin e Dolan (2004).

Como visto anteriormente, quando a razão entre o vão maior  $L$  e o vão menor  $B$  da laje é  $L/B \leq 2$ , a laje é considerada bidirecional e distribui seu carregamento nas duas direções. Caso esta razão seja  $L/B > 2$ , considera-se que a laje é unidirecional e trabalha apenas na direção do vão  $B$ . Uma maneira simplificada para entendimento do comportamento deste tipo de laje pode ser observada na Figura 2.

Figura 2 - Laje maciça bidirecional simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído



Fonte: Adaptado de Nilson, Darwin e Dolan (2004).

Da Figura 2, a laje maciça bidirecional comporta-se como um elemento de placa que trabalha predominantemente à flexão, curvando-se perpendicularmente ao seu próprio plano (BLEVINS, 2016). As seções  $S_1$  e  $l_1$  fletem de forma simples, no entanto as seções  $S_2$  e  $l_2$  não só fletem, mas também sofrem rotação da seção. Para resistir a esses momentos, a laje precisa ser armada em ambas as direções.

Os métodos básicos de cálculo para lajes maciças são dois: o método elástico, que analisa o comportamento do elemento sob cargas de serviço e concreto não fissurado; e o método de ruptura, que procura identificar de que forma a laje chega ao colapso. Em ambos são utilizados conceitos de ruptura da seção no cálculo e detalhamento da armadura, e conceitos do método elástico na verificação da estrutura em serviço.

As hipóteses para o cálculo de lajes maciças consideram que essas placas sofrem pequenos deslocamentos e são compostas por material homogêneo, elástico, isotrópico, fisicamente linear. Esses fatores são considerados para a simplificação do cálculo. Quanto às condições de contorno, considera-se que as lajes atuam sobre as vigas de contorno por meio de ações verticais não havendo transmissão de momentos de torção para as vigas, as ações são uniformemente distribuídas nas vigas, as vigas de contorno são indeslocáveis, e a rotação das placas no contorno é livre ou totalmente impedida (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

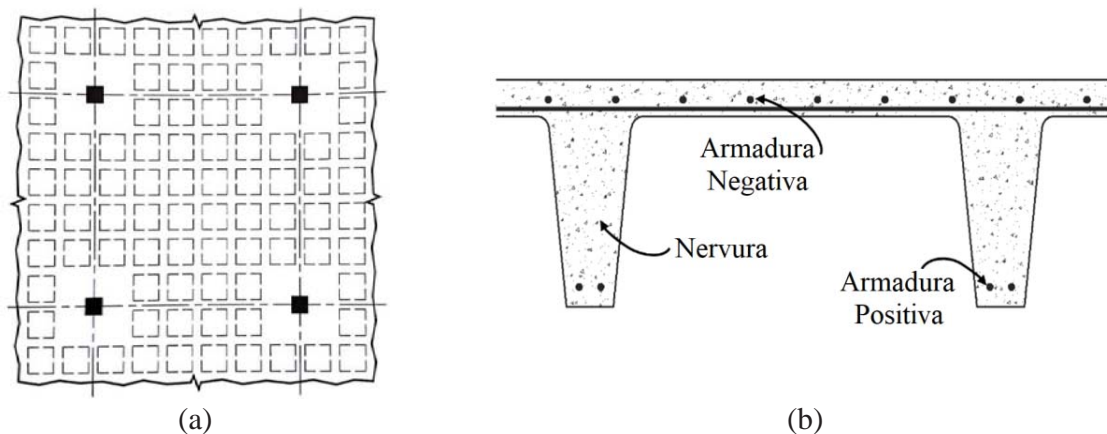
### 2.1.2 Lajes nervuradas

As lajes nervuradas podem ser entendidas como uma variação das lajes maciças, obtidas pela interseção de várias nervuras em direções opostas, ligeiramente espaçadas, que suportam uma camada de concreto relativamente fina. O arranjo das nervuras em direções perpendiculares resulta na distribuição de rigidez na laje e a similaridade com o comportamento das lajes maciças é maior com a diminuição do espaçamento entre nervuras. Da mesma forma que nas lajes maciças, as lajes nervuradas podem ser unidirecionais ou bidirecionais, dependendo da relação entre os vãos da laje e do processo construtivo. O pavimento nervurado pode ser posicionado sobre vigas ou sobre capitéis (caso em que passa a se chamar laje cogumelo) (PARK; GAMBLE, 2000).

Essas lajes requerem espessura cerca de 50% maior que a de uma laje maciça, contudo, seu peso próprio é inferior já que elimina quase todo o concreto empregado na zona tracionada, resultando em economia de material ao mesmo tempo que vence vãos na ordem de 7,0 a 15,0 metros, sob a ação de carregamentos leves a moderados (PORTO; FERNANDES, 2015).

O esquema que representa as lajes nervuradas pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Sistema de laje nervurada bidirecional: (a) representação em planta e respectivo (b) corte transversal



Fonte: Adaptado de Nilson, Darwin e Dolan (2004).

As lajes nervuradas proporcionam melhor aproveitamento do concreto e do aço por utilizar a teoria da viga  $T$  para momentos fletores positivos. A zona de tração apresenta vazios que podem ser preenchidas com materiais inertes de forma a tornar a superfície plana quando vista externamente, ou o vazio pode permanecer sem preenchimento.

Um dos métodos mais utilizados para análise de lajes nervuradas sob flexão é conhecido como Teoria da Placa Ortotrópica Equivalente, ou Analogia de Placa, que consiste em converter a placa enrijecida por nervuras, em uma placa maciça com espessura constante e comportamento equivalente ao da laje original. A norma regulamentadora ABNT NBR 6118 (2014) permite o cálculo das lajes nervuradas bidirecionais como lajes maciças mediante exigências de projeto referentes às dimensões das nervuras, espaçamento entre os eixos das nervuras e espessura da mesa.

O cálculo usual da espessura equivalente da laje nervurada pode ser determinado através da equivalência do momento de inércia à flexão, dado pela Equação (1) a partir de uma seção  $T$ , como mostra a Figura 4.

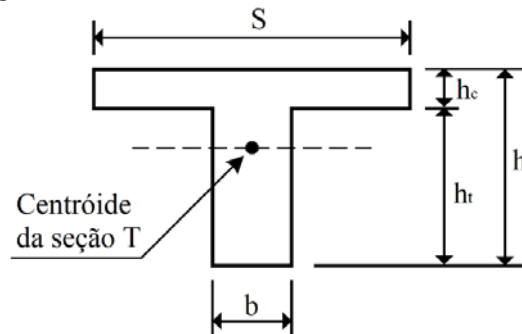
$$h_e = \left( \frac{12I}{S} \right)^{1/3} \quad (1)$$

$h_e$ : espessura equivalente para uma laje nervurada;

$I$ : momento de inércia em relação ao centróide da seção  $T$ ;

$S$ : espaçamento entre os eixos das nervuras.

Figura 4 – Seção  $T$  empregada no cálculo usual



Fonte: Araújo (2006).

Um segundo método simplificado, chamado Método da Rigidez Média, também pode ser utilizado para a determinação da espessura equivalente. Esse método, baseado no princípio da igualdade da rigidez média, considera a laje submetida a uma curvatura constante, e a rigidez média da laje será igual à rigidez equivalente, da qual resultará uma espessura equivalente.

Araújo (2006) utiliza um terceiro método, baseado na equivalência de energia de deformação de uma laje nervurada com uma laje plana maciça, através do qual é possível chegar a uma espessura equivalente, para validar os dois métodos simplificados mencionados. Esse



procedimento possui consistência teórica, mas requer integração numérica sobre o domínio da laje, tornando o processo pouco prático na fase de projeto. O autor afirma que os métodos simplificados oferecem resultados confiáveis.

Zhou, Li e Liu (2016) realizaram análise experimental, numérica e teórica em lajes compostas de uma camada de concreto armado apoiada sobre vigas de concreto protendido. As vigas possuíam momento de inércia discreto da seção transversal tornando o cálculo analítico da frequência natural muito complicado. Tratando as lajes como sistemas unidirecionais, os autores utilizam uma espessura equivalente calculada pelo método usual para a determinação simplificada da frequência natural da laje através das hipóteses de Kichhoff para placas ortotrópicas.

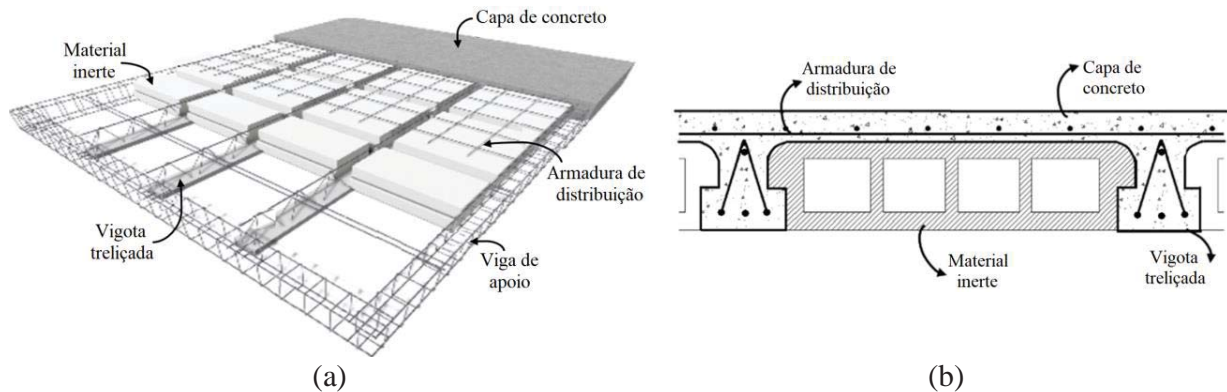
### **2.1.3 Lajes pré-moldadas com vigotas treliçadas**

As lajes formadas por vigotas pré-moldadas treliçadas, comumente chamadas de lajes pré-moldadas, são amplamente utilizadas no país em edificações residenciais e comerciais, quando necessita-se vencer vãos relativamente pequenos, podendo atingir vãos na ordem de 10 metros.

Estas lajes são formadas basicamente por elementos lineares pré-moldados chamados de vigotas, dispostos espaçadamente em uma só direção, elementos compostos de material inerte dispostos sobre as vigotas pré-moldadas e capa de concreto moldada no local. As vigotas são compostas por uma treliça espacial de aço formada por três banzos paralelos e diagonais laterais de forma senoidal e uma base de concreto. A barra de aço correspondente ao banzo superior da vigota atua como armadura de compressão, principalmente para a montagem e concretagem da laje, resistindo também aos momentos fletores negativos quando existirem. As barras posicionadas no banzo inferior resistem à tração decorrentes dos momentos fletores positivos. Os elementos de enchimento mais utilizados são blocos vazados de material cerâmico ou concreto, ou ainda blocos de poliestireno expandido (EPS).

A Figura 5 traz um esquema de laje pré-moldada treliçada com (a) indicação dos principais elementos empregados na sua composição e respectiva (b) seção transversal.

Figura 5 - Sistema de laje pré-moldada treliçada: (a) indicação dos principais elementos que compõem a laje e (b) corte transversal

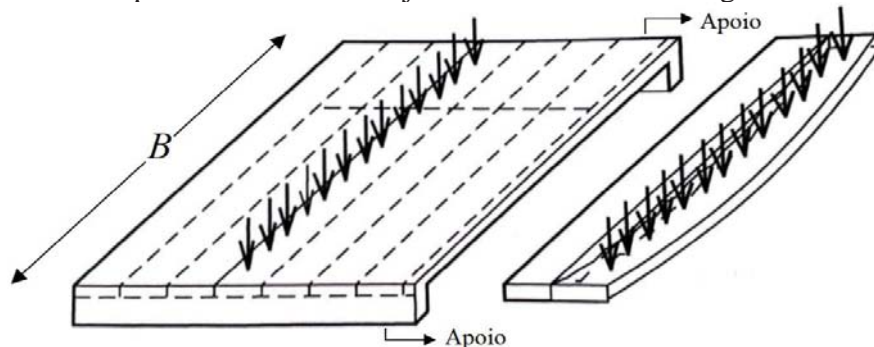


Fonte: Autor.

Uma das grandes vantagens na utilização desse tipo de laje é que não é necessário o uso de fôrmas para a aplicação do concreto complementar pois os elementos pré-moldados e os elementos de enchimento exercem esse papel. Além disso, o consumo de concreto e, conseqüentemente o peso próprio da laje são menores.

Como as vigotas são distribuídas em uma só direção (geralmente a do vão menor  $B$ ) e simplesmente apoiadas nas extremidades, as vigas em que esses elementos se apoiam recebem a maior parte da carga, e as lajes podem ser consideradas unidirecionais com seção resistente composta pela parte pré-moldada e o concreto moldado no local (EL DEBS, 2017). Como a maior parte da carga em uma laje unidirecional é transferida na direção de  $B$  ou ao longo dos diversos elementos dispostos transversalmente, cada parcela da laje pode ser tratada como uma viga (WANG; SALMON, 1998). A Figura 6 traz a representação de uma laje unidirecional com carga uniformemente distribuída.

Figura 6 - Comportamento de uma laje unidirecional sob carregamento distribuído



Fonte: Adaptado de Setareh e Darvas (2007).

Como explica El Debs (2017), de maneira geral o material de enchimento é desconsiderado na seção resistente. A consideração dos blocos só pode ser observada como parte resistente da seção quando o módulo de elasticidade destes for superior a 8,0 GPa.

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) mostram através de uma análise entre um pavimento executado com elementos totalmente independentes (em que a capa de concreto apenas aumenta a largura da mesa, não proporcionando rigidez na direção oposta) e um pavimento em laje maciça, que as lajes pré-moldadas têm um comportamento intermediário. A geometria da laje desempenha importante papel na definição da trajetória das cargas, isto é, conforme a geometria se assemelha a uma forma quadrada, maior a parcela de carregamento absorvida pelas vigas paralelas às vigotas. Além disso, mostram que a variação na espessura da capa de concreto em relação à espessura total da laje, contribui para o efeito de distribuição das cargas.

## **2.2 Dinâmica das Estruturas**

O estudo da dinâmica das estruturas no Brasil vem crescendo com o passar dos anos, embora esta abordagem seja comum em outros países. Nguyen (2013) comenta a importância no estudo da dinâmica de edifícios de múltiplos andares uma vez que as estruturas têm sido construídas com seções menores, devido ao aumento da resistência mecânica do aço e do concreto. O autor destaca que no projeto de edificações com grandes vãos livres, as condições em serviço se tornaram os requisitos mais críticos de análise.

Faisca (2003) enfatiza a importância na verificação do comportamento dinâmico das estruturas e a descrição das cargas dinâmicas atuantes sobre estas, tendo em vista que as estruturas devem atender a níveis mínimos de desempenho evitando gerar desconforto aos usuários. Como explica Tadeu (2015), as vibrações perceptíveis aos ocupantes podem ser física e psicologicamente danosas, reduzindo o conforto, a qualidade de vida e a eficiência no trabalho.

Para Brandt (2011), o estudo do comportamento das estruturas mediante ações dinâmicas atenta para a atenuação de vibrações indesejadas e prejudiciais. O autor explica que as vibrações podem causar não somente desconforto, mas também prejuízos à saúde dependendo do período de exposição. Nas edificações as vibrações podem ser responsáveis pelo comprometimento das condições em serviço, e até mesmo resultar em problemas estruturais devido à ressonância.

Ebadi (2017) explica que as atividades humanas de caminhar e saltar resultam em baixos níveis de amplitude do movimento, o que pode tornar o desempenho de alguns pisos inaceitável para os ocupantes. Esses problemas são comuns quando não há um equilíbrio adequado entre a massa modal e a rigidez do piso, provocando movimentos acelerados que podem causar desconforto aos ocupantes.

Neste cenário, a dinâmica das estruturas objetiva a determinação de deslocamentos, velocidades e acelerações dos elementos que constituem estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos (LIMA; SANTOS, 2008).

Como descreve Ewins (2000), a análise teórica de vibrações em estruturas é composta por três etapas principais. A análise inicia-se com a descrição das características físicas da estrutura em termos de massa, rigidez e amortecimento, chamado de modelo espacial. A etapa seguinte constitui a análise modal do modelo espacial, que consiste na descrição do comportamento estrutural através dos modos de vibração, o chamado modelo modal. Esse modelo é composto pelas frequências naturais e correspondentes modos de vibração, e fatores de amortecimento. É importante ressaltar que essa solução descreve as várias formas em que a estrutura é capaz de vibrar naturalmente, sem a atuação de qualquer força de excitação, os chamados modos naturais da estrutura. O último estágio consiste na análise do comportamento e da amplitude do movimento da estrutura a partir de certas condições de excitação. Claramente esta última etapa depende não somente das características da estrutura em si, mas também da magnitude das forças envolvidas na excitação. No entanto, é conveniente apresentar uma análise do sistema sujeito a uma força padrão, chamada de modelo de resposta.

O desenvolvimento da mecânica teórica nos séculos XVIII e XIX proporcionou à teoria das vibrações, raízes sólidas, como afirma Genta (2009). A introdução da análise computacional com a possibilidade de avaliar experimentos numéricos complexos revelou novos fenômenos e perspectivas inesperadas. O autor comenta que a mecânica das vibrações não é somente um estudo teórico; os projetistas precisam lidar com vibrações diariamente na consideração das condições de carregamento na análise de elementos estruturais e de máquinas.

### 2.2.1 Carregamento dinâmico

Conforme Lima e Santos (2008), as vibrações podem ser entendidas como movimentos oscilatórios de um sistema em torno de um valor de referência (a sua deformada estática). A amplitude do movimento oscilatório determina a magnitude da vibração, e a sua taxa de repetição define a frequência com que o sistema vibra.

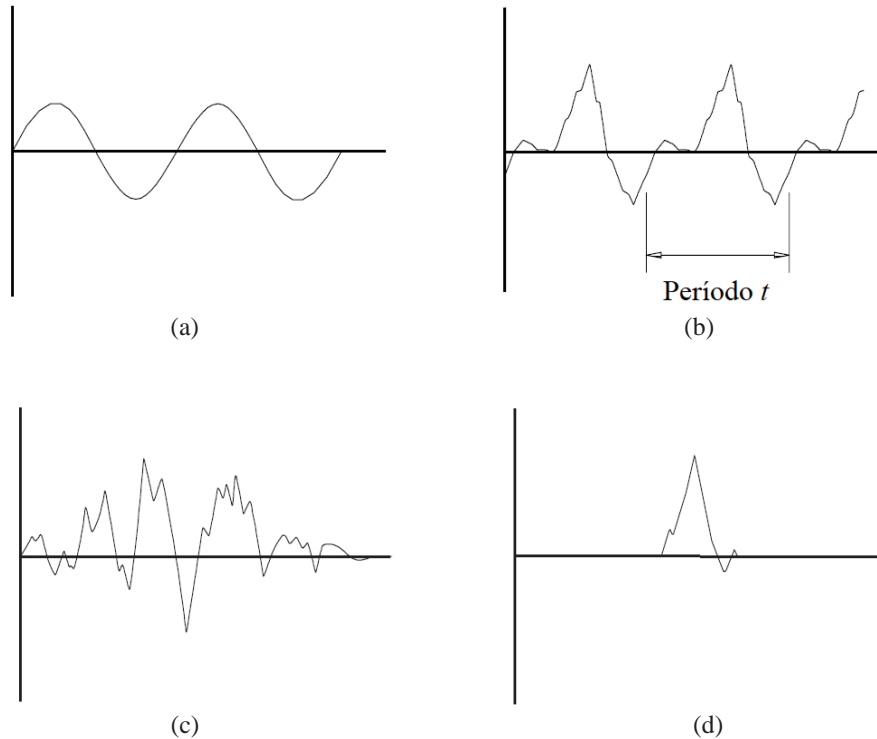
As vibrações podem ocorrer naturalmente em um determinado sistema, representando seu comportamento dinâmico natural. Estas são conhecidas como vibrações livres, e manifestam o comportamento oscilatório da estrutura como resultado de uma troca repetitiva de energia cinética e potencial entre os elementos. Há também as vibrações forçadas, que ocorrem como resultado de alguma força de excitação. A força de excitação pode ser interna a um sistema dinâmico, ou ainda ser transmitida por uma fonte externa. As ações dinâmicas são forças que apresentam variação no tempo, seja em magnitude, direção ou sentido, e esta variação faz com que a estrutura fique sujeita a acelerações, velocidades e deslocamentos, gerando forças de inércia e de amortecimento (SILVA, 2006).

De acordo com Lima e Santos (2008), as ações dinâmicas podem ser classificadas em quatro grupos, segundo sua forma de variação no tempo:

- a) harmônicas: variam no tempo e são representadas por funções seno (ou cosseno), causadas principalmente por máquinas rotativas com massa desequilibrada;
- b) periódicas: apresentam variação no tempo que se repete em intervalos regulares chamados de períodos. Estas podem ser originadas pela movimentação de pessoas, ou por forças geradas em máquinas rotativas em operação;
- c) transientes: possuem variação arbitrária no tempo, sem ocorrência de certa periodicidade. Principais exemplos são a força dos ventos, furacões, terremotos e algumas atividades da construção civil;
- d) impulsivas: são entendidas como ações transientes com duração muito curta. Estas cargas são resultantes de impactos decorrentes de diferentes atividades.

A Figura 7 mostra os tipos de ações dinâmicas, conforme sua variação no tempo.

Figura 7 – Classificação das ações dinâmicas: (a) harmônica, (b) periódica, (c) transiente e (d) impulsiva



Fonte: Adaptado de Murray et al. (2016).

Outra classificação descreve o fenômeno de vibração como determinístico ou aleatório. A vibração determinística segue um certo padrão, e seu valor e comportamento podem ser previstos a partir de dados históricos. A vibração aleatória é imprevisível, exceto quando baseada em resultados probabilísticos (HARRIS; PIERSOL, 2002).

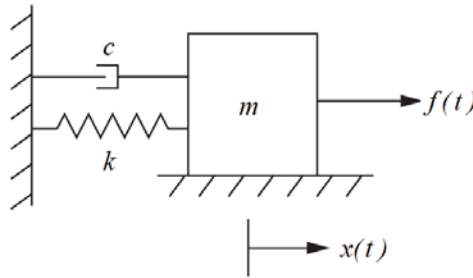
### 2.2.2 Sistemas de um grau de liberdade (SDOF)

Conforme explica Rao (2008), o grau de liberdade de um sistema mecânico é definido como o número de coordenadas independentes necessárias para definir a posição de todas as componentes de massa do sistema a qualquer instante. Um corpo rígido se movendo livremente possui seis graus de liberdade, três de translação e três de rotação.

Sistemas com um grau de liberdade (SDOF) são os mais simples pois requerem somente uma coordenada independente para descrever sua configuração. Como exemplo, pode-se considerar um sistema massa-mola, conforme Figura 8, em que a coordenada  $x$  indica o deslocamento da massa para a posição final onde a mola é esticada a partir da sua posição inicial.

Nesse caso, a posição  $x$  é conhecida em função do tempo  $t$ , e pode ser descrita através de uma função  $x = x(t)$ .

Figura 8 – Representação de um sistema massa-mola com um grau de liberdade



Fonte: Inman (2014).

Ewins (2000) afirma que um número muito reduzido de estruturas poderia realmente ser modelada como um sistema SDOF, porém, é de grande importância o estudo das propriedades desses sistemas para utilização em sistemas mais complexos com múltiplos graus de liberdade (MDOF), uma vez que sistemas complexos podem ser representados como uma superposição linear de sistemas SDOF. A contextualização dos sistemas SDOF se justifica neste trabalho pela utilização dos conceitos básicos de sistemas de um grau de liberdade para aplicação em sistemas de múltiplos graus de liberdade.

Conforme Harris e Piersol (2002), a equação que descreve o movimento de um sistema SDOF pode ser descrita como um somatório de forças em função da variável tempo. Como pode ser observado na Figura 8: a mudança no comprimento da mola é proporcional à força da mola atuando ao longo do seu comprimento, descrita pela função  $f(t) = k \cdot x$ ; pela segunda lei de Newton, a massa é um corpo rígido em que a aceleração  $\ddot{x}$  é proporcional às forças atuantes sobre ele, conforme expressão  $f(t) = m \cdot \ddot{x}$ ; em amortecimento viscoso, a força aplicada é proporcional à velocidade relativa as conexões entre os pontos do sistema  $f(t) = c \cdot \dot{x}$ . Fazendo o somatório das forças, o movimento de um sistema SDOF é expresso pela Equação (2).

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t) \quad (2)$$

$x$ : vetor de deslocamento da estrutura idealizada;

$\dot{x}$ : vetor de velocidade;

$\ddot{x}$ : vetor de aceleração;

$m$  : massa;

$c$  : coeficiente de amortecimento viscoso;

$k$  : rigidez.

A Equação (2) duas soluções: quando  $f(t) = 0$ , obtém-se uma equação diferencial homogênea em que a solução corresponde fisicamente à vibração livre amortecida;  $f(t) \neq 0$  corresponde a um sistema em vibração forçada, em que obtém-se uma solução particular que é dada devido a uma excitação, independente da solução homogênea.

### 2.2.2.1 Vibração livre

Diz-se que um sistema está em vibração livre quando, após passar por uma perturbação inicial no seu equilíbrio estático, impõe-se algum deslocamento  $x$ , e velocidade  $\dot{x}$ , no tempo igual a zero, e este continua vibrando sem que haja a ação de nenhuma outra força externa, como num pêndulo simples. Para um sistema SDOF, a vibração livre é caracterizada por uma equação diferencial homogênea expressa pela Equação (3) (SORIANO, 2014; BACHMANN et al., 1995).

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = 0 \quad (3)$$

A solução dessa equação é dada por uma oscilação no formato de ondas de seno que depende dos parâmetros  $m$  e  $k$ . O amortecimento  $c$  reduz a frequência e, conseqüentemente, aumenta o período, porém, os amortecimentos são pouco significativos, sendo negligenciado na maioria dos casos de vibração estrutural.

Em casos onde o amortecimento é nulo, ou seja, em vibração livre não amortecida, o movimento restringe-se à Equação (4) (SORIANO, 2014).

$$m.\ddot{x} + k.x = 0 \quad (4)$$

As Equações (3) e (4) são diferenciais ordinárias. Com a Transformada de Laplace, sujeita a condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ , obtém-se a Equação (5) para o movimento harmônico simples não amortecido.

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{v_0}{\omega_n} \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \quad (5)$$



O sistema em vibração livre tenderá a vibrar em certa frequência predominante, a chamada frequência natural de um sistema (SILVA, 2006). A frequência natural circular  $\omega_n$  em rad/s para um sistema SDOF é dada pela Equação (6).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

A frequência natural em Hz, e o período natural em segundos, são dados pelas Equações (7) e (8), respectivamente.

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T_n} \quad (7)$$

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Retornando à Equação (3), quando o amortecimento do sistema não pode ser negligenciado, torna-se importante a definição desse conceito.

Amortecimento representa a remoção de energia de um sistema através da sua dispersão ou dissipação, levando a estrutura a um estado de equilíbrio. A dissipação da energia está presente em qualquer sistema mecânico e isso altera a resposta dinâmica do sistema. Como o amortecimento varia de um sistema para outro, estudos baseados em dados históricos trazem valores apropriados de amortecimento para determinada aplicação, definidos como uma porcentagem do amortecimento crítico. O amortecimento crítico  $c_c$  é a quantidade de amortecimento necessária para que o sistema retorne à posição de equilíbrio sem qualquer oscilação, expresso pela Equação (9), como apresenta Soriano (2014).

$$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot m \cdot \omega_n \quad (9)$$

A razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico é denominado fator de amortecimento  $\zeta$ , e indica o decaimento da oscilação do sistema, conforme Equação (10).

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (10)$$

Das equações anteriores, quando  $c = c_c$ , tem-se  $\zeta = 1$ , e o sistema é dito criticamente amortecido. Caso  $c > c_c$ ,  $\zeta > 1$ , e assim o sistema é superamortecido. E se  $c < c_c$ , então  $0 < \zeta < 1$ , e o sistema é denominado subamortecido, e apresenta oscilações em torno do ponto de equilíbrio estático.

O amortecimento é facilmente observado quando é associado à vibração livre de um sistema. Em uma determinada estrutura, imposto um deslocamento inicial a partir de sua posição indeformada, inicia-se certa oscilação de maneira que a amplitude diminui a cada ciclo. Caso não existisse amortecimento, a oscilação continuaria indefinidamente.

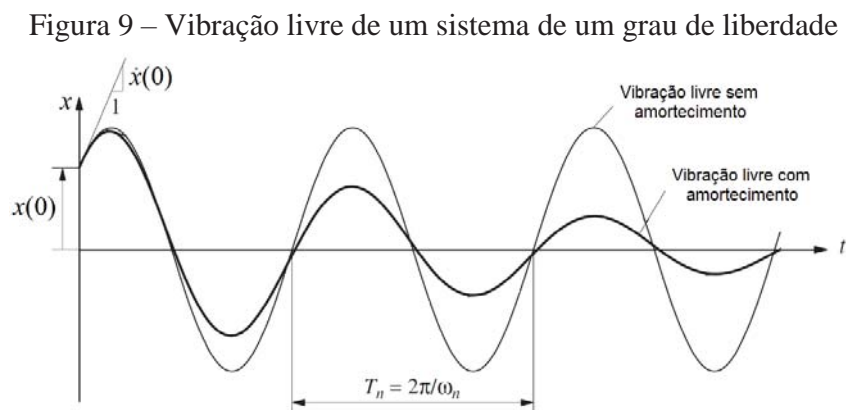
Nos casos em que o amortecimento é considerado relevante, mediante condições descritas anteriormente, a solução da Equação (3) é dada pela Equação (11).

$$x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \left( x_0 \cdot \cos(\omega_a \cdot t) + \frac{x_0 \cdot \zeta \cdot \omega_n + v_0}{\omega_a} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot t) \right) \quad (11)$$

A frequência circular amortecida  $\omega_a$  em rad/s é descrita pela Equação (12).

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (12)$$

A Figura 9 mostra um ciclo de vibração livre com e sem amortecimento, impostas condições iniciais de deslocamento  $x(0)$ , e velocidade  $\dot{x}(0)$ . O intervalo  $T_n$  representa o período natural de vibração, ou seja, o tempo necessário para o sistema completar um ciclo de vibração livre.



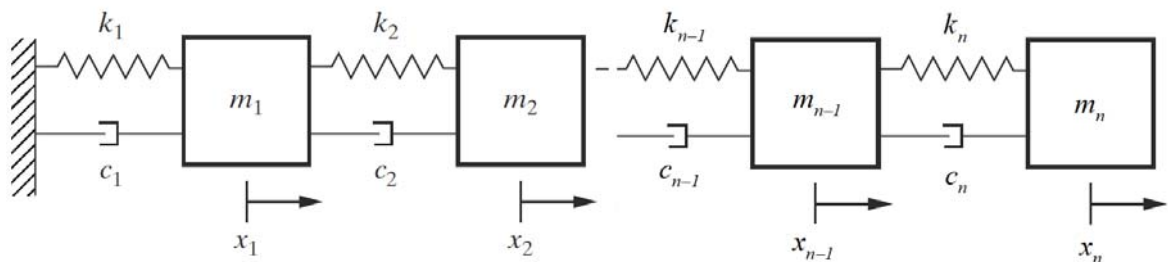
Fonte: Adaptada de Chopra (2012).

### 2.2.3 Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF)

Os sistemas de múltiplos graus de liberdade (MDOF) são aqueles que requerem mais de uma coordenada independente para descrever seu movimento. O número de graus de liberdade é determinado pela quantidade de elementos inerciais e vinculações presentes no modelo. Geralmente os sistemas estruturais possuem inúmeros graus de liberdade, no entanto, este número infinito de graus de liberdade pode ser reduzido através da combinação de vários sistemas SDOF.

Um sistema MDOF é representado por um conjunto de massas, amortecimentos e rigidezes, relacionados a acelerações, velocidades e deslocamentos, respectivamente, conforme pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 - Representação de um sistema massa-mola com n graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Inman (2014).

Da mesma forma que no sistema SDOF, a equação que descreve o movimento de um sistema MDOF pode ser descrita como um somatório de forças, envolvendo massas, amortecimentos e rigidezes em matrizes e, acelerações, velocidades e deslocamentos em vetores, conforme Equação (13).

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{F\} \quad (13)$$

Em que os vetores são descritos conforme Equação (14).

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$\{\ddot{x}\}$ : vetor de aceleração;

$\{\dot{x}\}$ : vetor de velocidade;

$\{x\}$ : vetor de deslocamento;

$\{F\}$ : vetor de força.

E as matrizes descritas pela Equação (15).

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$[M]$ : matriz de inércia;

$[C]$ : matriz de amortecimento viscoso;

$[K]$ : matriz de rigidez.

Como explicam Thomson e Dahleh (1998), os modos normais de um sistema em movimento são vibrações livres não amortecidas que dependem somente da massa e da rigidez, e como estas são distribuídas. Quando vibrando em um desses modos normais, todos os pontos do sistema sofrem movimento harmônico simples que passam por suas posições de equilíbrio simultaneamente. Dessa forma, a equação do movimento restringe-se a um caso de vibração livre com condição de contorno  $C \approx 0$ . Impondo-se certo movimento através de condições iniciais de deslocamento e velocidades não nulas, obtém-se uma equação homogênea (Equação (16)).

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{0\} \quad (16)$$

As soluções são formadas por modos de vibração livre não amortecidos em que todas as coordenadas variam harmonicamente no tempo, em uma mesma frequência, as chamadas frequências de vibração livre não amortecidas, em um mesmo ângulo de fase, conforme Equação (17).

$$\{x\} = \{\hat{\phi}\} \cos(\omega t - \phi) \quad (17)$$

$\hat{\phi}$  : i-ésimo modo natural de vibração;

$\omega_j$  : frequência natural correspondente ao i-ésimo modo natural de vibração;

$\phi_j$  : ângulo de fase correspondente ao i-ésimo modo natural de vibração.

Derivando essa solução duas vezes no tempo, substituindo na equação do movimento, e cancelando a função harmônica, recai-se no sistema de equações algébricas homogêneas, conforme Equação (18).

$$[[K] - \omega^2 [M]] \cdot \{\hat{\phi}\} = \{0\} \quad (18)$$

A solução trivial é dada por  $\hat{\phi} = 0$  que resulta na ausência de movimento. Soluções não triviais são obtidas fazendo o determinante da matriz dos coeficientes igual a zero, conforme Equação (19).

$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (19)$$

A expansão dessa expressão é chamada equação de frequências que fornece soluções de  $\omega^2$ . Essas soluções são os autovalores quadrados das frequências naturais. Substituindo essas soluções na Equação (18), obtêm-se os autovetores  $\hat{\phi}_j$  de amplitude de movimento, os chamados modos naturais de vibração.

As frequências naturais e respectivos modos de vibrações são propriedades naturais de uma determinada estrutura em vibração livre e não dependem das forças externas, mas sim das distribuições de massa e rigidez (CHOPRA, 2012).

Retomando a Equação (13), mas sob condição de vibração livre, quando o amortecimento é atuante no sistema com vários graus de liberdade, geralmente é difícil ou impossível separar as equações do movimento, sendo necessário tratamento teórico extra. O modelo de amortecimento proporcional é o primeiro modelo analítico usado para estudar o amortecimento de um sistema MDOF.

O amortecimento, diferente da massa e da rigidez, geralmente não pode ser modelado, o que representa uma dificuldade na análise de sistemas MDOF amortecidos. Um procedimento que permite proceder com a análise em uma estrutura em que a dissipação de energia é uniforme é a suposição de um amortecimento proporcional de Rayleigh, que permite aplicar técnicas de análise modal de sistemas não-amortecidos para sistemas amortecidos. Na análise por elementos finitos, incorporar o amortecimento proporcional permite representar sistemas de uma maneira mais real.

A técnica de Rayleigh relaciona a matriz de amortecimento  $[C]$ , com as matrizes de massa  $[M]$  e rigidez  $[K]$ , e tem como base a combinação linear da Equação (20) (SORIANO, 2014).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (20)$$

$\alpha$  : coeficiente de massa proporcional;

$\beta$  : coeficiente de rigidez proporcional.

A substituição da Equação (20) na equação do movimento de um sistema MDOF em vibração livre resulta na Equação (21).

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (21)$$

Esta forma da matriz  $[C]$  é ortogonal em relação aos autovetores do sistema, e aplicando-se a transformação de coordenadas modal, a matriz se torna diagonal, conforme Equação (22).

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [C] [\Phi] &= [\Phi]^T (\alpha[M] + \beta[K]) [\Phi] = [C_d] \\ \alpha([\Phi]^T [M] [\Phi]) + \beta([\Phi]^T [K] [\Phi]) &= \alpha + \beta[\Omega] \end{aligned} \quad (22)$$

$[\Omega]$  : matriz espectral de frequências naturais;

$[\Phi]$  : matriz modal dos modos de vibração;

A matriz de amortecimento modal  $[C_d]$  é dada pela Equação (23), e o coeficiente de amortecimento viscoso para o  $i$ -ésimo modo de vibração é calculado pela Equação (24).

$$C_d = 2[\zeta\omega] \quad (23)$$

$$C_i = 2.\zeta_i.\omega_i = \alpha + \beta.\omega_i^2 \quad (24)$$

E a razão de amortecimento viscoso é dada pela Equação (25).

$$\zeta_i = \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (25)$$

As razões de amortecimento para os  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo modos de vibração são  $\zeta_i$  e  $\zeta_j$ , então os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são determinados pela resolução da Equação (26).

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Com isso, determina-se o amortecimento no  $n$ -ésimo modo de vibração, conforme Equações (27) e (28), utilizado na obtenção da resposta à vibração forçada pelo método da superposição modal.

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_n} + \beta \omega_n \right) \quad (27)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\zeta \frac{\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ \beta = 2\zeta \frac{1}{\omega_i + \omega_j} \end{cases} \quad (28)$$

Embora este seja um método vastamente aplicado devido a sua simplicidade, não há controle entre as razões de amortecimento dos diversos modos naturais de vibração uma vez que a técnica parte das razões de amortecimento de dois modos naturais de vibração, resultando em amortecimentos reduzidos para os modos intermediários, e amortecimentos com valores crescentes para os modos de ordem superior. Assim, aconselha-se estabelecer amortecimento para o primeiro

modo e para um modo de frequência mais alta que tenha participação relevante na resposta (SORIANO, 2014).

#### 2.2.4 Amplitude de vibração

Existem diversas maneiras de quantificar os níveis de vibração de um movimento oscilatório em uma estrutura, dependendo do tipo de sinal registrado. Como esclarece Griffin (1990), conforme critérios de conforto humano, a severidade da vibração em uma estrutura geralmente é quantificada em termos de aceleração. Assim, a magnitude de uma vibração pode ser expressa por uma aceleração pico-a-pico, aceleração de pico, ou uma aceleração RMS.

A medição pico-a-pico indica o percurso máximo da onda, ou seja, a diferença entre o valor máximo positivo e máximo negativo, e é geralmente utilizada quando quer se referir à amplitude do deslocamento. Outra maneira é a medição de pico que indica o valor entre o zero e o pico máximo. Este parâmetro é válido para indicação de impactos de curta duração, e não leva em consideração o histórico no tempo. Por último, a chamada aceleração RMS, que considera o histórico no tempo da onda e oferece um valor de nível diretamente relacionado à energia da vibração.

A Equação (29) representa as relações entre os valores de aceleração em termos da aceleração de pico.

$$\begin{aligned} a_{rms} &= a_{pico} / \sqrt{2} \\ a_{pico-a-pico} &= 2(a_{pico}) \end{aligned} \quad (29)$$

A magnitude da vibração pode ser expressa em termos de aceleração pico-a-pico, contudo, este método pode ocasionar resultados derivados de picos inexpressivos, especialmente quando se trata de movimentos complexos. Como esclarecem Zhou et al. (2016), embora a aceleração de pico seja o maior valor resultante de uma excitação, esta não oferece indicação sobre o tempo de duração que o sistema é exposto aquele nível de aceleração.

No estudo da magnitude da vibração, Davis, Liu e Murray (2014) explicam que como os limites de tolerância de vibrações em edificações são em termos de acelerações de pico senoidais, um único pico não é diretamente comparável. Para uma comparação verdadeira é necessário determinar uma aceleração de pico equivalente. Para isso, o sinal no domínio do tempo passa por



um filtro passa-baixa para excluir frequências imperceptíveis aos seres humanos. Pode-se utilizar também um filtro passa-alta para excluir frequências abaixo de 1Hz. Em seguida, utiliza-se uma medida ponderada de aceleração, ou seja, a aceleração em RMS. Este é o método com maior aceitação para quantificar a severidade das vibrações devido às atividades humanas, apresentando uma medição média da aceleração no tempo.

A Equação (30) pode ser utilizada para computar a aceleração RMS,  $a_{RMS}$ . De acordo com Davis, Liu e Murray (2014), intervalos de medição a cada dois segundos fornecem bons resultados.

$$a_{RMS}(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2} \quad (30)$$

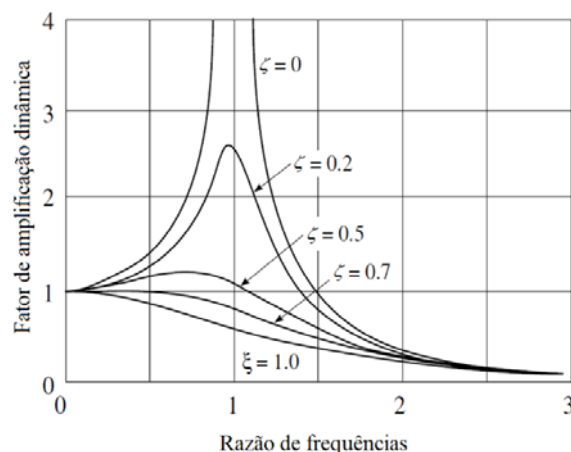
$N$  : número de dados de aceleração dentro de um intervalo de tempo;

$a_i(t)$  :  $i$ -ésimo valor da aceleração no tempo.

### 2.2.5 Ressonância

A ressonância pode ser observada a partir da razão de frequências  $r = \omega_0/\omega_n$ , em que  $\omega_0$  é a frequência do carregamento e  $\omega_n$  é a frequência natural da estrutura. Quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural de um sistema, o sistema é conduzido a oscilar com maior amplitude. Na Figura 11 são plotados o fator de amplificação do movimento como uma função da razão de frequências com diversos valores de amortecimento.

Figura 11 – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995).

O fator de amortecimento exerce grande influência na amplificação dos deslocamentos. Com fatores de amortecimento baixos, há uma faixa de frequências em torno da frequência natural na qual os fatores de amplificação são altos. Nessa região mesmo que a amplitude das forças excitadoras seja pequena, existe a tendência em ocorrerem vibrações com grandes amplitudes. Para frequências próximas a zero o sistema comporta-se como estático. Para frequências muito acima da frequência natural, há grande redução na amplitude de vibração.

O amortecimento é um fator muito importante quando as frequências de excitação são próximas da frequência natural, pois a ausência deste está relacionada com o fenômeno de ressonância, em que o sistema passa a oscilar em maiores amplitudes.

### **2.2.6 Frequência natural e modos de vibração em placas**

As placas são elementos sólidos, planos, geometricamente aproximados por uma superfície bidimensional, delimitados por duas superfícies paralelas que definem sua espessura. Assume-se que a espessura das placas é muito pequena comparada com suas demais dimensões. Geralmente, quando a razão entre a espessura e a menor dimensão lateral da placa é inferior a  $1/20$ , considera-se as suposições de placas finas de Kirchhoff. O elemento de placa trabalha predominantemente à flexão, curvando-se perpendicularmente ao seu próprio plano (BLEVINS, 2016).

Em uma placa de espessura  $h$  constante, é comum dividir  $h$  pela metade, por um plano paralelo à sua face. Esse plano, chamado de plano médio ou superfície média, representa a geometria da placa como um todo.

Na teoria de flexão em placas, o modelo de placas de Kirchhoff e o modelo de placas de Mindlin são os mais utilizados para análise. O primeiro é comum em casos de placas finas em que a deformação por cisalhamento é negligenciada. Já as placas de Mindlin são utilizadas quando esse efeito não pode ser desprezado como, por exemplo, quando a placa é relativamente espessa com relação às suas outras dimensões. Neste trabalho, somente placas finas são consideradas, em que somente o modelo de placas de Kirchhoff é relevante.

A teoria de placas é vastamente utilizada para descrever modelos em vários ramos da engenharia como a análise de estruturas arquitetônicas, pontes, estruturas hidráulicas, pavimentos, máquinas, etc., e por esse motivo a análise das vibrações em placas se torna importante. A obtenção de soluções exatas para os casos de vibração transversal em placas finas é um assunto em constante

discussão, e constantemente, pesquisadores buscam novos métodos exatos ou aproximados para esses problemas.

Poisson, Timoshenko e Rayleigh, entre 1827 e 1945, foram os pioneiros no estudo de vibrações em placas. Mais tarde, em 1975, Graff sintetizou as equações exatas dos modos de vibração e frequências de placas finas retangulares com pelo menos duas bordas opostas simplesmente apoiadas.

Conforme Xing e Liu (2009), na determinação das soluções exatas para vibração livre de placas, a derivação da expressão matemática do modo de vibração satisfazendo as equações do problema de autovalor é a questão mais difícil de ser resolvida para o qual tem dedicados os maiores esforços na tentativa de alcançar soluções aproximadas com grande precisão. Os métodos mais aproximados para o problema foram estabelecidos com base na expansão de séries, e o método de Rayleigh-Ritz é um dos mais importantes devido sua alta versatilidade e simplicidade.

Young (1950), através do método de Rayleigh-Ritz, analisou as frequências em vários modos de vibração em placas quadradas com todas as bordas engastadas (C-C-C-C), uma borda engastada e demais bordas livres (C-F-F-F), e duas bordas adjacentes engastadas e as demais livres (C-C-F-F). Warburton (1954) lançou um trabalho inovador para sua época, oferecendo 21 novas configurações abrangendo bordas simplesmente apoiadas (S), engastadas (C), e livres (F). Mais adiante, Leissa (1973) trouxe resultados mais precisos para os 21 casos em placas retangulares, através de equações exatas para os seis casos com dois lados opostos simplesmente apoiados, e aplicação do método de Rayleigh-Ritz para os 15 demais casos.

Os problemas de vibração livre em placas retangulares podem ser classificados em três categorias: (a) placas com todas as bordas simplesmente apoiadas (S); (b) placas com somente um par de bordas opostas simplesmente apoiadas ou restringidas; (c) placas que não se enquadram em nenhuma das duas categorias anteriores. Soluções satisfatórias para os problemas das categorias (a) e (b) foram encontradas através de soluções exatas e soluções de forma fechada. No entanto, a terceira categoria ainda é objeto de uma série estudos e discussões, e muitos pesquisadores ao longo dos anos têm encontrado soluções aproximadas com a aplicação de outros métodos.

Bert e Malik (1994) usaram o método de Rayleigh-Ritz para analisar a vibração livre de placas isotrópicas retangulares com diversas configurações abrangendo uma ou mais bordas restringidas. Bhat, Singh e Mundkur (1993), e Chang, Wang e Wereley (2003) encontraram soluções através da redução da equação diferencial parcial de placas para uma equação diferencial ordinária (método

de Kantorovich-Krylov). Li et al. (2016) obtiveram equações para determinar a frequência natural e os modos de vibração para placas finas apoiadas sobre três ou quatro suportes pontuais. Um novo método de separação de variáveis é utilizado por Xing et al. (2018) para a vibração livre das placas retangulares de Kirchhoff baseado no princípio variacional do quociente de Rayleigh. Pela aplicação inédita do novo método, os autores obtiveram todas as soluções fechadas, exceto as que incluem duas direções de bordas livres.

Sakata, Takahashi e Bhat (1996) obtêm as frequências naturais de placas ortotrópicas retangulares pela redução sucessiva da equação diferencial parcial da placa e pela resolução exata da equação diferencial ordinária resultante. A redução assume uma solução aproximada satisfazendo as condições de contorno ao longo de uma direção e empregando a técnica de Kantorovich. Gorman (1990) e (1993) explora o método da superposição para a análise de frequências e modos de vibração para placas ortotrópicas retangulares engastadas em todas as bordas, e livres em todas as bordas. Mais tarde, Gorman (2005) obteve uma série de soluções para placas ortotrópicas pelo método da superposição no qual os modos naturais são expressos em séries trigonométricas e hipergeométricas, e o número de termos na série depende da precisão requerida.

Até 2009 não havia soluções exatas para placas finas ortotrópicas retangulares com pelo menos duas bordas adjacentes engastadas. Xing e Liu (2009) investigaram todas as combinações possíveis utilizando bordas simplesmente apoiadas (S) e engastada (C), e chegaram a três soluções exatas para esse grupo (S-S-C-C, S-C-C-C e C-C-C-C), através do método da separação de variáveis. Mais tarde, Xing e Xu (2013) encontraram três novas soluções. As soluções são diretamente aplicáveis à análise de flambagem em placas. Duan e Wang (2014) propõem um algoritmo de convolução discreta singular para à análise de vibrações em placas finas com descontinuidade geométrica, mostrando resultados satisfatórios para frequências relacionadas aos modos de vibração correspondentes às frequências mais baixas.

Embora o assunto não seja abordando neste trabalho, é importante ressaltar que muitos pesquisadores ao longo dos últimos anos têm buscado soluções, em termos de autovalores e autovetores, também para placas espessas e moderadamente espessas. Mindlin, Schacknow e Deresiewicz (1956) encontraram a solução exata para placas retangulares simplesmente apoiadas, dando maior atenção aos modos e frequências naturais fora da faixa de aplicabilidade da teoria de Kirchhoff. Liu e Xing (2011) estudaram soluções exatas para a vibração livre em placas de Mindlin ortotrópicas retangulares para outras configurações, uma vez que soluções exatas para placas

espessas eram disponíveis somente para placas simplesmente apoiadas. Liu, Xing e Reddy (2014) mais tarde publicaram um novo trabalho atualizando alguns valores numéricos, além de apresentar formas mais compactas nas equações e coeficientes para modos de vibração encontrados por outros autores ao longo dos anos. Recentemente, Sarayi, Bahrami e Bahrami (2018) implementaram o método de propagação da onda para a análise da vibração livre de placas espessas com base na teoria de Mindlin. Para a solução de sistemas complexos, o método dos elementos finitos se mostra uma ferramenta poderosa na análise de problemas da engenharia de estruturas, sendo que, muitos elementos finitos para placas de Mindlin têm sido desenvolvidos e incorporados em programas comerciais. Formulações desenvolvidas por Falsone e Settineri (2012) são comumente usadas em softwares comerciais de elementos finitos.

Ventsel e Krauthammer (2001) explicam que a dinâmica das placas pode ser modelada matematicamente por equações diferenciais parciais baseadas nas leis de Newton ou por equações baseadas nas considerações de trabalho virtual. Em aplicações práticas somente a vibração perpendicular ao plano é relevante, e os efeitos das vibrações normais ao plano médio podem ser negligenciados.

A teoria das placas elásticas é uma aproximação da teoria da elasticidade tridimensional para duas dimensões, que permite uma descrição do deslocamento de cada ponto da placa em termos da deformada do seu plano médio. As equações de movimento das placas são derivadas usando a teoria de placas finas.

### **2.2.6.1 Placas retangulares uniformes isotrópicas**

A teoria das placas finas com pequenas deflexões, também chamada de teoria clássica das placas ou teoria de Kirchhoff, é baseada nas seguintes suposições (hipóteses de Kirchhoff):

- a) O material das placas é elástico, homogêneo e isotrópico;
- b) As placas são inicialmente planas;
- c) A deflexão (componente normal do vetor de deslocamento) do plano médio é pequena comparada com a espessura da placa bem como a inclinação da superfície deformada;
- d) A influência da deformação transversal do cisalhamento é negligenciada, resultando em seções planas normais à superfície média;

- e) A tensão na direção normal ao plano médio é pequena quando comparada com as demais componentes de tensão e pode ser desprezada (EPT – Estado Plano de Tensões);
- f) Uma vez que os deslocamentos das placas são pequenos, assume-se que o plano médio permanece não tensionado após flexão.

Com bases nessas suposições, obtém-se a equação do movimento não amortecido para pequenas deformações ( $w$ ) em placas uniformes e elásticas no plano cartesiano  $x-y$ , negligenciando as ações no plano normal à placa (Equação (31)).

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (31)$$

$\gamma$  : massa por unidade de área;

$f$  : carga distribuída transversal agindo na placa por unidade de área;

$t$  : tempo;

$D$  : parâmetro de rigidez à flexão.

$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (32)$$

$h$  : espessura da placa;

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal;

$\nu$  : coeficiente de Poisson.

Como as vibrações naturais não são dependentes da carga aplicada ao sistema, são função somente das propriedades e da geometria dos materiais que o compõem. Logo, a equação de quarta ordem, homogênea, parcial diferencial para uma placa em vibração livre, linear, não amortecida, é dada pela Equação (33).

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (33)$$

Em que  $w$  deve satisfazer às condições de contorno relativas às vinculações das bordas das placas e às seguintes condições iniciais, quando  $t = 0$ :

$$w = w_0(x, y), \quad \frac{\delta w}{\delta t} = v_0(x, y) \quad (34)$$

$w_0$  e  $v_0$ : deflexão e velocidade iniciais para o ponto  $(x, y)$ .

Uma solução da Equação (33) pode ser obtida pela utilização de um método analítico (método de Fourier), para a obtenção das frequências naturais correspondentes aos modos naturais de vibração das placas. Para solução e obtenção de  $w(x, y, t)$  na forma generalizada, conforme Ventsel e Krauthammer (2001), é assumida a seguinte solução:

$$w(x, y, t) = (A \cos(\omega_{ij}t) + B \sin(\omega_{ij}t)) W(x, y) \quad (35)$$

Que tem solução separável da função de forma  $W(x, y)$  descrevendo os modos de vibração e algumas funções harmônicas no tempo;  $\omega$  é a frequência natural da placa relacionada ao período de vibração  $T$  pela relação  $\omega = 2\pi/T$ . Substituindo (35) em (33), obtém-se:

$$D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) - \omega^2 \gamma W = 0 \quad (36)$$

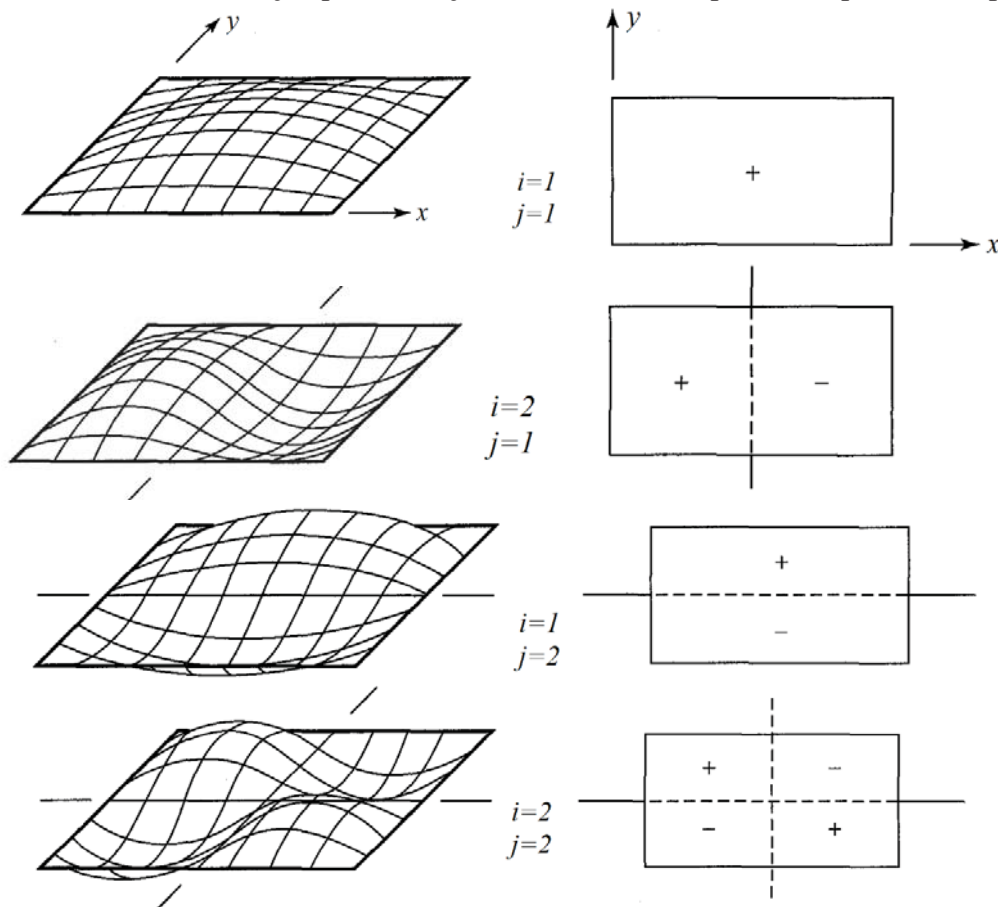
$$\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (37)$$

$\nabla^2$ : operador de Laplace.

A solução da Equação (36) é uma equação de autovalor que é resolvida para as frequências naturais circulares  $\omega_{ij}$  e modos de vibração  $W(x, y)$ , e pode ser representada por uma série de Fourier. A frequência  $\omega_{ij}$  depende de dois índices modais  $i$  e  $j$ , que descrevem o número de meia ondas no modo de vibração ao longo das coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente. Quanto maior a ordem do modo de vibração, maior número de ondas.

A Figura 12 apresenta alguns modos de vibração para placas simplesmente apoiadas. As linhas pontilhadas representam as linhas nodais (linhas onde a perturbação é nula).

Figura 12 - Modos de vibração para vibrações transversais em placas simplesmente apoiadas



Fonte: Adaptada de Rao (2007).

As frequências naturais em placas é expressa em termos de um parâmetro adimensional  $\lambda$ , da massa por unidade de área da placa  $\gamma$  e do modulo de Elasticidade  $E$ , conforme Equação (38).

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi \cdot a^2} \sqrt{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \gamma (1 - \nu^2)}} \quad (38)$$

Fica claro que a frequência das placas aumenta com o aumento da sua espessura e diminui com o aumento do seu comprimento  $a$ . O parâmetro adimensional  $\lambda$  é função das condições de apoio, da geometria da placa, e do coeficiente de Poisson para bordas livre e bordas curvas simplesmente apoiadas. O Anexo A apresenta valores de  $\lambda$  para o cálculo das frequências em placas finas conforme Blevins (2016) com base nos estudos de Leissa (1969).



Pela suposição da isotropia nas placas, as propriedades do material que as compõem são as mesmas em todas as direções, o que implica a ocorrência de deformações principalmente no sentido do carregamento aplicado. As deformações dependem de duas constantes elásticas independentes, por exemplo  $E$  e  $\nu$ .

### 2.2.6.2 Placas ortotrópicas retangulares

Algumas placas são constituídas de materiais que possuem propriedades que variam com a direção considerada, os chamados materiais anisotrópicos. Em sistemas anisotrópicos submetidos a certo carregamento, as deformações nas demais direções podem ser maiores ou menores do que a deformação no sentido do carregamento aplicado, dependendo das propriedades.

Conforme Ventsel e Krauthammer (2001), além de placas construídas com materiais anisotrópicos, algumas placas feitas com materiais isotrópico também podem ser classificadas como anisotrópicas. Isso acontece quando um sistema possui anisotropia estrutural, ou seja, uma placa anisotrópica pode melhor representar o comportamento do sistema. Esse tipo de consideração é possível se, por exemplo, os reforços na estrutura sejam arranjados de maneira que a placa rígida possa ser substituída por uma placa homogênea, ortotrópica, com rigidez distribuída ao longo da placa. Caso o material anisotrópico possua três planos perpendiculares de simetria em relação às suas propriedades elásticas, ele é chamado de ortotrópicos.

A equação diferencial para placas ortotrópicas é definida por (39).

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (39)$$

$$H = D_{xy} + 2D_k \quad (40)$$

A solução da Equação (39) requer valores específicos de rigidez à flexão e à torção. Para placas ortotrópicas esses valores são determinados, primeiramente reduzindo a placa estruturalmente ortotrópica para uma placa naturalmente ortotrópica com propriedades elásticas iguais às médias das propriedades dos componentes das placas originais. Então, as rigidezes da placa ortotrópica equivalente são aproximadas, dependendo do tipo de ortotropia estrutural.

A fórmula que descreve de maneira generalizada a frequência natural para diferentes geometrias de placas ortotrópicas, conforme Blevins (2016), é dada pela Equação (41). Essa equação pode variar em torno de 5% da solução exata para casos em que o material empregado é isotrópico.

$$f_{ij} = \frac{\pi}{2\gamma^{1/2}} \left[ \frac{G_i^4 D_x}{a^4} + \frac{G_j^4 D_y}{b^4} + \frac{2[H_i H_j D_{xy} + 2D_k (J_i J_j - H_i H_j)]}{a^2 b^2} \right]^{1/2} \quad (41)$$

Da equação anterior,  $G$ ,  $H$  e  $J$  são determinados em função dos índices  $i$  e  $j$ , e das condições de apoio das placas, definidos conforme Anexo A. Já os parâmetros de rigidez ( $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e  $D_k$ ) dependem da sua geometria, o que faz com que o cálculo seja diferenciado para cada situação. Blevins (2016) aponta as equações para o cálculo de diversos modelos geométricos de placas ortotrópicas, entre elas, as grelhas retangulares com nervuras em uma e duas direções.

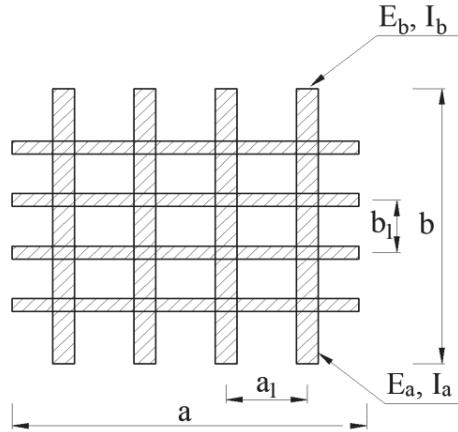
Esses dois exemplos de placas ortotrópicas diferem das placas uniformes pois suas propriedades são direcionais, ou seja, sua rigidez à flexão pode ser diferente para cada eixo. As seguintes condições são necessárias para considerar uma análise das vibrações em grelhas:

- a) as nervuras são uniformes; todas as nervuras paralelas são idênticas;
- b) o espaçamento entre as nervuras é uniforme de modo que a placa ou grelha possui dois planos perpendiculares de simetria que são normais ao seu próprio plano;
- c) o espaçamento entre as nervuras é pequeno comparado com a distância entre os nós de vibração;
- d) podem ser consideradas as suposições gerais da teoria de placas.

Essa análise considera que se o espaçamento entre as nervuras é relativamente pequeno, a grelha de vigas se comporta como uma placa ortotrópica uniforme.

A Figura 13 representa o esquema para uma grelha de nervuras intertravadas em duas direções.

Figura 13 - Placas ortotrópicas retangulares para uma grelha de nervuras intertravadas em duas direções



Fonte: Adaptado de Blevins (2016).

As constantes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e  $D_k$  para o caso da Figura 13 são dadas pelas expressões a seguir:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_a I_a}{b_1} & D_y &= \frac{E_b I_b}{a_1} \\ D_{xy} = 2D_k &= \frac{E_a C_a}{2b_1} + \frac{E_b C_b}{2a_1} \end{aligned} \quad (42)$$

$I_a$  e  $I_b$ : momento de inércia da seção da nervura nas direções  $a$  e  $b$  ;

$a_1$  e  $b_1$ : espaçamento entre o eixo das nervuras nas direções  $a$  e  $b$  ;

$C_a$  e  $C_b$ : constante de torção.

$D_{xy}$  representa a torção da nervura em torno do seu próprio eixo e pode ser considerado nulo pois seu efeito geralmente é pequeno.

A constante  $C$  para uma seção retangular é dada pela Equação (43), em que  $a$  e  $b$  são as dimensões da seção.

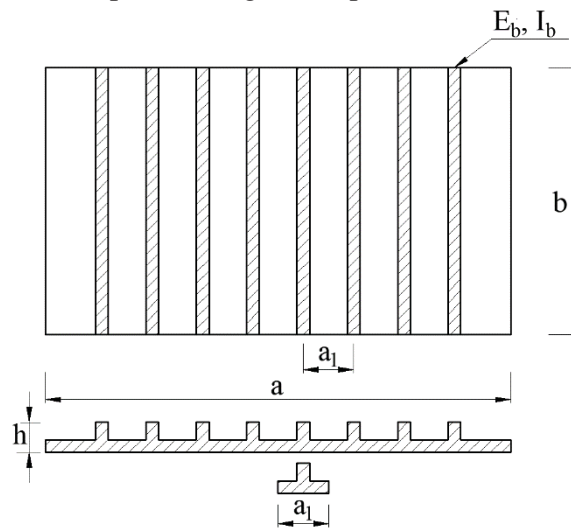
$$C = \frac{ca^3b^3}{a^2 + b^2} \quad (43)$$

$a/b$	1	2	4	8	$\infty$
$c$	0.281	0.286	0.299	0.312	1/3

Nesse caso, ainda não foi considerada a camada de concreto superior às nervuras. Para isso, Blevins (2016) adiciona a frequência natural calculada para a grelha com a frequência calculada para uma placa uniforme isotrópica.

Já para placas com nervuras em somente uma direção, representada pela Figura 14, as constantes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e  $D_k$  são dadas pelas Equações mostradas em (44). Nesse caso não há a necessidade em adicionar a camada de concreto superior às nervuras.

Figura 14 - Placas ortotrópicas retangulares: placa com nervuras em uma direção.



Fonte: Adaptado de Blevins (2016).

$$D_x = \frac{Ea_1h_c^3}{12(a_1 - t + t(h_c/h)^3)} \quad D_y = \frac{EI}{a_1} \quad D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} + \frac{EC_r}{a_1} \quad (44)$$

$h_c$  : espessura da capa de concreto;

$h$  : espessura total da placa;

$t$  : largura da nervura;

$I$  : momento de inércia da seção  $T$  ;

$C_r$  : constante de torção da nervura.

### 2.3 Técnicas de Análise Dinâmica Experimental

O estudo das vibrações através de ensaios experimentais é uma ferramenta útil no desenvolvimento e utilização de produtos, no projeto, desenvolvimento e verificação da performance de componentes individuais de sistemas complexos mesmo antes da construção do sistema, e ainda, classificação e controle de qualidade dos materiais empregados na fase de construção (SILVA, 2006).

O estudo experimental de vibrações em estruturas não é um assunto recente. Existem registros de estudos feitos por Coulomb (1784, apud CARVALHO, 2002) em que levanta hipóteses sobre a consideração do amortecimento, realizando ensaios que provaram que o amortecimento torsional era causado por perdas internas ao material. Mais tarde, Tredgold (1824) publicou o primeiro critério de rigidez conhecido para evitar problemas de vibrações, sugerindo uma altura mínima para vigas com grandes vãos. Desde então vários autores têm despendido esforços no estudo das vibrações em estruturas, e nas últimas décadas há uma tendência no estudo de vibrações causadas por atividades humanas rotineiras.

Os sistemas de pisos com vãos maiores tornaram-se populares devido ao desenvolvimento das técnicas construtivas e pela alta aplicabilidade dos materiais leves de alta resistência, buscando proporcionar espaços mais amplos e funcionais. Como consequência, há um aumento também nos problemas causados por vibrações, uma vez que estas estruturas apresentam baixas frequências naturais e, algumas vezes, baixos fatores de amortecimento, tornando-as suscetíveis a vibrações induzidas pelas atividades humanas diárias (CHEN, LI e RACIC, 2016).

Nesse contexto, a análise modal experimental tem como objetivo determinar as características dinâmicas de um sistema em vibração na forma de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração e, a partir daí utilizar essas informações para compor modelos matemáticos que possam descrever as propriedades dinâmicas das estruturas, e permitir a previsão do desempenho das mesmas. A descrição detalhada do procedimento para realização de uma análise modal completa pode ser encontrada em Ewins (2000) e He e Fu (2001).

Embora a análise modal experimental seja o método mais acurado para determinar as propriedades dinâmicas de um piso, o procedimento pode, algumas vezes, ser inviável devido a restrições de custo e tempo, e possíveis interrupções inaceitáveis de ocupantes. Visando a encontrar

uma alternativa a este método, muitos pesquisadores têm aplicado técnicas de análise modal experimental para procedimentos experimentais simplificados.

Zhou et al. (2016) estudou a vibração de um sistema de piso em concreto protendido destinado à utilização como uma quadra de badminton interna. Para a realização dos testes experimentais, foram posicionados acelerômetros com capacidade de  $\pm 5$  g e taxa de aquisição de dados de aproximadamente 1000 Hz. Inicialmente foi desenvolvido o teste de impacto de calcanhares para identificar os parâmetros modais de frequência natural, fator de amortecimento pelo método do decremento logarítmico, e modos de vibração. Para a simulação numérica, o sistema estrutural foi modelado de forma tridimensional, considerando duas condições: no modelo 1 foram considerados os efeitos das estruturas adjacentes e no modelo 2 esses efeitos foram negligenciados. Os autores destacam que o piso mostrou-se relativamente flexível quando comparado com os valores normativos, por apresentar frequência natural de 6,17 Hz. Os fatores de amortecimento encontrados foram baixos, justificados pela inexistência de elementos não-estruturais. Em relação à influência das estruturas adjacentes, indica-se a consideração destas para determinar a frequência fundamental de estruturas similares. Os autores destacam que os valores limites especificados na literatura abordada são conservativos para a análise da resposta de aceleração.

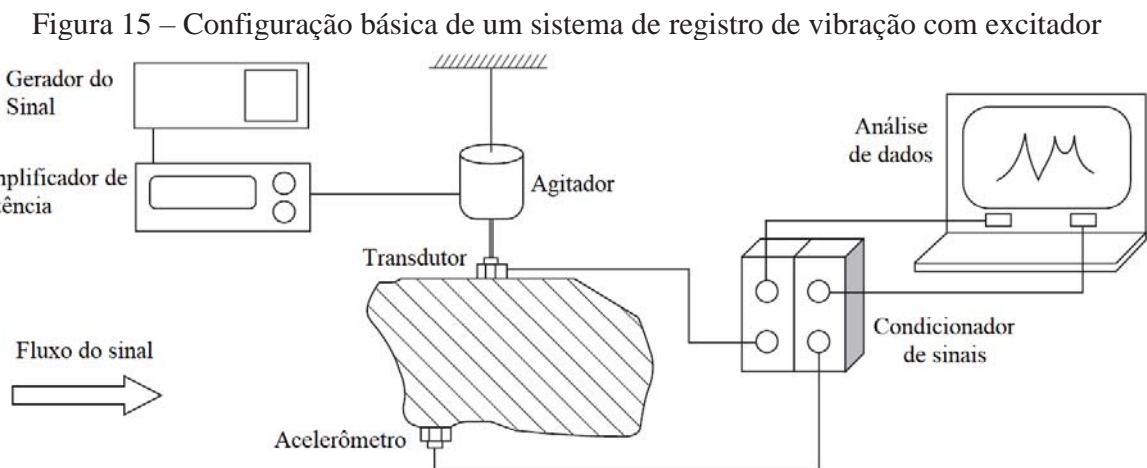
Casagrande et al. (2018) comparam diferentes abordagens (analítica, numérica e experimental) na avaliação de vibração e desempenho de pisos de madeira laminada colada (CLT) e lajes mistas de madeira e concreto (TCC). Os ensaios instrumentados são realizados utilizando acelerômetros e martelo de impacto em laboratório em um protótipo representando um piso de vão único equivalente, e in situ, na configuração real.

Davis, Liu e Murray (2014) realizaram um programa de testes experimentais simplificados para determinar as propriedades dinâmicas de piso e avaliar a gravidade da aceleração devido ao caminhar em um sistema de piso sujeito a reclamações devido a vibrações excessivas. O estudo compara resultados obtidos por técnicas de análise modal experimental e de um procedimento simplificado que se inicia com a estimativa das frequências naturais, através de um teste de impacto de calcanhares, e segue com a determinação da máxima resposta em vibração forçada devido ao caminhar, para posterior comparação com os limites de conforto humano. As respostas foram utilizadas para ajustar um modelo de elementos finitos. O estudo de caso indica que os testes

experimentais simplificados, que são muito econômicos e convenientes, são eficazes e úteis durante projetos que visam atenuação de vibrações excessivas em pisos.

Nos tópicos anteriores, inicialmente assumem-se modelos e equações diferenciais para os sistemas em estudo, a partir dos quais é realizado o cálculo e caracterização da resposta dinâmica utilizando dados de entrada conhecidos. Com a utilização de testes modais é realizado o caminho inverso, a resposta da estrutura é medida e a partir dos dados de saída os parâmetros de vibração são determinados. Esse procedimento pode ser aplicado para diversas finalidades entre elas a identificação ou verificação de modelos matemáticos de uma estrutura submetida a testes (INMAN, 2014).

He e Fu (2001) dividem os testes experimentais em três componentes principais que são a excitação e sensores do sistema, o sistema de aquisição de dados e o sistema de processamento de dados. Um esquema simplificado é apresentado na Figura 15.



Fonte: Adaptado de He e Fu (2001).

O deslocamento do sistema vibratório é convertido em um sinal elétrico por um transdutor ou por um sensor de vibração. A impedância de saída não é ideal para entrada direta no equipamento de análise de sinal, assim são utilizados condicionadores de sinal para amplificar o sinal até o valor adequado. Os dados de saída do instrumento de conversão podem ser apresentados graficamente através de um microcomputador ou registradas e armazenadas para que posteriormente sejam analisadas na determinação das características de vibração. O exemplo apresentado é meramente ilustrativo e a configuração do sistema pode ser alterada para atender as necessidades. Por exemplo, em casos onde somente as frequências naturais, amortecimentos e

resposta ao caminhar são solicitadas, o agitador, o transdutor e o gerador de sinal podem ser desnecessários.

Nos próximos tópicos serão abordados pontos relevantes para a realização de uma análise experimental das vibrações.

### 2.3.1 Excitação

Para o levantamento das características dinâmicas de um sistema é necessária a atuação de uma excitação que varie no tempo. Na escolha do tipo de excitação, embora teoricamente a resposta não deva depender desse fator, na prática, podem melhorar a precisão e a qualidade dos dados de saída. A excitação deve excitar os modos de vibração de interesse.

Armer (2001) apresenta cinco formas de excitação dinâmica para testes experimentais em lajes de piso, e as propriedades dinâmicas que podem ser determinadas utilizando este tipo de ação, conforme explicitado na Tabela 1.

Tabela 1 – Métodos de teste de vibrações em pisos

	Frequência	Amortecimento	Rigidez	Modo de vibração
Ambiente	Sim	-	-	-
Impacto de Calcanhares	Sim	Sim	-	-
Saco de areia	Sim	Sim	-	-
Martelo de impacto	Sim	Sim	Sim	Sim
Vibração forçada	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Adaptado de Armer (2001).

O autor explica que o método do ambiente envolve o registro da resposta da estrutura devido a excitação natural e requer equipamentos sensíveis de monitoramento e longo período para aquisição de dados. O teste de impacto de calcanhares é uma ferramenta de simples execução e comumente utilizada, em que é possível obter a frequência natural e amortecimento do sistema estudado, embora o amortecimento possa ser superestimado tratando-se de estruturas leves. O método do saco de areia fornece os mesmos resultados do teste de impacto de calcanhares e consiste na queda de um saco de areia de 1kg no centro do vão gerando um impacto seguido de uma resposta à vibração livre piso. O teste do martelo de impacto é vantajoso pois pode auxiliar na determinação da rigidez e obtenção dos modos de vibração, no entanto, pode tomar um grande tempo de execução e ainda não fornecer resultados precisos. O teste de vibração forçada, utiliza um gerador de vibração



como um agitador, por exemplo, é o método mais abrangente em que as quatro características citadas podem ser mensuradas.

Embora existam testes modais que forneçam resultados acurados das propriedades de um sistema em vibração através de ferramentas sofisticadas, as frequências naturais e fatores de amortecimento em sistemas de piso podem ser facilmente estimados através de recursos acessíveis, como o teste de impacto de calcanhares.

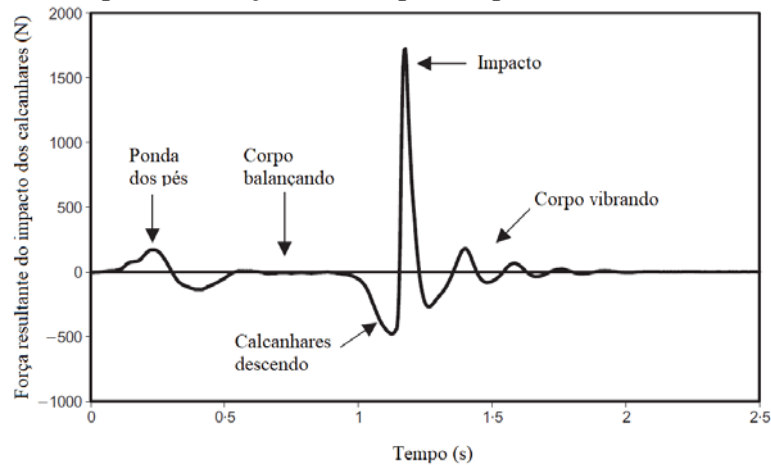
Este método, sugerido pela AISC Design Guide #11 (Murray et al, 2016), é um dos mais utilizado atualmente e tem tido grande aceitação principalmente por sua facilidade de execução e por não requerer equipamentos caros.

Blakeborough e Williams (2003) estudam a validade do uso do impacto de calcanhares instrumentado para obtenção das propriedades dinâmicas em pisos, através da comparação com o teste do martelo. Os autores mostram que a performance do teste de impacto dos calcanhares é melhor em relação ao teste do martelo para estruturas entre 2-15 Hz, além de apresentar gráficos no domínio da frequência mais suaves que possibilitam estimar de forma mais acurada os fatores de amortecimento.

Cao, Qi e Li (2018), através de ensaios experimentais e numéricos, investigaram as condições de serviço quanto a vibração de um sistema de piso em concreto protendido utilizado como recepção de um aeroporto. Para obtenção das frequências naturais e fatores de amortecimento experimentalmente, os autores utilizaram o teste de impacto dos calcanhares e testes de salto, além de registrar as acelerações do sistema.

No teste de impacto de calcanhares, uma pessoa com cerca de 700 N permanece no centro de um pavimento na ponta dos pés, com os calcanhares distantes do piso aproximadamente 80 mm, e então o indivíduo solta seu peso fazendo com que os calcanhares impactem no piso, tomando cuidado para evitar múltiplos impactos ou que o corpo balance para frente. Durante o teste, enquanto o piso vibra, as respostas de aceleração são registradas por um acelerômetro. Depois do impacto principal, há um curto período de vibração amortecida a uma frequência de cerca de 5 Hz, devido à vibração vertical do corpo humano (BLAKEBOROUGH; WILLIAMS, 2003). A Figura 16 mostra a resposta típica da força no tempo para um teste de impacto de calcanhares.

Figura 16 – Resposta da força exercida pelo impacto dos calcanhares no tempo



Fonte: Adaptado de Blakeborough e Williams (2003).

Davis, Li e Murray (2014) destacam que, como qualquer método experimental, o teste de impacto de calcanhares tem limitações. A simples queda dos calcanhares não fornece informações suficientes para estimar outros parâmetros modais como por exemplo os modos de vibração e a rigidez, parâmetros que podem ser obtidos através de métodos referenciados em que a força aplicada pode ser prevista. Outro fato é que eventualmente algumas lajes possuem múltiplos modos naturais que são muito próximos, e esse teste não contém informações suficientes para permitir que esses modos sejam separados para análise.

### 2.3.2 Aquisição de sinais

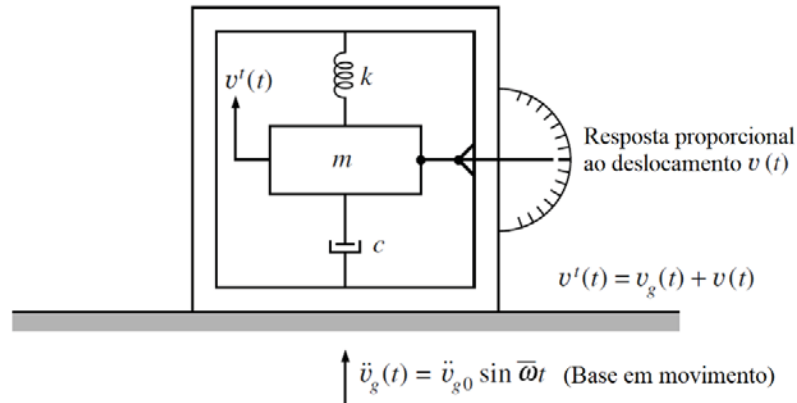
Para a captação dos sinais de vibrações em estruturas, são utilizados transdutores ou sensores de vibração. Os transdutores são dispositivos que transformam valores de variáveis físicas em sinais elétricos, e quando utilizados juntamente com outro dispositivo para medir vibrações, o conjunto é chamado de sensor de vibração (RAO, 2008).

Existem vários tipos de transdutores e sensores, no entanto o acelerômetro é o mais utilizado por sua versatilidade. Em um teste modal os acelerômetros são capazes de auxiliar na obtenção dos parâmetros modais de interesse a partir do registro da aceleração de um corpo em vibração, com resposta em voltagem. O sinal é transformado por um condicionador de sinal antes de ser processado por outro hardware ou um software (RAO, 2008; HE e FU, 2001).

Os acelerômetros são compostos por um oscilador de amortecimento viscoso que quando excitado através da base, gera um deslocamento proporcional à aceleração dessa massa deslocada

à uma certa frequência (CLOUGH e PENZIEN, 1995). O sistema pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 - Configuração básica de um acelerômetro



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995).

No interior do acelerômetro há uma massa suspensa em um sistema estacionário. Sempre que o corpo sofre aceleração, a inércia do dispositivo faz com que ele resista. A força exercida pela massa é equilibrada pela mola. Como o deslocamento da mola é proporcional à força, a aceleração é proporcional ao deslocamento (FIGUEIREDO et al., 2007).

Conforme Figueiredo et al. (2007), existem vários tipos de acelerômetros. Entre os acelerômetros mecânicos, os mais comuns são os capacitivos, piezoelétricos e piezoresistivos. Atualmente estes têm sido substituídos por acelerômetros eletromecânicos como os acelerômetros MEMS (sistemas mecânicos microeletrônicos), ou microacelerômetros. Esses dispositivos podem medir a aceleração em até três eixos e o deslocamento dos elementos móveis associados ao seu eixo. Os movimentos medidos são então convertidos em sinais analógicos. Os acelerômetros MEMS são os que equipam os celulares.

Yoon et al. (2014) usaram um celular equipado com acelerômetro para investigar o comportamento dinâmico de passarelas de aço em Seul, na Coreia do Sul. Pravia e Braido (2015) estudaram a aplicabilidade do uso de acelerômetros que equipam aparelhos de celular para prever a resposta dinâmica de estruturas. Para isso, a partir da vibração resultante do deslocamento de caminhões sobre dois viadutos em concreto, foram extraídos dados de aceleração com a utilização de celulares para a obtenção do amortecimento e a frequência natural correspondente ao primeiro harmônico nos viadutos em estudo. Os resultados experimentais foram comparados com modelos numéricos desenvolvidos em elementos finitos (MEF), e apresentaram respostas muito próximas

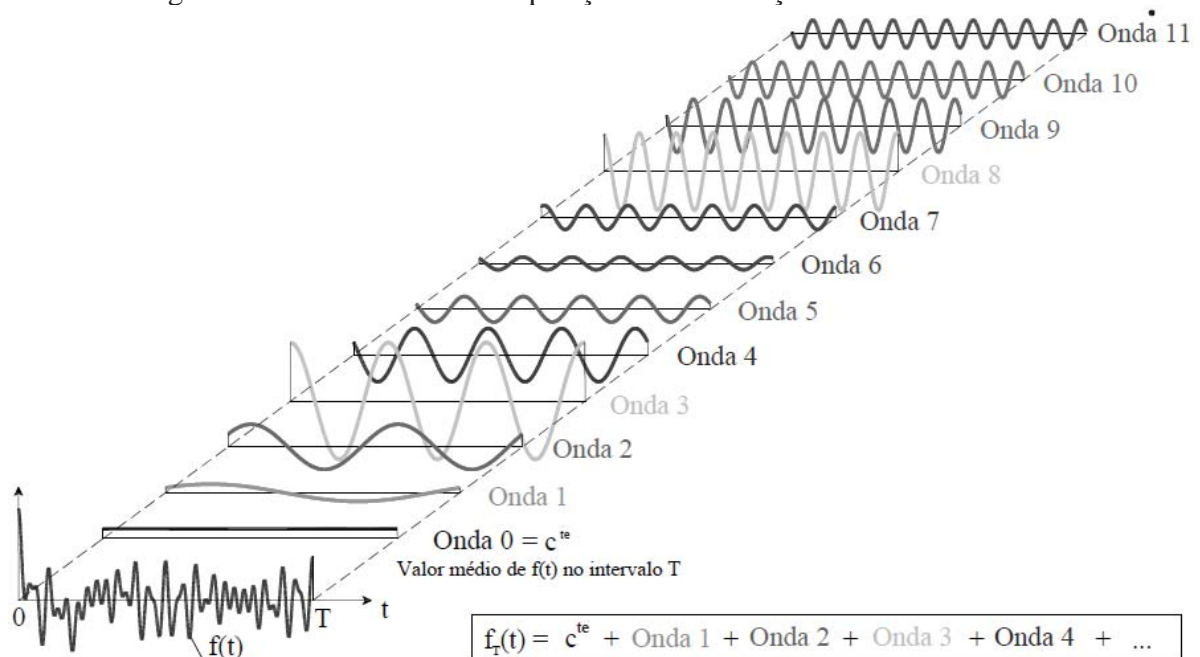
entre os modelos. Os autores afirmam que o método de estudo dos parâmetros de vibração a partir da utilização de aparelhos de telefonia móvel é uma alternativa eficaz para a determinação da frequência natural e amortecimento, e para o monitoramento de obras de arte especiais, com baixo custo e maior facilidade de operação. Em ambos os estudos o aparelho de celular apresentou desempenho adequado para a obtenção dos dados de vibração, mostrando-se uma alternativa acessível principalmente pela facilidade na aquisição dos dados.

### 2.3.3 Processamento de sinais

Raramente é possível interpretar sinais elétricos obtidos em ensaios dinâmicos na forma em que eles são apresentados, sem que estes passem por um tratamento digital. A resposta no domínio da frequência é a forma mais usual de representar esses sinais em uma análise modal experimental, e permite obter informações relevantes a respeito de um sinal que não poderiam ser obtidas pela análise no domínio no tempo.

A análise no domínio da frequência possibilita representar no domínio da frequências uma função definida no domínio do tempo, através da sua decomposição em ondas senoidais de amplitude e frequências variáveis, chamadas de componente em frequência do sinal original.

Figura 18 - Conceito de decomposição de uma função em ondas senoidais



Fonte: Mendes e Oliveira (2008).

Conforme a Figura 18, o sinal decomposto é um processo que contém ondas senoidais em várias frequências. Boa parte das características dos sinais pode ser descrita por meio de suas frequências, incluindo os ruídos e ecos misturados ao sinal principal. Nesse contexto, surge o conceito de filtragem de sinais, que consiste em atenuar frequências indesejadas ou amplificar as frequências de interesse, compondo um sinal relevante.

O método mais utilizado para análise no domínio da frequência é chamado de Transformada de Fourier, adequado para sinais não-periódicos ilimitados no tempo (que se estende por todo o domínio do tempo). O principal problema de uma representação da transformada de Fourier é que a sequência existe para todos os instantes de tempo ( $-\infty$  a  $\infty$ ), diferente dos sinais que são naturalmente finitos. Uma opção é obter amostras da transformada de Fourier nas frequências desejadas e lidar com certas distorções que isso possa causar. Essa solução é dada pela Transformada Discreta de Fourier (DFT), representada pela Equação (45).

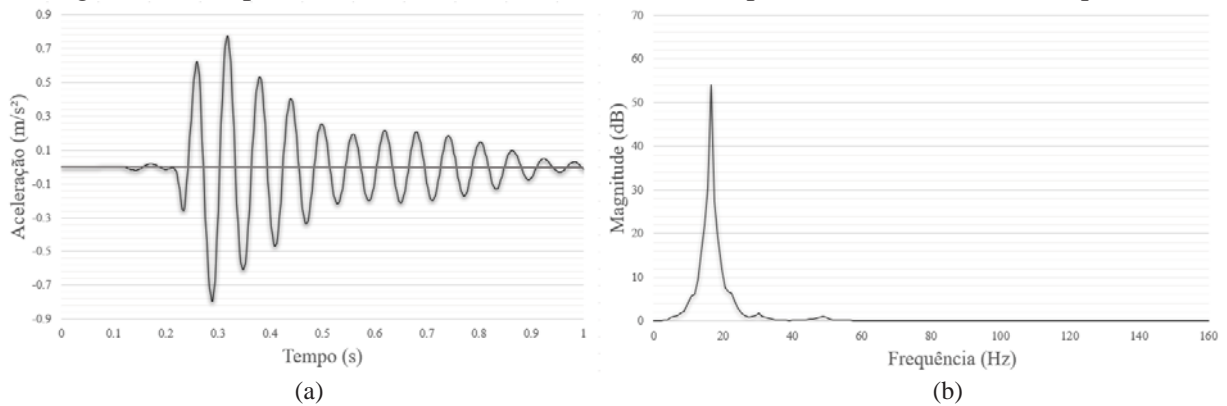
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega_N^{(j-1)(k-1)} \quad (45)$$

Uma das grandes vantagens da DFT é o fato de que esta pode ser implementada computacionalmente e o processamento no domínio da frequência pode ser realizado de forma automática, através de um algoritmo de implementação que seja rápido sem desperdício de recursos computacionais. Para isso o algoritmo deve ter baixa complexidade. A complexidade é definida pelo número de operações a serem realizadas pelo processador digital, que é dada em função da quantidade de dados  $N$  que este processa.

Conforme Mendes e Oliveira (2008), o advento da generalização da aplicação da DFT aconteceu o desenvolvimento da Transformada Rápida de Fourier (FFT) por Cooley e Tukey em 1965. A FFT nada mais é do que um algoritmo que viabiliza o cálculo da DFT de uma forma rápida e eficiente na forma de uma ferramenta computacional. Adicionalmente, uma das grandes vantagens é que este algoritmo não requer memória adicional para o cálculo.

O método original da FFT desenvolvido em 1965 possuía certa limitação em que, para apresentar uma resposta eficiente, a série deveria possuir um número de pontos igual a uma potência inteira de 2, ou seja,  $2^n$ . No entanto, este método já foi generalizado para permitir valores arbitrários de  $N$  (CHOPRA, 2012). Na Figura 19, observa-se a resposta da estrutura no domínio do tempo (a) e, com a aplicação da FFT, (b) no domínio da frequência.

Figura 19 - Resposta da estrutura (a) no domínio de tempo e (b) no domínio de frequência.



Fonte: Autor.

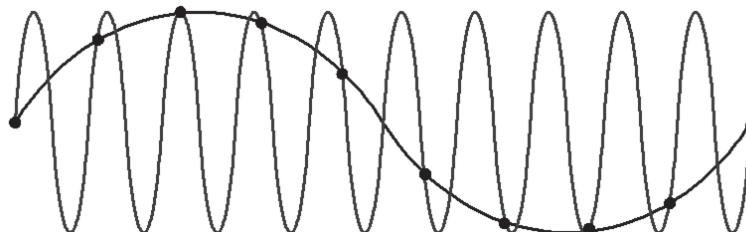
Há uma série de características na análise digital de Fourier que, se não tratadas propriamente, podem causar resultados errôneos, conforme abordado a seguir.

### 2.3.3.1 Aliasing

Um erro comum na análise de sinais digitais é o chamado de aliasing. Esse erro, causado por tempo de amostragem inadequado, e refere-se à distorção do sinal analógico pelo registro digital. Se a taxa de amostragem for muito lenta para capturar os detalhes do sinal analógico, a representação digital fará com que as frequências altas apareçam como frequências baixas (EWINS, 2000).

Na Figura 20, o sinal de alta frequência é interpretado como um sinal de frequência mais baixa pois como a taxa de amostragem é muito lenta, os pontos amostrados compõem ondas senoidais que não representam o verdadeiro sinal.

Figura 20 – Fenômeno de aliasing



Fonte: Autor.

A onda formada é praticamente perfeita o que torna impossível a identificação do sinal errôneo. Para reduzir ou evitar esse efeito, o intervalo de amostragem precisa ser suficientemente pequeno para oferecer pelo menos duas amostras por ciclo da frequência mais alta a ser calculada, ou seja, a taxa de amostragem de um sinal deve ser pelo menos o dobro que a maior frequência de interesse. Esse é o chamado Teorema da Amostragem em que a frequência de corte é chamada de Frequência de Nyquist (INMAN, 2014).

O aliasing pode ser evitado em sinais contendo muitas frequências passando o sinal analógico  $x(t)$  em um filtro anti-aliasing antes da FFT. Esse é um filtro passa-baixa que elimina as frequências maiores que aproximadamente metade da máxima frequência de interesse. Conforme Silva (2006), se o espectro original é passado em um filtro passa-baixa com frequência de corte igual à frequência de Nyquist, a distorção não ocorre devido à amostragem. No entanto, na prática não é possível atingir uma filtragem perfeita de sinais, ou seja, distorções podem ainda permanecer mesmo depois de usar um filtro. Os erros residuais podem ser reduzidos usando uma frequência de corte do filtro que seja ligeiramente menor do que a frequência de Nyquist. É conveniente adotar como frequência de corte valores em torno de (Frequência de Nyquist/1,28), caso em que os últimos 20% dos pontos espectrais próximos à frequência de Nyquist são negligenciados.

### 2.3.3.2 Leakage

Como explica Inman (2014), utilizar um sinal amostrado com um número  $N$  finito de amostras, pode originar a um problema chamado de leakage. Esse é um erro resultado da descontinuidade das extremidades de uma amostra, produz um espectro de resposta em frequência que não indica um único pico de frequência, pois a energia “vaza” em várias linhas espectrais próximas da frequência verdadeira. Para tornar o sinal finito, este pode ser cortado em qualquer múltiplo do seu período, o que pode representar um problema já que sinais complexos possuem muitas frequências diferentes. Caso algumas providências específicas não sejam tomadas, o sinal pode ser cortado no meio do período, permitindo o surgimento de frequências errôneas misturadas ao sinal digital, uma vez que a transformada digital de Fourier assume que o sinal é periódico dentro da amostra.

Conforme Ewins (2000) existem algumas formas de evitar o minimizar os efeitos de leakage, como:

- (a) alterar a duração do comprimento da amostra para coincidir com qualquer periodicidade fundamental no período, isto é, mudar o período  $T$  de maneira a capturar um número exato de ciclos do sinal (isso pode ser feito somente se o sinal analisado é periódico);
- (b) aumentar a duração do período de medição de modo que a separação entre as linhas espectrais seja melhor (o que não remove, mas reduz a severidade do efeito de leakage);
- (c) preencher com zeros o início e final da amostra medida alcançando o resultado precedente sem exigir mais dados;
- (d) aplicar uma função de ponderação chamada de “janela” aos dados medidos. Essa função força os dados a melhor satisfazer os requisitos de periodicidade do processo de Transformada de Fourier.

### **2.3.3.3 Averaging**

De acordo com Inman (2014), como em um teste de vibração o sinal obtido pode conter diferentes tipos de ruído, e sabendo que a confiança em uma quantidade medida é aumentada através da realização de um número de testes idênticos, é muito comum a prática da técnica de averaging. Essa técnica nada mais é do que repetir um mesmo experimento várias vezes e então fazer a média dos resultados obtidos.

### **2.3.3.4 Filtragem de sinais**

Em um ensaio de impacto, as respostas de aceleração no domínio do tempo recebem interferência de esforços externos como vento, tráfego e outros. A influência de esforços externos resulta em vibrações em frequências bem superiores se comparadas à frequência fundamental do piso, além de dificultar a seleção dos picos de aceleração para aplicação do método do decremento logarítmico que estima o amortecimento da estrutura. (SILVA Jr, 2015).

Uma forma de solucionar este problema é utilizando filtros de sinais que, de forma simplificada, limitam o sinal da vibração em uma faixa de frequências que pode ser isolada para o estudo.



Os filtros podem ser analógicos ou digitais (numéricos). Na filtragem analógica, o filtro é um sistema dinâmico físico (geralmente um circuito elétrico), em que o sinal a ser filtrado é aplicado ao sistema (*input*), e os dados de saída (*output*) correspondem ao sinal filtrado. Um filtro digital é um dispositivo que aceita uma sequência de valores discretos de entrada (amostrados a partir de um sinal analógico), e gera uma sequência de valores de saída discretos. Portanto, um filtro digital é um sistema de tempo discreto e pode ser representado por uma equação diferencial (SILVA, 2006).

Na análise de vibrações costuma-se utilizar três principais tipos de filtragem de sinais: filtros passa-baixa, passa-alta e passa-banda. Os filtros passa-baixa permitem passar sinais abaixo de uma frequência pré-estabelecida, os passa-alta permitem passar sinais acima de determinada frequência, e os filtros passa-banda permitem passar sinais em uma determinada faixa de frequência.

Conforme Mendes e Oliveira (2008), na aplicação de filtros podem ocorrer certos desvios das amplitudes dos sinais amostrados em relação ao zero, também chamados de “*off-set*”. Essa perturbação pode ser removida através de um ajuste por mínimos quadrados de uma função polinomial. Em muitos casos esse desvio é aproximadamente constante, pelo polinômio a ajustar ser de grau zero, em que a constante que minimiza o quadrado da diferença entre o sinal e o polinômio é a média do sinal. Dessa forma, a Equação (46) pode ser utilizada para este ajuste.

$$y_n = x_n - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (46)$$

$y_n$  : nova série;

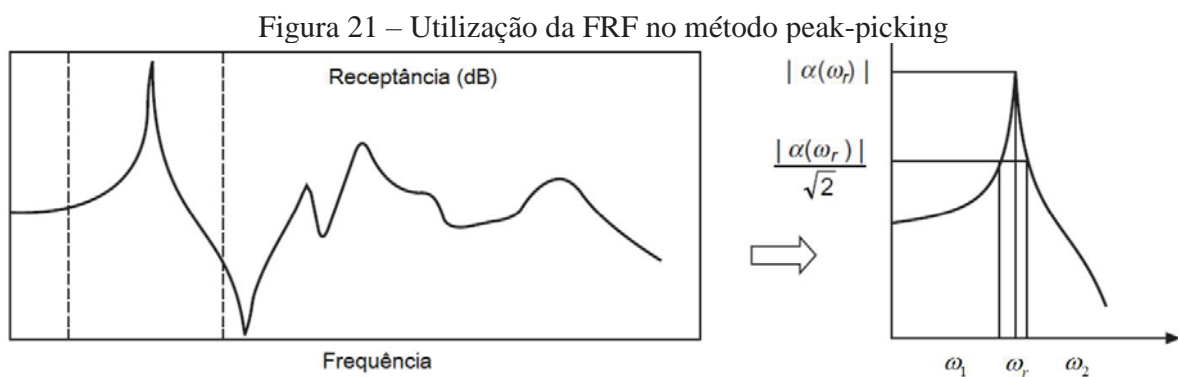
$x_n$  : amostra inicial;

### 2.3.4 Obtenção da frequência natural pelo método peak-picking

A forma mais simples para determinar os parâmetros modais é através da abordagem com um grau de liberdade pelo método peak-picking, também chamado de método da meia potência. Neste método, a frequência natural, associada a um determinado modo de vibração, é determinada

através do valor de pico do gráfico da resposta em frequência (FRF<sup>1</sup>) ou da densidade espectral (PSD<sup>2</sup>). O gráfico é subdividido em várias faixas de maneira que cada faixa abranja somente um pico. Cada subdivisão da faixa de frequência é avaliada como uma função resposta em frequência de um sistema de grau único de liberdade, ou seja, a frequência de uma das respostas máximas é tomada como uma frequência natural. Isso pressupõe que a função de resposta em frequência em cada faixa é dominada por essa única forma modal. Embora o pico de frequência represente também uma forma modal, não é possível determinar o modo de vibração utilizando o gráfico (INMAN, 2014; HE e FU, 2001; EWINS, 2000).

A Figura 21 esquematiza o método peak-picking obtido a partir de uma resposta FRF, em que  $\alpha(\omega_r)$  corresponde ao valor da frequência natural do modo de vibração correspondente, e  $|\alpha(\omega_r)|/\sqrt{2}$  são os pontos de meia potência, ou seja, a largura da curva da resposta de frequência quando a magnitude  $|\alpha(\omega_r)|$  é  $1/\sqrt{2}$  vezes o valor do pico. A diferença entre  $\omega_2$  e  $\omega_1$  é a chamada largura da banda.



Fonte: Adaptada de He e Fu (2001).

He e Fu (2001) explicam que algumas vezes a determinação das frequências naturais e modos de vibração através da FRF ou da PSD é dificultada por ruídos captados no sinal. Em muitos casos, nem todos os picos são de ressonância e, para a identificação correta, pode ser realizada a sobreposição de várias FRF ou PSD.

<sup>1</sup> A resposta em frequência (FRF), também chamada de função de transferência, expressa uma relação no domínio da frequência entre a força de excitação e a resposta de vibração, de um sistema linear invariante no tempo.

<sup>2</sup> A densidade espectral (PSD), também chamada de espectro do sinal, é uma função utilizada para a análise de sinais aleatórios que representa a densidade de energia para cada faixa de frequência e descreve como a variação dos sinais é distribuída no domínio da frequência.

Já o amortecimento é determinado através de dois pontos de meia potência em relação à amplitude máxima, cada um localizado em um dos lados do pico de frequência. O fator de amortecimento é então obtido pelo chamado método da largura da banda, descrito no item 2.3.5.2.

### **2.3.5 Obtenção experimental dos fatores de amortecimento**

O efeito de dissipação de energia em um sistema é um fenômeno complexo. Assim, muitos parâmetros são utilizados para avaliar o amortecimento de uma estrutura. Como explicam Murray et al. (2016), o amortecimento de um sistema não pode ser calculado e deve ser determinado de maneira experimental utilizando técnicas de análise modal experimental que permitem a caracterização detalhada dos parâmetros modais. É possível fazer essa medição utilizando a decomposição da vibração após um ensaio de impacto de calcanhares.

Lima e Santos (2008) destacam que o amortecimento de uma estrutura depende de vários fatores como o material de que é composta, a disposição dos elementos não estruturais, as ligações entre os elementos estruturais, a técnica construtiva, entre outros. A estimativa do amortecimento só é possível em estruturas já finalizadas. Em estruturas em fase de projeto, procuram-se resultados de estruturas semelhantes em que os amortecimentos já tenham sido medidos.

Existem muitos métodos para a determinação do amortecimento por meio de experimentos físicos, mas os mais utilizados são o método do decremento logarítmico e o método da largura da banda. Sua escolha depende sobretudo da faixa de amortecimento e de frequência de vibração da estrutura.

#### **2.3.5.1 Método do decremento logarítmico**

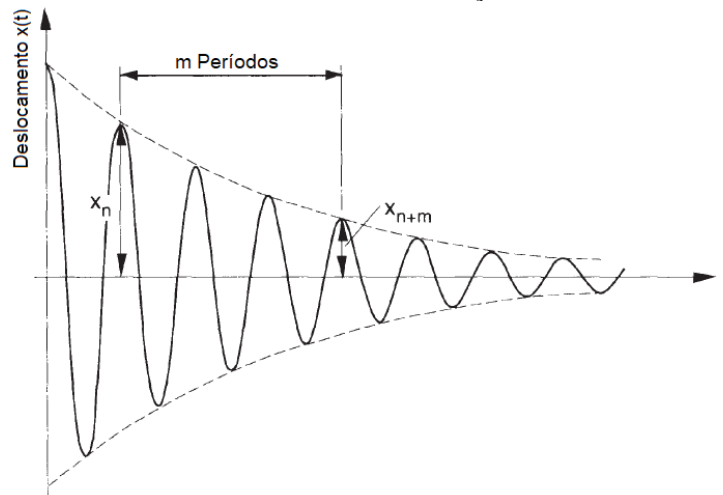
O método do decremento logarítmico é o método mais popular com respostas no domínio do tempo para mensurar amortecimento. O decremento logarítmico  $\delta$  é obtido pela razão entre duas amplitudes sucessivas do sinal decorrente de um impulso simples provocado na estrutura. Pode ser conceituado como a taxa de redução logarítmica que traduz a redução do movimento oscilatório após um impacto, através da dissipação da energia ou pela sua transferência para outras partes do sistema (SILVA, 2007). A Figura 22 mostra a curva de deslocamento de uma certa estrutura em função do tempo de amostragem.

Conforme Bachmann et al. (1995) o amortecimento pode ser estimado pela Equação (47) para um sistema com um grau de liberdade. Quanto o amortecimento é baixo ( $\zeta < 0,1$ ) a relação da Equação (48) é válida.

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \left( \frac{x_n}{x_{n+m}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (47)$$

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \quad (48)$$

Figura 22 - Resposta para um simples impulso de uma estrutura vibrando em um modo dominante de vibração



Fonte: Adaptado de Bachmann et al. (1995).

Enquanto a diminuição da amplitude de aceleração diante de uma excitação qualquer demonstra a capacidade do piso de dissipar energia, a utilização do impacto como fonte excitadora tende a excitar uma ampla gama de frequências, podendo incluir respostas de vários modos excitados. Nesse caso, pode ser adequada a utilização de filtros de frequência do tipo passa-banda nos sinais de aceleração, de maneira a selecionar uma determinada faixa de frequência para que o fator de amortecimento seja estudado de maneira mais precisa (SILVA Jr, 2015). No entanto, caso haja um modo dominante de vibração, a queda pode ser bem suave, proporcionando resultados coerentes.

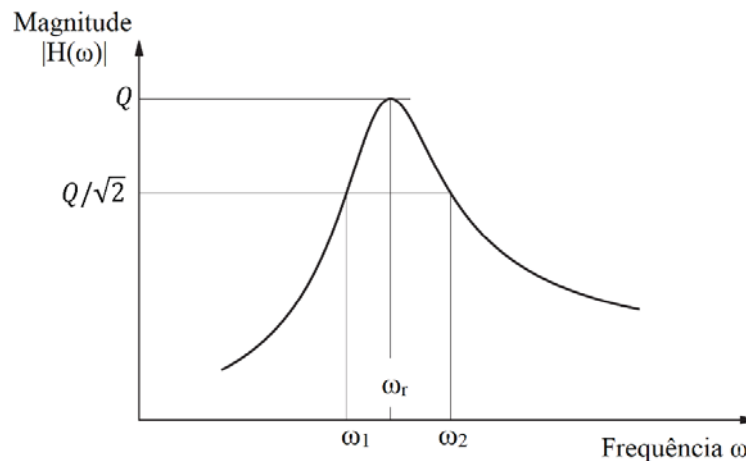
O método do decremento logarítmico é utilizado por Zhou et al. (2016) para determinação do fator de amortecimento com base nos dados coletados de aceleração a partir de um teste de impacto de calcanhares.

Cao, Qi e Li (2018), discutem os limites de serviço de um piso com grandes vãos livres em concreto protendido. Os autores realizam testes experimentais para obter as características dinâmicas do pavimento utilizando o teste de impacto dos calcanhares e impactos devido à atividade humana de correr. Para estimativa do amortecimento, o método do decremento logarítmico é aplicado, e os resultados obtidos são comparados com os critérios apresentados no AISC Design Guide #11 (Murray et al., 2016).

### 2.3.5.2 Método da largura da banda

O método da largura da banda é outra forma de cálculo do amortecimento em estruturas a partir de dados experimentais, baseado na resposta em frequência. A largura da banda é considerada a largura da curva da resposta de frequência quando a magnitude  $Q$  é  $1/\sqrt{2}$  vezes o valor do pico (SILVA, 2007). A Figura 23 apresenta o esquema para o cálculo do amortecimento por meio deste método juntamente com a Equação (49), em que a largura da banda  $\Delta\omega$  é dada pela diferença entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

Figura 23 – Determinação do amortecimento pelo método da largura da banda



Fonte: Adaptado de Silva (2007).

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \quad (49)$$

Uma das vantagens desse método é que sua aplicação é simples, e permite computar o amortecimento diretamente dos picos do gráfico da FRF ou da PSD, o que pode ser realizado em campo no pós processamento.

Barrett (2006) ressalta que o método da largura da banda é derivado a partir de curvas de frequência de pavimentos em vibração forçada, e que, por vezes, este método pode não ser adequado para métodos simplificados não referenciados (quando a força aplicada não pode ser mensurada).

Clough e Penzien (1995) explicam que a maior desvantagem do método é que o gráfico deve ser preciso em torno do pico ressonante. Assim, é necessário um bom controle de qualidade nas medições das acelerações, e uma boa resolução dos equipamentos de medição para estimativa precisa dos picos. Outra desvantagem é a dificuldade de estimar o amortecimento em modos de vibração próximos. Quando os picos de frequência estão próximos um do outro, a largura da banda pode ser distorcida pela presença dos outros picos, que tem o efeito de alargar os picos vizinhos e aumentar o valor do amortecimento estimado.

Carmona, Avila e Doz (2017) verificaram a performance de um amortecedor massa-mola no controle de vibrações excessivas em pavimentos através de um estudo numérico e experimental, com vibrações livres e forçadas em uma plataforma para testes dinâmicos. Para fins de comparação dos resultados de amortecimento com ou sem a utilização do dispositivo, utilizaram o método da largura da banda para cálculo do parâmetro modal. Da mesma forma, Zhang, Xu e Qin. (2017) propõem um modelo para representar um sistema de piso leve amortecido com ocupantes. O método visa a obter as propriedades dinâmicas que posteriormente são comparadas com resultados históricos e resultados experimentais. Para a avaliação do amortecimento os autores utilizam o método da largura da banda.

## **2.4 Método dos Elementos Finitos (MEF)**

Introduzido formalmente por Clough em 1960, o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido originalmente para análise estática de estruturas, mas desde então ampliou suas aplicações significativamente, principalmente devido ao desenvolvimento computacional. Este é um método moderno muito utilizado em simulações computacionais que permite averiguar o comportamento de sistemas submetidos a diversos fenômenos físicos, e que, devido ao seu custo e

eficiência, se tornou uma das principais ferramentas para a solução desde estruturas simples até estruturas complexas que possuem difícil solução através de métodos analíticos (SORIANO, 2009).

Este método de análise é aplicável nos mais diversos ramos da engenharia como, por exemplo, na análise do comportamento de estruturas submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos, transferência de calor, vibrações mecânicas e testes de impacto, otimização, etc.

Algumas das vantagens da utilização do método são: facilidade em modelar sistemas com formatos irregulares; lidar com diferentes tipos de carregamento sem dificuldade; modelar estruturas compostas por diferentes materiais; aplicação de diferentes tipos de restrições ao movimento em um mesmo modelo; incluir efeitos dinâmicos nos modelos analisados; estudar o comportamento não linear de sistemas e a utilização de materiais não lineares.

No MEF, uma estrutura complexa com vários graus de liberdade é representada por um número finito de elementos mais simples de resolução simplificada. Para isso, o domínio global é dividido em subdomínios menores chamados de elementos, e o procedimento de divisão da estrutura é chamado de discretização. Cada um desses elementos é muito simples e possui equações do movimento que podem ser facilmente resolvidas ou aproximadas. Os elementos possuem sua forma definida através de pontos chamados nós ou pontos nodais que conectam ele com outros elementos. O conjunto de elementos finitos e nós é chamado de malha de elementos finitos (PEPPER; HEINRICH, 2017).

A equação que existe sobre o domínio é resolvida nos pontos nodais, assumindo que o valor da função em qualquer ponto interno ao elemento pode ser definido em termos das variáveis nodais do elemento. Essas variáveis nodais são chamadas de graus de liberdade. Apesar dos elementos serem unidos por seus nós em comum, assume-se que os elementos são contínuos através das suas fronteiras, dessa forma, cada uma dessas soluções polinomiais é compatibilizada com as soluções adjacentes nos nós comuns a dois elementos. Na análise dinâmica, as soluções são reunidas, resultando em matrizes globais de massa e rigidez, que descrevem a vibração da estrutura como um todo. Os pontos nodais são referências para avaliação da função e não representam pontos físicos de conexão dentro do domínio (INMAN, 2014).

Na modelagem dinâmica de uma estrutura é muito importante o conhecimento das características da estrutura pois a complexidade dos dados de entrada requer que sejam feitas certas considerações mais complexas que aquelas feitas para uma análise linear. O modelo global precisa

conter detalhes suficientes para caracterizar as propriedades de massa e rigidez da estrutura. Análises dinâmicas por elementos finitos pode ser agrupadas em três principais categorias: (a) análise modal, que calcula as frequências naturais e modos de vibração de um sistema em vibração livre; (b) análise harmônica, que calcula a resposta de um sistema submetido à uma força senoidal; (c) análise transiente, que calcula a resposta de um sistema submetido a uma força não harmônica, variante no tempo. Nos três tipos de análise, os primeiros modos de vibração e frequências naturais podem ser obtidos com modelos menos detalhados do que para modos relacionados a frequências mais altas.

Para a construção de um modelo inicia-se com o pré-processamento onde são definidos os tipos de elementos utilizados, a malha de elementos finitos e aplicadas as condições iniciais e carregamentos. Em seguida vem a fase de solução em que os dados de entrada são colocados no formato de matrizes e resolvidos numericamente. A solução para um sistema de múltiplos graus de liberdade é governada pela Equação (13), discutida anteriormente. Por fim se dá a fase de pós-processamento, que envolve a apresentação do sistema resolvido de maneira gráfica e numérica, além de informações sobre os erros ocorridos durante a solução.

Conforme He e Fu (2001), o modelo resultante na forma de matrizes de massa e rigidez pode ser utilizado para análise e previsão de sensibilidade devido a mudanças estruturais. No entanto, devido à complexidade, não se pode esperar que o modelo em elementos finitos seja fielmente representativo. É essencial fazer medições na estrutura, derivar seu modelo modal e usá-lo para correlacionar com o modelo em elementos finitos. Os autores explicam que o modelo modal obtido pela experimentação, embora incompleto pela falta de vários modos de vibração e locais medidos, representa o comportamento dinâmico real da estrutura. Assim, ele pode ser usado para ajustar o modelo FE, caso haja discrepâncias entre eles.

Nesse caso, a calibração visa a ajustar os parâmetros de entrada do modelo dentro de intervalos confiáveis por meio de um exercício iterativo, minimizando as diferenças entre os resultados. Conforme Floden (2016), a calibração é geralmente realizada em subsistemas do modelo para isolar erros em parâmetros específicos. O primeiro passo para a calibração é a realização de uma análise de sensibilidade paramétrica para estudar os efeitos que a variação de um determinado parâmetro de entrada pode ocasionar nos resultados, utilizando uma variações nesse parâmetro.



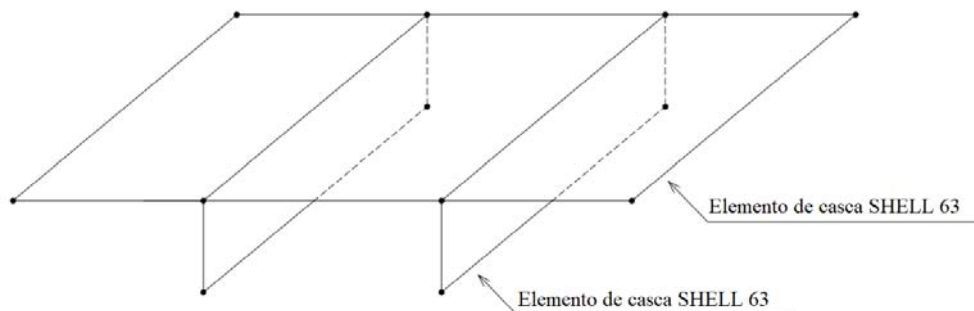
Após a calibração, há o processo de validação em que se dá a comparação entre os resultados obtidos pelo modelo numérico e aqueles obtidos por uma análise alternativa. Caso os resultados previsto coincidam de forma razoável, conclui-se que o modelo é validado.

Por último, a adequação entre as respostas originadas da análise por elementos finitos e por um segundo método é utilizada como uma medida para julgar não apenas o desempenho da calibração e da seleção do modelo, mas também a sua eficácia como uma ferramenta preditiva. Floden (2016) explica que nenhum modelo é uma representação exata de um estrutura real, no entanto, através da validação, pode-se determinar o grau de precisão que um modelo representa em relação a estrutura real, e utilizar o modelo matemático para generalização.

Com a complexidade da análise dos mais variados tipos de estrutura, pesquisadores vem buscando técnicas para representar os sistemas através de modelos computacionais que forneçam outputs confiáveis. Na área da dinâmica das estruturas, pesquisadores têm buscado a validação dos modelos através da realização de ensaios experimentais, ou através de formulações analíticas.

Dias (2003), visando a contribuir no aprimoramento da análise de lajes nervuradas, realizou um estudo numérico amplo em que verifica a consideração da excentricidade existente entre o eixo longitudinal da nervura e o plano médio da laje, utilizando o software ANSYS 5.5. O autor utiliza diversos modelos mecânicos para considerar a excentricidade: utilizando elemento finito de viga tridimensional para discretização das nervuras; utilizando modelagem tridimensional onde discretiza tanto a placa quanto as nervuras com elementos de casca; utilizando o modelo simplificado da Teoria de Placa Ortotrópica Equivalente, representando a laje através de uma laje maciça com espessura equivalente; por meio de modelo simplificado de grelha, considerando as nervuras concêntricas, com seção T equivalente. Após a análise de vários modelos diferenciados, a configuração que melhor representou a estrutura é apresentada na Figura 24.

Figura 24 - Representação esquemática do Modelo 4 de DIAS (2003)



Fonte: Adaptado de Dias (2003).

No modelo anterior, as nervuras e a laje são discretizadas por elementos de casca SHELL, elemento plano com seis graus de liberdade por nó, trabalhando à flexão e tensão, em um modelo tridimensional. Dias (2003) salienta a necessidade em se considerar a excentricidade entre as nervuras e a capa de concreto com a utilização de modelos tridimensionais mais realistas.

No estudo de vibrações, Barrett (2006) propôs um conjunto de técnicas de modelagem computacional em software de elementos finitos que auxilia na avaliação das condições de serviço em relação às vibrações para lajes do tipo *steel deck*. As técnicas incluem recomendações para representar a massa, rigidez, condições de apoio e fatores de amortecimento para sistemas de piso. Os modelos foram validados utilizando resultados obtidos por uma análise modal experimental.

Davis (2008) utilizou o MEF para estudar as vibrações em pisos de baixa frequência, visando a apresentar três métodos simples para utilização na fase de projeto de avaliação das vibrações em edificações. Os três métodos buscam prever os parâmetros de frequências naturais, modos de vibração, magnitude da aceleração e resposta ao caminhar humano nos sistemas estudados. O autor realizou a validação dos modelos através das respostas obtidas por uma análise modal detalhada e então comparou os resultados com limites de conforto e segurança em estruturas. Tratando das propriedades modais, o autor afirma que os métodos desenvolvidos através da análise por elementos finitos são capazes de prever corretamente as frequências naturais das amostras de forma acurada.

Cabe citar também diversos trabalhos como: Braido e Pravia (2015), que utilizaram a modelagem computacional como forma de validação de resultados experimentais, obtidos com a utilização de celulares e acelerômetros, de parâmetros de vibração em pontes de concreto; Kralik e Kralik Jr. (2017) estudaram o problema de vibrações do ponto de vista do conforto humano em edifícios altos utilizando análise experimental e simulações numéricas com software comercial ANSYS através do qual são feitas análises determinísticas e probabilísticas; Allahyari et al. (2018) utilizaram técnicas de análise modal experimental e modelos em elementos finitos para fazer comparações entre as propriedades dinâmicas de lajes *steel deck* de concreto normal e leve; Casagrande et al. (2018), através de dois estudos de caso, comparam a performance de lajes compósitas de concreto e madeira (TCC) e lajes de madeira laminada colada (CLT) utilizando abordagens analíticas, numéricas e experimentais.

## **2.5 Critério de Aceitabilidade dos Níveis Vibratórios em Estruturas de Concreto**

Buscando atender desempenho estrutural e para que o conforto humano seja assegurado nas edificações, ao longo dos anos foram criados vários critérios que estabelecem níveis máximos de vibrações para os diversos ambientes de uma edificação, garantindo condições mínimas aceitáveis em serviço. As normas e guias atuais quantificam os níveis de vibração principalmente em termos de aceleração de pico, aceleração RMS e frequência natural.

Bachmann e Ammann (1987) dividem os critérios de vibrações em edificações em três categorias: critérios estruturais, critérios fisiológicos e critérios de produção. Pelo fato das estruturas estudadas tratarem-se de ambientes residenciais, as duas primeiras situações são de principal interesse nesse trabalho.

No primeiro caso, as vibrações induzidas por atividades humanas, tráfego de veículos, maquinário, entre outros, podem causar tensões e deformações nos elementos estruturais e não estruturais das edificações. No entanto, vibrações contínuas podem causar também problemas de fadiga e sobrecarga dos elementos estruturais.

Já os critérios fisiológicos tratam do efeito das vibrações considerando o conforto dos ocupantes. A sensibilidade humana às vibrações é um assunto complexo que depende de uma série de circunstâncias como, por exemplo, o posicionamento da pessoa, o tipo de atividade que causa vibração, frequência e duração da exposição, grau de amortecimento da estrutura, e por esse fato há uma série de publicações que visam a estabelecer limites aceitáveis que proporcionem bem-estar humano. A seguir são apresentados os principais critérios abordados no estudo de vibrações nas edificações.

### **2.5.1 ABNT NBR 6118 (2014): projeto de estruturas de concreto**

Tradando-se de critérios estruturais, os efeitos das vibrações podem causar tensões e deformações não somente nos elementos estruturais, mas principalmente nos elementos não estruturais em edificações. As vibrações contínuas podem conduzir ainda, a problemas de fadiga e sobrecarga nos elementos mais solicitados.

A ABNT NBR 6118 (2014) busca atender o desempenho estrutural em serviço no que tange vibrações em estruturas, através da definição de uma frequência fundamental mínima. Para isso, recomenda manter a frequência natural  $f_n$  da estrutura o mais afastada possível da frequência crítica  $f_{crit}$ , que depende da ocupação e do tipo de excitação o qual o pavimento é exposto. A condição mínima sugerida é definida a Equação (50).

$$f_n > 1,2 f_{crit} \quad (50)$$

Os valores apresentados na Tabela 2 podem ser adotados para a frequência crítica na falta de valores experimentais.

Tabela 2 – Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas.

Caso	$f_{crit}$ (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014, p.193).

Em casos especiais, pode não ser suficiente afastar a frequência natural da estrutura da frequência crítica de cada ambiente, tornando-se necessário aumentar a massa ou o amortecimento modal da estrutura para que parte da energia envolvida seja absorvida. Nesse caso, a norma recomenda que seja feita uma análise dinâmica mais precisa das condições do pavimento.

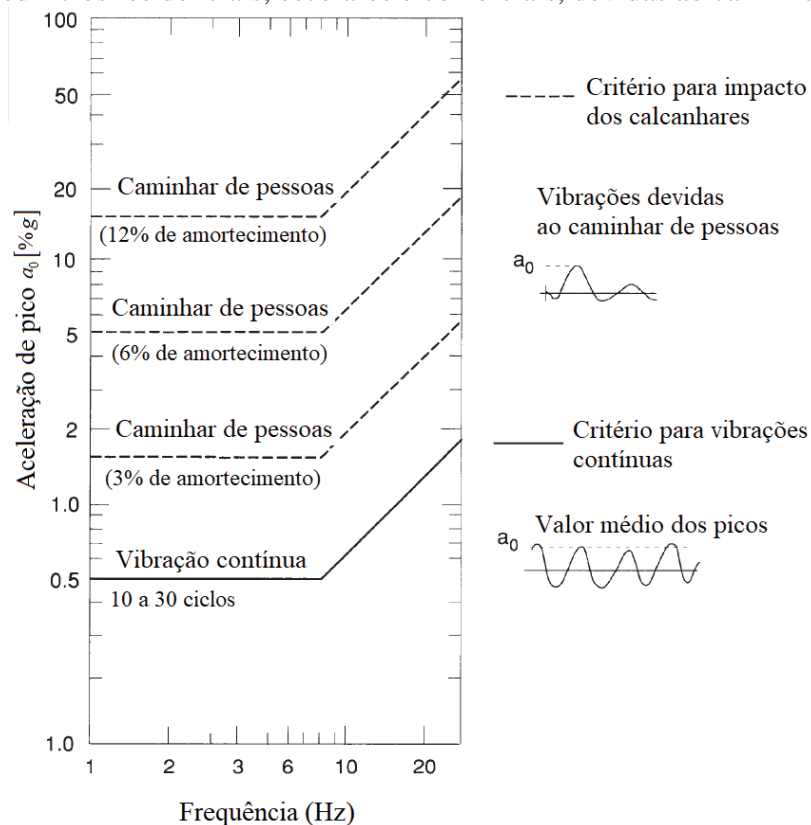
### 2.5.2 ABNT NBR 8800 (1986): projeto e execução de estruturas de aço em edifícios

Quanto aos efeitos fisiológicos, o efeito das vibrações nos seres humanos é um assunto complexo pois depende de uma série de circunstâncias (como idade, sexo, tempo de exposição, etc.) que podem variar de pessoa para pessoa ou até mesmo entre ambientes. Muitas normas e guias tem tentando encontrar critérios realísticos que diminuam os efeitos das vibrações nos seres humanos.

A ABNT NBR 8800 (1986), no Anexo N, trata dos estados limites de utilização relacionados as vibrações em pisos. Embora a norma tenha sido atualizada em 2008, esta aborda o

assunto de maneira mais superficial não trazendo limites bem definidos. Com base na amplitude da aceleração de pico obtida através de ensaios experimentais, estabelece a frequência natural de pisos para vibrações contínuas e para vibrações transientes decorrentes do caminhar de pessoas, associadas a fatores de amortecimento. A Figura 25 oferece um limite médio de percepção em termos de aceleração de pico que pode ser utilizado para aproximação para um limite de desconforto de projeto em casos de residências, escolas e escritórios. A norma sugere que em lugares onde se requer maior nível de concentração, como em salas de cirurgia e laboratórios, o limite da aceleração de pico deve ser mais baixo. Já em ocupações industriais o limite pode ser maior.

Figura 25 - Limites de desconforto (em termos de aceleração de pico) causado por vibrações em pisos de edifícios residenciais, escolares e comerciais, devidas ao caminhar humano



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 8800 (1986).

Em pisos residenciais leves ou naqueles que possuem grandes vãos livres, as vibrações contínuas oriundas das atividades humanas podem significar um problema, uma vez que as pessoas são capazes de produzir forças periódicas com frequências no intervalo de aproximadamente 1Hz a 4Hz, e, portanto, frequências naturais de pisos inferiores a 5Hz devem ser evitadas. A situação é

agravada quando o pavimento é submetido a atividades muito repetitivas, podendo resultar em ressonância. Nesses casos é recomendável que a frequência natural mínima seja de 10Hz, exceto se houver bastante amortecimento.

Além das vibrações contínuas, as vibrações transientes oriundas do impacto do caminhar humano ocorrem frequentemente nos sistemas de pisos causando vibrações indesejadas onde há pouco amortecimento, como em residências, escolas e escritórios. As lajes de concreto mais sensíveis são aquelas com vigas de vão entre 7,5 m e 20 m e frequências naturais entre 4 Hz e 15 Hz. Nesses pisos, as divisórias, quando localizadas adequadamente, proporcionam amortecimento suficiente para evitar vibrações excessivas. As vibrações podem representar um problema em construções sem divisórias ou com baixo amortecimento.

A norma comenta que a obtenção da frequência natural e amortecimento pode ser realizada através de um teste de impacto dos calcanhares e caso não seja possível realizar ensaios experimentais, a frequência fundamental deve ser estimada através da Equação (51) para sistemas simplesmente apoiados com vigas em uma só direção.

$$f_n = 1,57 \sqrt{\frac{EI_r}{mL^4}} \quad (51)$$

$f_n$  : frequência natural;

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal do aço (MPa);

$I_r$  : momento de inércia da seção do concreto transformada (mm<sup>4</sup>);

$L$  : vão da viga (mm);

$m$  : massa da seção considerada, por unidade de comprimento, ao longo do vão.

Em relação à estimativa do amortecimento, pisos em aço e concreto não mistos, sem divisórias, possuem amortecimento de 3% a 4% do amortecimento crítico. Já em pisos mistos com interação total, o amortecimento será de 2% do amortecimento crítico. Acabamentos de pisos, tapetes, mobílias, e outros componentes, podem aumentar 3% ou mais o amortecimento. Disposição de divisórias, tanto acima quanto abaixo do piso, proporcionam amortecimento mais eficiente, especialmente se colocadas em ambas as direções. As divisórias colocadas sobre apoios, ou paralelas às vigas de apoio da laje e distanciadas entre si mais do que 6 m, podem não ser

eficientes, porque as linhas nodais de vibração formam-se sob as próprias divisórias (ABNT NBR 8800, 1986). Na Tabela 3, são indicados os valores de cálculo para o amortecimento.

Tabela 3 – Amortecimento dos pisos em percentual do amortecimento crítico.

Tipo de Piso	Amortecimento em percentual do crítico
Piso não acabado	3%
Piso acabado (incluindo revestimentos, forro, dutos e mobiliário)	6%
Piso acabado com divisórias	12%

Fonte: ABNT NBR 8800 (1986, p.111).

A norma recomenda que a aceleração de pico, na falta de dados experimentais, pode ser determinada pelas Equação (52) para concreto normal, e pela Equação (53) para concreto leve, expressas em razão da aceleração da gravidade.

$$a_o = \frac{68800 f_n}{L.t(t + 25,4)} \quad (52)$$

$$a_o = \frac{88500 f_n}{L.t(t + 25,4)} \quad (53)$$

$f_n$  : frequência (Hz);

$L$  : vão (m);

$t$  : espessura efetiva da laje de concreto (mm).

### 2.5.3 AISC Design Guide #11 (2016) – vibrations of steel-framed structural systems due to human activity

Entre os critérios para determinar o conforto dos ocupantes diante das vibrações, a norma ISO 2631-2 (1989) apresenta uma curva base de limite de aceleração RMS, a partir do qual são utilizados fatores de multiplicação em função do tipo de edificação e sua ocupação. O guia AISC Design Guide #11 (Murray et al., 2016), um guia vastamente utilizado na América do Norte e em diversos outros países, sugere limites a partir dessas curvas base, apresentando as curvas já com os fatores de multiplicação aplicados, conforme observado na Figura 26, em termos de aceleração de pico.

Por exemplo, para um limite de aceleração de pico de 0,5%  $g$  é utilizado para escritórios e residências com frequências na faixa de 4,0 a 8,0 Hz. A ISO 2631-2, em sua versão atualizada de 2003, não traz limites bem definidos para as vibrações, e por esse motivo não é abordada nesse trabalho.

Para prever a aceleração máxima de um pavimento diante da atividade do caminhar, o AISC Design Guide #11 (Murray et al., 2016) traz um método de cálculo manual simplificado em pisos de baixa frequência ( $f_n < 9,0$  Hz), que são os que podem causar maior desconforto ao usuário. A avaliação resulta da comparação entre a aceleração máxima do pavimento, com os limites de conforto mostrados na Figura 26, como uma razão da aceleração gravitacional. A comparação é representada pela desigualdade da Equação (54).

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_o e^{-0,35 f_n}}{\beta \cdot W} \leq \frac{a_0}{g} \quad (54)$$

$a_p/g$  : razão entre a aceleração do piso e a aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );

$a_0/g$  : aceleração limite recomendada de acordo com a curva limite (%g);

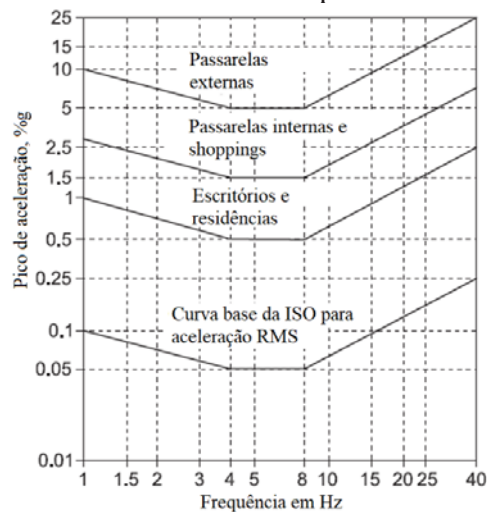
$P_o$  : amplitude da força em lb. Depende da tipologia do piso;

$f_n$  : frequência natural fundamental do sistema (Hz);

$\beta$  : fator de amortecimento modal;

$W$  : massa efetiva do pavimento (kN).

Figura 26 - Limites de tolerância para conforto humano



Fonte: Adaptada de Murray et al. (2016).



Da Equação (54),  $P_o = 0,83RQ$ .  $Q$  representa o peso do corpo humano (valor recomendado de 157 lb.), e  $R$  é um fator de redução com valor de 0,5 para estruturas de piso para formas modais bidirecionais e 0,7 para formas modais unidirecionais.

O lado esquerdo da equação representa a aceleração de pico computada dentro de uma área devido ao caminhar humano, expressa como uma fração da aceleração gravitacional. O lado direito representa o nível de tolerância à aceleração de pico, também expressa como uma fração da aceleração gravitacional. Na falta de valores de  $\beta$ , pode-se utilizar a Tabela 4 para o cálculo acumulativo do fator de amortecimento.

Tabela 4 – Valores recomendados de fator de amortecimento

Componente	$\beta$
Sistema estrutural	0,01
Forro e sistemas de duto	0,01
Escritórios	0,005-0,01
Igrejas, escolas e shoppings	0,02
Paredes de dry wall	0,02 – 0,05*

\*Depende do número de divisórias e sua localização. Próximas ao centro da laje proporcionam maior amortecimento.

Fonte: Adaptado de Murray et al. (2016).

Pisos com frequência ( $f_n > 9,0$  Hz) não sofrem ressonância devido ao caminhar humano. A resposta ao caminhar assemelha-se a uma série de impulsos correspondentes a passos individuais. O critério a ser satisfeito para esses pisos é dado pela Equação (55).

$$\frac{a_{ESPA}}{g} \leq \frac{a_0}{g} \quad (55)$$

Da equação anterior, a aceleração  $a_{ESPA}$  é chamada aceleração de pico equivalente. Os limites apresentados pelo guia são expressos em termos de amplitudes senoidais o que requer que a aceleração de pico  $a_p$  seja convertida. Para isso primeiro define-se a resposta senoidal correspondente a um passo, computa-se a aceleração RMS da onda e então multiplica-se a aceleração RMS por  $\sqrt{2}$ , que é a razão entre a aceleração de pico e aceleração RMS. Assim,  $a_{ESPA}$  é dada pela Equação (56) em que  $h$  representa o harmônico da frequência do passo que coincide com a frequência natural (Tabela 5).

$$\frac{a_{ESPA}}{g} = \left( \frac{154}{W} \right) \frac{f_{step}^{1.43}}{f_n^{0.3}} \sqrt{\frac{1 - e^{-4\pi h\beta}}{h\pi\beta}} \quad (56)$$

Tabela 5 – Harmônico do passo coincidindo com a frequência natural em pisos de alta frequência

$f_n$ (Hz)	$h$
9,0 – 11,0	5
11,0 – 13,2	6
13,2 – 15,4	7

Fonte: Adaptado de Murray et al. (2016).

Esse critério é recomendado para pisos com frequência natural fundamental entre 9,0 e 15,0 Hz. Os autores comentam que não há registros de vibrações que causem desconforto aos seres humanos em pisos com frequência superior a 15,0 Hz.

#### 2.5.4 PCI Design Handbook (2004) – precast and prestressed concrete

Este é um guia norte americano que oferece limites para a consideração das vibrações em pavimentos em termos de uma frequência natural mínima, fator que depende da aceleração de pico (em razão da aceleração gravitacional), massa do pavimento, condições de apoio, ambiente em que a vibração ocorre, interação entre os elementos estruturais e o grau de amortecimento.

Os guia fornecem uma fórmula empírica baseada nos efeitos ressonantes da atividade de caminhar para determinar a frequência natural mínima do sistema de piso necessária para prevenir vibrações indesejadas, conforme Equação (57).

$$f_n \geq 2.86 \left[ \ln \left( \frac{K}{\beta W} \right) \right] \quad (57)$$

$\beta$  : fator de amortecimento;

$W$  : massa do pavimento (kN).

A Tabela 6 fornece valores recomendados pela literatura para a constante  $K$ , e valores para o amortecimento  $\beta$  para utilização na Equação (57), ou para fins de comparação com valores experimentais.

Tabela 6 – Valores de  $K$  e  $\beta$  para uso na Equação (57)

Ambientes afetados pelas vibrações	$K$	$\beta$
		0.02 <sup>a</sup>
Escritórios, Residências, Igrejas	58	0.03 <sup>b</sup>
		0.05 <sup>c</sup>
Shopping Centers	20	0.02
Passarelas externas	8	0.01

a. Para pavimentos com poucos ou nenhum componentes não estruturais ou mobiliário, áreas abertas e igrejas;  
b. Para pavimentos sem elementos não estruturais ou mobiliários, cubículos;  
c. Em pavimentos com divisórias até o teto.

Fonte: PCI (2004).

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Neste tópico é apresentada a metodologia utilizada para a realização dos ensaios dinâmicos experimentais de vibração, do cálculo manual simplificado pelas formulações para placas isotrópicas e ortotrópicas, da modelagem computacional em software de elementos finitos, e demais procedimentos para o desenvolvimento da pesquisa. Apresenta-se também uma breve descrição dos equipamentos e ferramentas utilizados, e a forma de processamento dos resultados.

#### 3.1 Características dos Sistemas de Pisos

Para realização da pesquisa, foram selecionados dois sistemas de piso em concreto armado: lajes nervuradas e lajes pré-moldadas treliçadas.

Foram levantados os materiais, sistemas construtivos e propriedades estruturais de cada uma das edificações, as características geométricas de cada uma das lajes, e a utilização de cada sistema de piso, objetivando identificar parâmetros indispensáveis para caracterização das estruturas e avaliar os níveis perceptíveis de vibração. Essas propriedades são apresentadas nos itens a seguir.

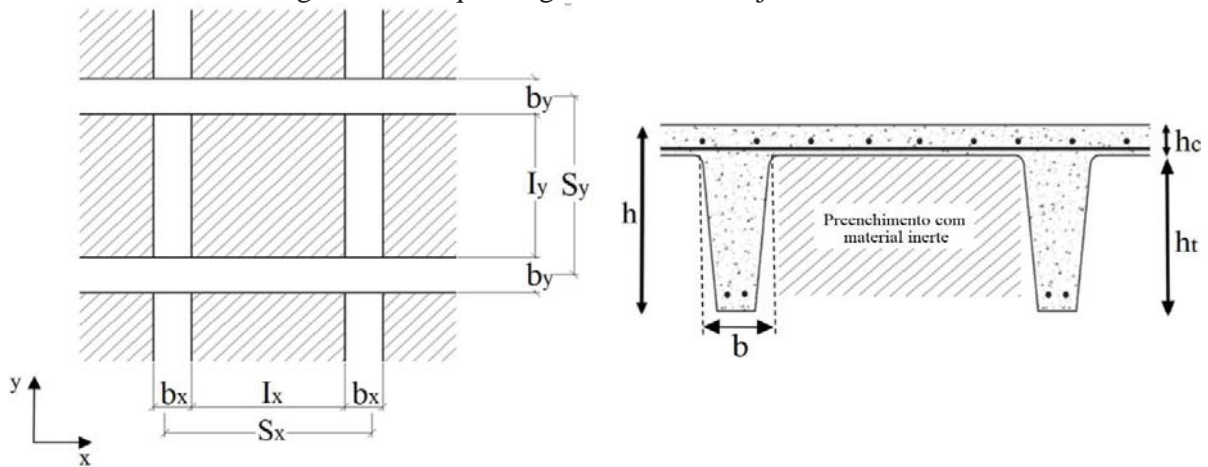
##### 3.1.1 Lajes nervuradas (LN)

Nessa pesquisa, 26 lajes nervuradas foram selecionadas para realização dos ensaios experimentais, cálculos analíticos e modelagens numérica. Essas lajes pertencem a três diferentes edificações e foram designadas com a terminologia LN, enumeradas por ordem de amostragem.

A Figura 27 representa a terminologia utilizada na descrição das principais dimensões das lajes nervuradas.

As lajes nervuradas possuem nervuras com altura  $h_t$  nas duas direções, sobre as quais há uma camada de concreto com espessura  $h_c$ . O espaçamento entre os eixos das nervuras é designado por  $S$ , a largura das nervuras é representada por  $b$ , e  $h$  é a altura final da laje. Como todas as lajes nervuradas são simétricas nas direções  $x$  e  $y$ , as dimensões  $S$ ,  $b$  e  $l$  são as mesmas nos dois sentidos.

Figura 27 - Esquema geométrico das lajes nervuradas



Fonte: Autor.




As lajes LN01 a LN10 são lajes de um pavimento tipo, pertencentes ao Edifício 1. Esta edificação estava em construção, em fase de acabamentos. Os pisos cerâmicos já haviam sido aplicados e o pavimento possui divisores de ambiente em drywall. A resistência característica do concreto  $f_{ck}$  é de 30,0 MPa e os espaços entre as nervuras foram preenchidos com EPS.

As lajes LN11 a LN21 pertencem a dois pavimentos que compõem um apartamento duplex, não ocupado, no Edifício 2. O  $f_{ck}$  do concreto utilizado nas lajes é de 25,0 MPa e o material de preenchimento dos espaços entre as nervuras é EPS.

As lajes LN22 a LN26 são lajes localizadas no Edifício 3, destinadas à utilização como salas de aula. A edificação já está em uso e as lajes são ocupadas por mesas e cadeiras escolares, pesando cerca de 5,0 kgf/m<sup>2</sup>, conforme informações do fabricante. A resistência do concreto  $f_{ck}$  é de 25,0 Mpa, e os espaços entre as nervuras são preenchidos com EPS.

A Tabela 7 traz as vinculações das lajes nervuradas, definidas de acordo com o item 3.4. Na tabela, S representa borda simplesmente apoiada e C borda engastada. As dimensões que compõem a geometria também são apresentadas, assim como as alturas equivalentes  $h_e$  calculadas através do método usual, por meio da Equação (1). Esses aspectos podem ser observados também no Apêndice C.

Tabela 7 – Resumo das características geométricas das lajes nervuradas (dimensões em cm)

	Laje	Condição de apoio	$L$	$B$	$S$	$b$	$h_t$	$h_c$	$h$	$h_e = (12I/S)^{1/3}$
	LN01	S-C-S-S	633,0	303,0						
	LN02	S-C-C-C	888,5	488,0						
	LN03	S-C-S-C	1090,5	363,0						
	LN04	S-C-S-C	701,5	491,5						
	LN05	S-C-C-C	671,5	369,5						
	LN06	S-C-S-C	861,0	303,0	65,0	7,0	21,0	5,0	26,0	16,24
	LN07	C-C-S-S	1004,5	488,0						
	LN08	S-C-S-S	1004,5	382,5						
	LN09	S-C-S-C	421,0	353,0						
	LN10	S-C-C-C	639,5	419,0						
	LN11	S-C-S-C	408,0	363,0						
	LN12	S-C-S-C	408,0	318,0						
	LN13	S-C-C-C	339,0	188,0						
	LN14	C-C-C-C	353,0	338,0						
	LN15	S-C-C-C	473,0	353,0						
	LN16	S-C-S-S	338,0	210,0	59,0	9,0	12,0	5,0	17,0	11,21
	LN17	S-C-S-S	218,0	128,0						
	LN18	S-C-S-C	408,0	318,0						
	LN19	C-C-C-C	353,0	338,0						
	LN20	S-C-S-C	353,0	201,5						
	LN21	S-C-S-S	338,0	218,0						
	LN22	S-C-S-S	1252,0	805,0						
	LN23	S-C-S-C	965,0	805,0						
	LN24	S-C-S-S	960,0	805,0	60,0	10,0	15,0	5,0	20,0	13,54
	LN25	S-C-S-S	965,0	805,0						
	LN26	S-C-S-C	960,0	805,0						

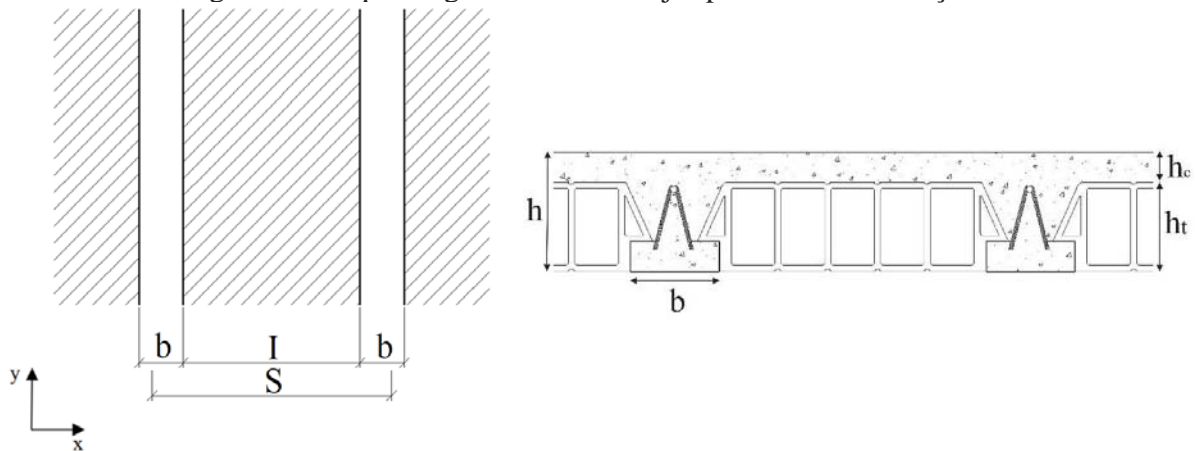
Fonte: Autor.

### 3.1.2 Lajes pré-moldadas treliçadas (LP)

Os procedimentos para realização da pesquisa foram efetuados também em 26 lajes pré-moldadas compostas por vigotas treliçadas e material inerte de enchimento. As lajes compõem os sistemas de piso de três diferentes edificações e foram designadas com a terminologia LP, enumeradas em ordem sequencial por amostragem.

A Figura 28 representa a terminologia utilizada na descrição das principais dimensões das lajes.

Figura 28- Esquema geométrico das lajes pré-moldadas treliçadas



Fonte: Autor.

Nessas lajes, as vigotas pré-moldadas treliçadas são distribuídas em uma direção (geralmente na direção do vão menor  $B$ ) e concretadas monoliticamente com uma capa de concreto superior às nervuras com espessura  $h_c$ . O espaçamento entre os eixos das nervuras é dado por  $S$ , a largura das nervuras é representado  $b$ , e  $h$  é a altura final da laje.




As lajes LP01 a LP07 são lajes de um pavimento tipo, no Edifício 4. Esta é uma edificação finalizada e não havia nenhum tipo de ocupação durante as medições. O espaçamento entre as vigotas é preenchido com lajota cerâmica. O concreto utilizado possui resistência característica  $f_{ck}$  de 20,0 MPa.

As lajes LP08 a LP22 pertencem ao Edifício 5. Os elementos de enchimento são em EPS, e as lajes são executadas com concreto com  $f_{ck}$  de 25,0 MPa. Entre estas, a laje LP15 é uma laje com altura maior que as demais, utilizando treliças e capa de concreto com dimensões diferenciadas.

As lajes LP23 a LP26 pertencem ao Edifício 6, e são lajes de um pavimento em construção, com o contrapiso finalizado. O espaçamento entre as vigotas é preenchido com EPS, e o concreto utilizado possui resistência característica  $f_{ck}$  de 25,0 MPa. Entre estas, a laje LP23 possui altura maior que as demais, com treliças e capa de concreto com dimensões diferenciadas.

A Tabela 8 apresenta um resumo das características geométricas das lajes pré-moldadas treliçadas e valores das alturas equivalentes  $h_e$  calculadas pelo método usual. As condições de apoio dessas lajes podem ser observadas no Apêndice D.

Tabela 8 – Resumo das características geométricas das lajes pré-moldadas treliçadas (dimensões em cm)

	Laje	Condição de apoio	$L$	$B$	$S$	$h_t$	$h_c$	$h$	$h_e = (12I/S)^{1/3}$
 <p><b>Edifício 4</b> 42 9,43</p>	LP01	S-C-S-S	517,0	331,0					
	LP02	S-C-S-S	266,0	246,0					
	LP03	S-C-S-S	317,0	295,0					
	LP04	S-C-S-S	310,0	185,0	42,0	8,0	4,0	12,0	9,43
	LP05	C-C-S-S	326,5	256,0					
	LP06	C-C-S-S	404,0	326,5					
	LP07	S-C-S-S	358,5	336,0					
 <p><b>Edifício 5</b> 49 15,10</p>	LP08	S-C-S-S	696,0	527,5					
	LP09	C-C-S-S	716,0	665,0					
	LP10	S-C-S-S	696,0	527,5					
	LP11	C-C-S-S	866,0	432,5	49,0	16,0	4,0	20,0	15,10
	LP12	S-C-S-S	671,0	562,5					
	LP13	S-C-S-S	671,0	562,5					
	LP14	S-C-S-S	921,0	452,5					
	LP15	C-C-S-S	866,0	867,5	49,0	20,0	5,0	25,0	18,87
	LP16	S-C-S-S	921,0	452,5					
	LP17	S-C-S-S	889,0	457,0					
	LP18	C-C-S-S	389,5	386,0					
 <p><b>Edifício 6</b> 49 10,22</p>	LP19	C-C-S-S	482,5	519,5	49,0	16,0	4,0	20,0	15,10
	LP20	C-C-S-S	540,0	333,0					
	LP21	C-C-S-S	543,5	540,0					
	LP22	C-C-S-S	500,5	305,5					
	LP23	S-C-S-S	340,0	196,0	49,0	16,0	5,0	21,0	16,45
	LP24	S-S-S-S	434,0	389,0					
	LP25	S-S-S-S	200,0	191,0	49,0	8,0	5,0	13,0	10,22
	LP26	S-S-S-S	230,0	121,0					

Fonte: Autor.

### 3.2 Descrição dos Procedimentos Metodológicos

O presente trabalho conta com a análise experimental, analítica e numérico computacional de lajes nervuradas e pré-moldadas, estimando seus parâmetros modais de frequência natural e amortecimento.

Primeiramente, foram utilizadas técnicas de análise dinâmica experimental por meio de ensaios de impacto para o registro da aceleração das lajes. Esse parâmetro permitiu a obtenção das frequências naturais e dos amortecimentos. O procedimento iniciou-se com um ensaio de impacto



dos calcanhares, e, utilizando um acelerômetro e um dispositivo de celular, obteve-se a aceleração no domínio do tempo. Com os dados de aceleração foram obtidas as frequências naturais, pela transformada de Fourier.

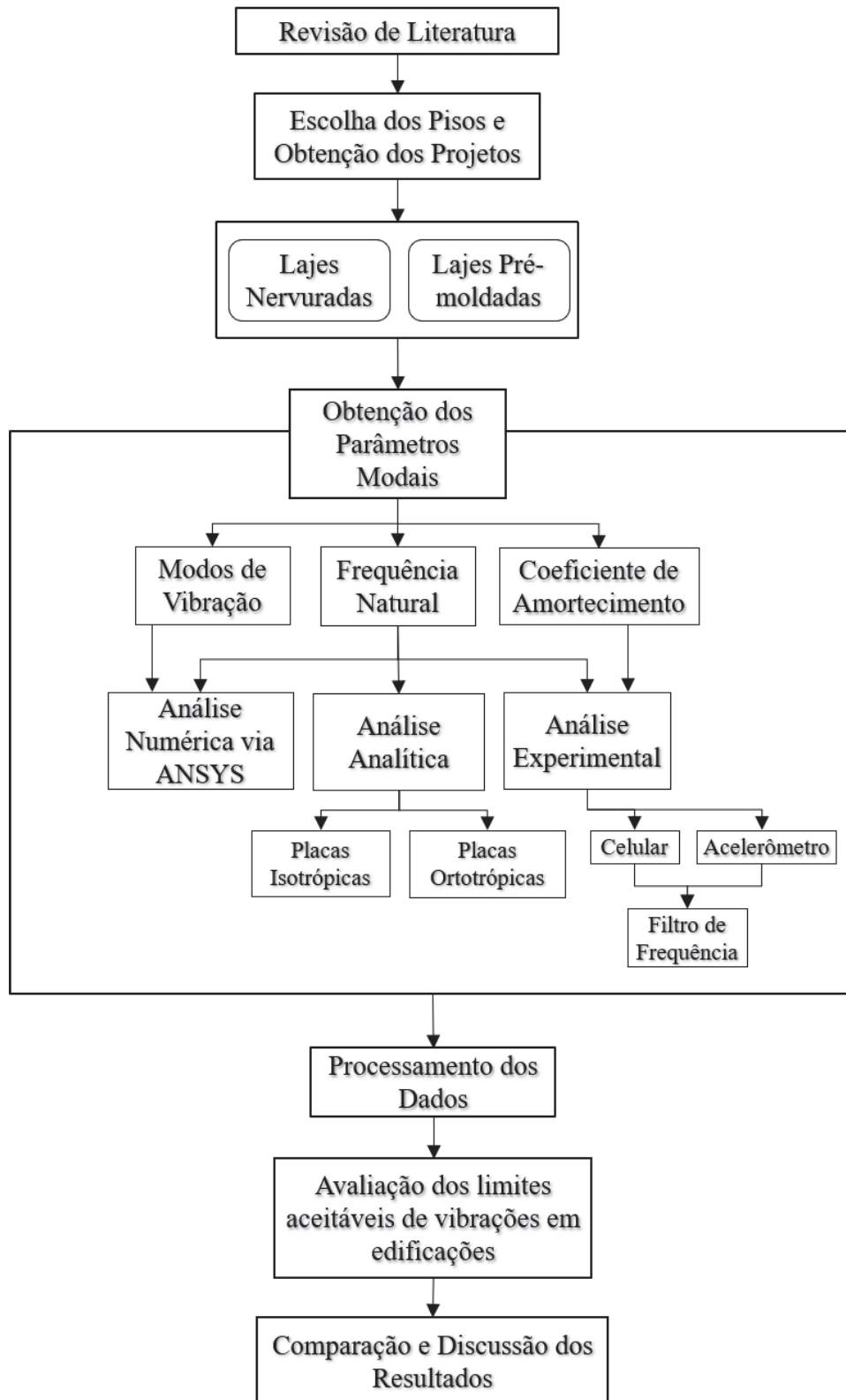
Os fatores de amortecimento foram obtidos a partir dos resultados experimentais obtidos pelo acelerômetro, com a utilização do método do decremento logarítmico e do método da largura da banda. A fim de avaliar as vantagens da utilização de filtros de frequência na obtenção dos fatores de amortecimento, os dados de aceleração foram passados em filtros de frequência. Nos estudos de vibrações é comum a utilização de filtros de frequência para retirar ruídos presentes no sinal ou para estudar os fatores de amortecimento em determinada banda de frequência de maneira mais acurada.

As frequências naturais para os dois sistemas de piso foram também obtidas através do cálculo manual, pelas equações simplificadas para lajes isotrópicas e ortotrópicas descritas no item 2.2.6. Para isso, primeiramente as lajes foram transformadas em lajes maciças de espessura constante e inércia equivalente, o que permitiu o cálculo das frequências naturais pelas formulações para lajes isotrópicas, que considera a suposição de placas finas com espessura uniforme. Posteriormente o cálculo das frequências foi realizado utilizando as considerações para lajes ortotrópicas, por meio das equações para grelhas e lajes com enrijecedores unidirecionais.

Por fim, foram desenvolvidos os modelos computacionais utilizando elementos de casca das lajes em estudo, que permitiram a validação das frequências naturais experimentais e analíticas, e a obtenção dos modos de vibração.

Apresentam-se discussões dos parâmetros obtidos por meio dos métodos experimentais, numéricos e analíticos, e são abordados aspectos relevantes sobre os fatores de amortecimento e modos de vibração das estruturas. Com base nos resultados, as lajes são avaliadas conforme os limites aceitáveis de vibrações em estruturas apresentados na revisão da literatura. A Figura 29 mostra o fluxograma com as etapas para o desenvolvimento da pesquisa.

Figura 29 - Fluxograma com as etapas da pesquisa



Fonte: Autor.

### 3.3 Procedimento Experimental

Para obter as características dinâmicas dos sistemas é preciso excitar a estrutura através de um carregamento dinâmico, e registrar sua resposta por meio de um sistema de aquisição de dados. A seguir são descritos os equipamentos utilizados na aquisição da resposta, o processo de excitação da estrutura e o processamento dos dados.

#### 3.3.1 Equipamentos de medição

Para obter as respostas da estrutura foram utilizados dois tipos de dispositivo: um acelerômetro e um aparelho de celular.

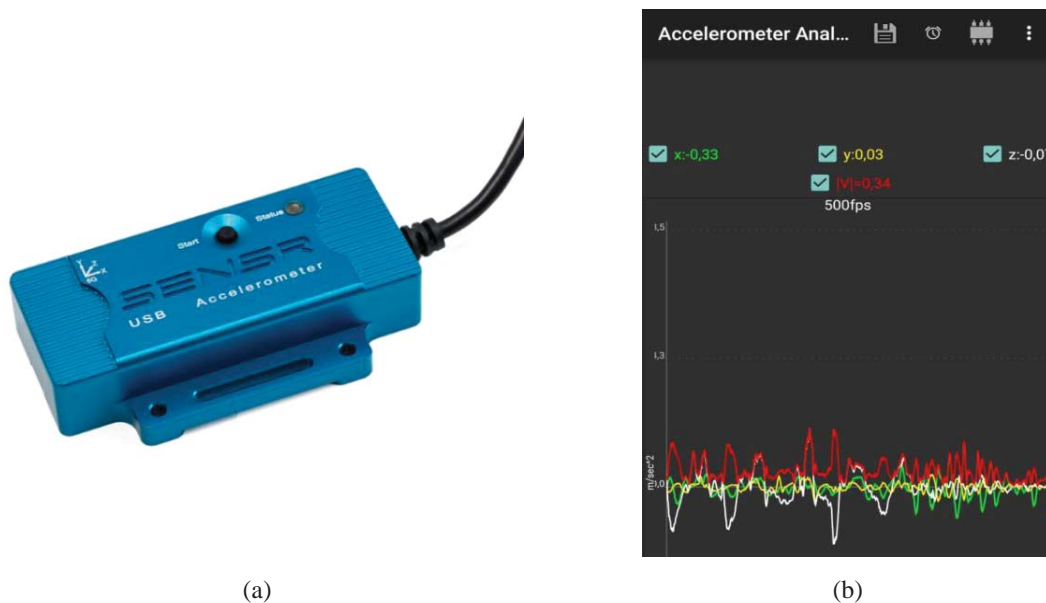
O primeiro dispositivo consiste em um acelerômetro baseado em sistemas Microeletromecânicos (MEMS) da marca SENSR modelo GP2Lx. Este é um equipamento de alta sensibilidade, que permite detectar, monitorar e registrar movimentos nos três eixos das coordenadas, possui taxa de amostragem de 400 amostras por segundo, e quatro intervalos programáveis de 1,5, 2,0, 4,0 e 6,0 g. A grande vantagem de sua utilização é que os sensores, o condicionador e amplificador de sinal e a central de aquisição de dados encontram-se em um único equipamento. O acelerômetro SENSR usa uma conexão USB para transmitir os dados diretamente para o computador, o que torna os testes experimentais mais rápidos e de fácil execução. O equipamento é fixado na estrutura e o cabo USB conectado ao computador, através do qual são transmitidas as respostas de vibração no domínio do tempo. O sistema funciona juntamente com um software que permite visualizar, gravar, analisar e exportar as respostas que também podem ser observadas em tempo real.

O segundo dispositivo consiste em um celular com sistema operacional Android, que possui sensor de acelerômetro, um sensor sensível que relata as vibrações do dispositivo. Entre uma infinidade de aplicativos existentes no mercado, o aplicativo *Accelerometer Analyser*, instalado no dispositivo móvel, mediu as vibrações em tempo real, obtendo-se as respostas triaxiais de aceleração em  $m/s^2$ , permitindo o salvamento desses dados. O acelerômetro do celular utilizado possuía taxa de amostragem de 500 amostras/segundo, dados estes fornecidos pelo próprio aplicativo, que exporta os sinais no formato “.txt”.

Cahill et al. (2019) realizaram um estudo comparativo entre doze aplicativos de celular para monitoramento de vibrações em estruturas. Através do estudo os autores mostraram que, em todos os aplicativos testados, a resposta dominante em frequência corresponde a frequência de excitação que o celular foi submetido. Dessa forma, o aplicativo *Accelerometer Analyser* foi escolhido por ser do mesmo fabricante de um dos aplicativos que mostrou menor erro nos resultados no domínio do tempo mostrados nesse trabalho.

O acelerômetro GP2Lx USB e a interface do aplicativo instalado no dispositivo móvel podem ser observados na Figura 30 (a) e (b), respectivamente.

Figura 30 – Sistemas utilizados para a coleta de sinais: (a) Acelerômetro GP2Lx USB e (b) Interface do aplicativo Accelerometer Analyser



Fonte: Autor.

Os dois dispositivos foram fixados nos pontos escolhidos com fita dupla face superadesiva para evitar que os mesmos se deslocassem durante os ensaios experimentais. O registro do sinal iniciou-se com a estrutura em repouso e, alguns segundos após o impacto, o registro foi interrompido quando julgou-se que a estrutura havia retornado ao repouso.

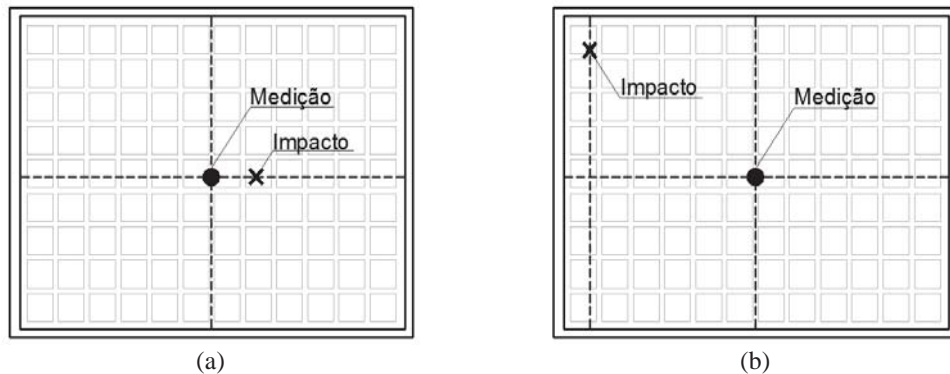
### 3.3.2 Ensaio de impacto

As características dinâmicas de frequência natural e fatores de amortecimentos modais foram determinadas através do processamento de sinais de aceleração verticais ao plano das lajes,

obtidos por meio de ensaios de vibrações livres. As respostas temporais das lajes em vibrações livres amortecidas são resultado do impacto dos calcanhares sobre a superfície, como descrito no item 2.3.1.

Os ensaios foram realizados por uma pessoa de aproximadamente 55,0 Kg com estatura de 1,70 m. O tempo de extração dos sinais de aceleração inicia-se assim que os estímulos cessam e é finalizado alguns segundos após a aplicação do carregamento dinâmico. Foram escolhidas duas seções diferentes de medição,  $M_1$  e  $M_2$ , conforme Figura 31.

Figura 31 - Posição dos dispositivos de medição e do impacto das seções (a)  $M_1$  e (b)  $M_2$



Fonte: Autor.

Na seção  $M_1$  os dispositivos de registro dos sinais foram posicionados no centro do vão e o impacto dos calcanhares realizado próximo ao ponto de medição. Na seção  $M_2$  as medições foram realizadas no centro do vão e o impacto aplicado próximo a um dos apoios. Para cada uma das seções foram realizadas três repetições de impacto.

De acordo com a Norma Canadense CAN/Csa-Si6.1-94 (2001 apud Mello, 2009) o equipamento de aquisição deve ter uma capacidade de filtrar frequências superior a 1,5 vezes a frequência fundamental da estrutura no meio do vão. A pessoa que executa a aferição deve estar sentada perto do ponto de medição enquanto um segundo indivíduo, utilizando calçados de solado macio, realiza o impacto dos calcanhares.

### 3.3.3 Processamento de sinais

Uma primeira leitura dos dados de aceleração registrados pelos dispositivos de acelerômetro e celular foi realizada in situ. O sinal original registrado pelo acelerômetro GP2Lx foi processado com o auxílio do programa computacional SensView que apresenta graficamente a

resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência, além de fazer a armazenagem do sinal no formato “.csv”, permitindo a análise em outros softwares.

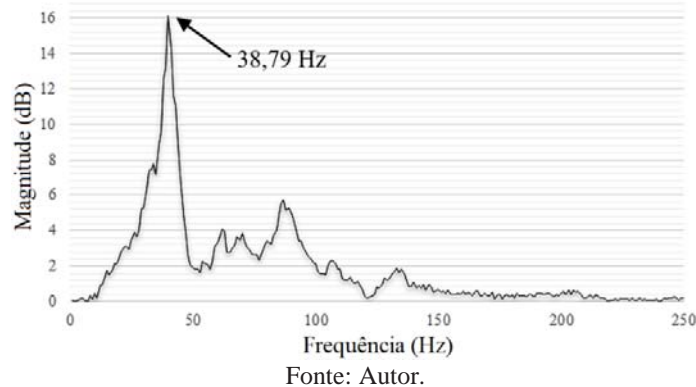
O sinal original obtido com a utilização de aparelho de celular foi visualizado instantaneamente utilizando o programa SignalViewer, que também realiza a DFT e permite a visualização do espectro em termos de frequência. Esse programa permite realizar a sobreposição de curvas de várias medições, o que facilita a comparação entre os métodos de medição e as repetições. A Figura 32 mostra uma resposta dinâmica típica devida ao impacto dos calcanhares, em termos da aceleração vertical, registrada na seção M<sub>1</sub>, local de maior amplitude de deslocamento do painel.

Figura 32 – Resposta da aceleração no tempo devida a repetição de três impactos dos calcanhares registrada no centro da laje LN24



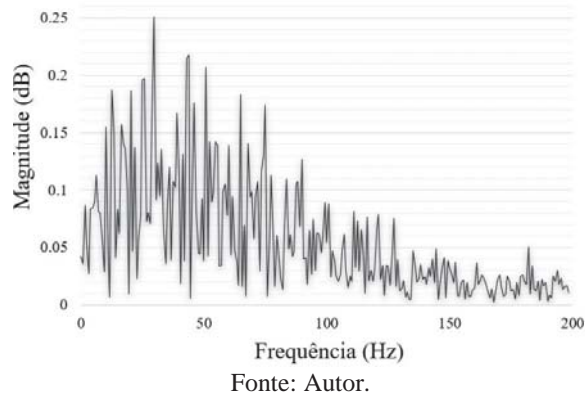
Os sinais no domínio do tempo registrados pelos dois dispositivos foram transformados para o domínio da frequência através da DFT pela implementação do algoritmo de cálculo da FFT no software Excel, e geradas as respostas em termos de frequência para seis medições em cada laje. Isso permitiu a obtenção das frequências fundamentais através do método peak-picking, identificando picos de maior amplitude nos gráficos. O pico com frequência mais baixa corresponde à frequência do primeiro modo de vibração, conforme pode ser observado na Figura 33. No exemplo mostrado, a frequência fundamental para a laje LN05 é de  $f_{n1} = 38,79$  Hz.

Figura 33 – Resposta em termos de frequência da laje LN05, seção M<sub>1</sub>, utilizando celular



Em algumas lajes, não foi possível identificar curvas bem definidas da resposta no tempo para a seção M<sub>2</sub> e, assim, estas não apresentam um total de seis, mas sim três resultados experimentais. Esse é o caso, por exemplo, da laje LP21, apresentado na Figura 34. Para esta laje houve dificuldade em identificar a frequência na seção M<sub>2</sub>, já que os picos estão muito próximos e com amplitudes irregulares.

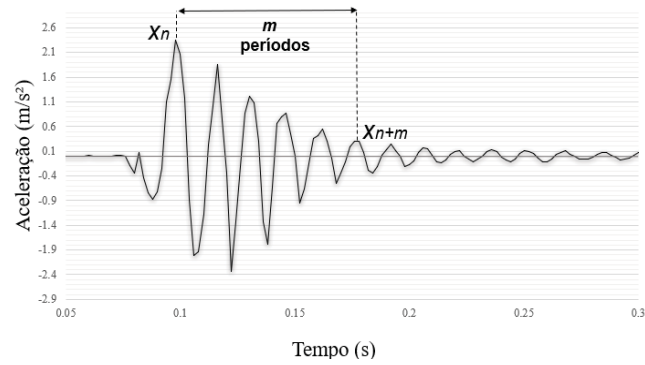
Figura 34 - Sinal no domínio da frequência da laje LP21, seção M<sub>2</sub>, utilizando o dispositivo de acelerômetro



Após a identificação das frequências naturais foram obtidos os fatores de amortecimentos através do método do decremento logarítmico e da largura da banda, descritos no item 2.3.5. utilizando os sinais provenientes do acelerômetro. De acordo com Barrett (2006), embora teoricamente o amortecimento deve ser o mesmo em todo o vão, a melhor forma de estimá-lo é registrando os sinais no mesmo local onde é realizado o impacto, isso porque a amplitude dos picos da resposta em frequência nas medições que estão longe do local de impacto pode ser pequena. Assim os amortecimentos foram obtidos a partir das respostas para a seção M<sub>1</sub>.

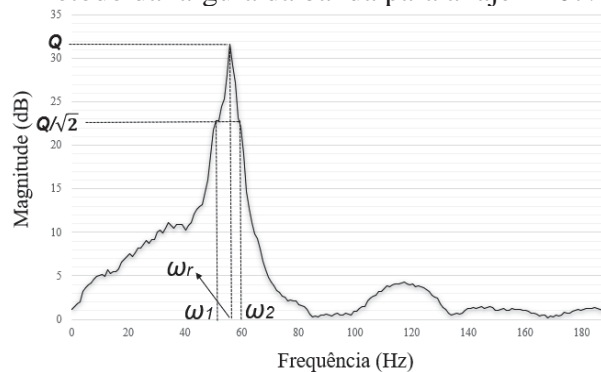
A Figura 35 mostra um exemplo de extração dos dados para a cálculo do amortecimento da laje LP07 pelo método do decremento logarítmico e a Figura 36 pelo método da largura da banda.

Figura 35 – Método de extração de dados para o cálculo dos fatores de amortecimento pelo método do decremento logarítmico para a laje LP07.



Fonte: Autor.

Figura 36 – Método de extração de dados para o cálculo dos fatores de amortecimento pelo método da largura da banda para a laje LP07.



Fonte: Autor.

### 3.3.3.1 Filtro de frequência

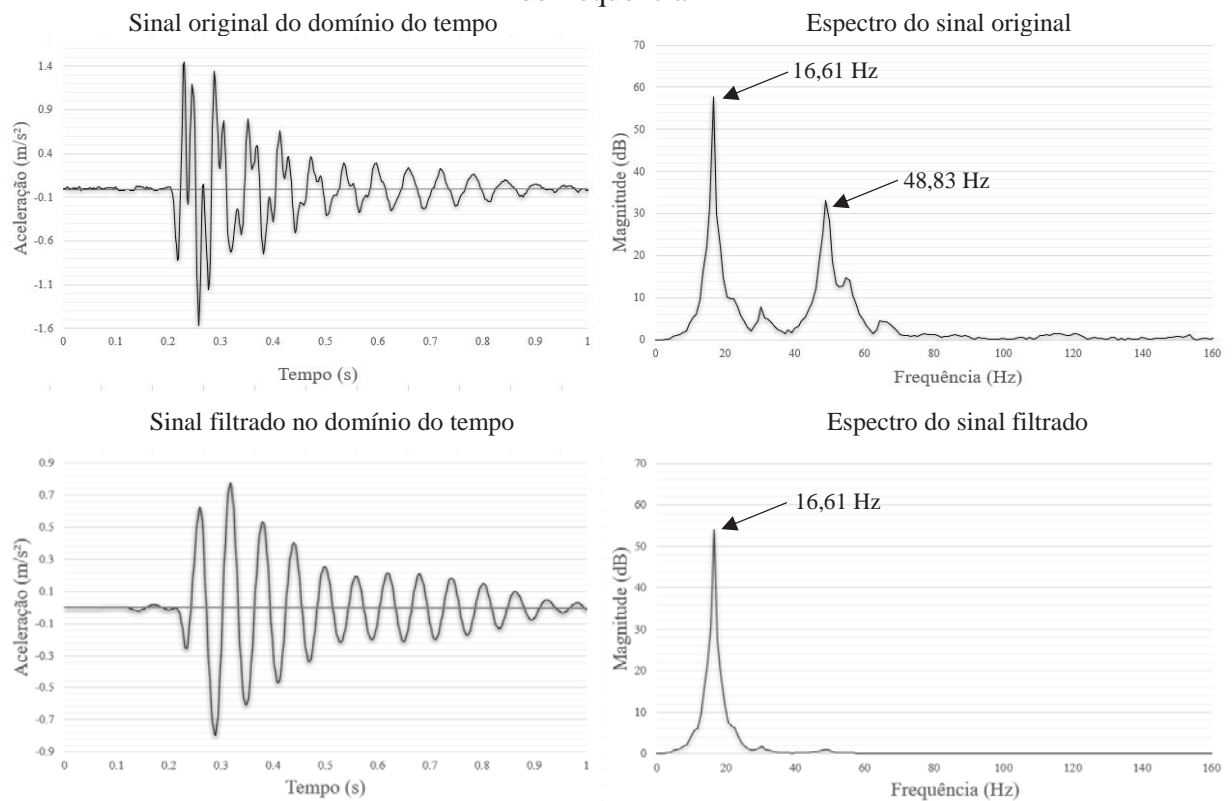
Com o objetivo de separar o sinal original da estrutura do ruído provocado por fatores externos, ou ainda, para reduzir o erros de amostragem, foi aplicado um filtro de frequência nos sinais originais registrados.

Uma rotina foi elaborada no programa computacional Scilab-6.0.1 com a utilização de um filtro passa-baixa, do tipo Butterworth de quarta ordem, com frequência de corte estimada de acordo com o item 2.3.3.1. Este é um dos filtros mais popularmente utilizados para obtenção de sinais abaixo de uma certa frequência pois é projetado para produzir respostas o mais planas possíveis até a frequência de corte. A resposta do filtro permanece constante até quase a frequência



de corte e então diminui a uma taxa de  $-6n$  dB por oitava<sup>3</sup>, onde  $n$  é a ordem do filtro. Com o crescimento da ordem do filtro, a largura da banda de transição decresce e o perfil da função se aproxima do filtro ideal. Os filtros Butterworth têm uma queda na magnitude da frequência como uma função linear. Na Figura 37 contrasta-se a diferença do sinal no domínio do tempo e da resposta em termos de frequência, antes e após a utilização do filtro.

Figura 37 – Sinais no domínio do tempo e respectivo espectro de resposta em termos de frequência (laje LP08, seção M<sub>1</sub>, aparelho de celular), sem a utilização e com a utilização de filtro de frequência



Fonte: Autor.

Observando a figura, nota-se que a maior vantagem na utilização do filtro de frequência está relacionada à estimativa dos fatores de amortecimento. O sinal original do domínio do tempo possui curvas pouco suaves, pois a função de resposta é definida por duas ondas, cada uma correspondente à frequência de um harmônico. A utilização do filtro de frequência possibilitou selecionar o harmônico de interesse e obter curvas mais suaves no domínio do tempo para obtenção

<sup>3</sup> A expressão “oitava” significa o dobro ou a metade de uma frequência  $f$ . Dada uma frequência  $f$ , a próxima oitava será  $2f$ , e a seguinte  $4f$ . Num filtro com atenuação 6dB/oitava, tem-se -6dB a cada oitava da  $f$ .

apurada do amortecimento pelo método do decremento logarítmico. A utilização do filtro de frequência também foi útil na aplicação do método da largura da banda, uma vez que algumas lajes possuem picos de frequência muito próximos uns dos outros, o que pode aumentar a largura da banda e distorcer os valores de interesse. Quanto às frequências naturais, houve pouca ou nenhuma alteração dos valores obtidos antes da aplicação do filtro.

### 3.3.4 Controle estatístico

Com os sinais adquiridos pelo ensaio de impacto com os dispositivos de celular e acelerômetro, foi realizado o controle estatístico das características modais de frequência natural e amortecimento das amostras.

A frequência fundamental da estrutura foi computada através da média de todas as medições realizadas nas regiões estudadas para cada dispositivo separadamente. Devido à eficiência no uso do celular para o registro do sinal, como será evidenciando adiante, utilizaram-se as três amostras obtidas por esse sensor correspondentes à seção  $M_1$ , para o cálculo dos fatores de amortecimento por meio do método do decremento logarítmico e da largura da banda. Foram calculados os coeficientes de variação dos resultados, e comparados com as faixas de precisão propostas por Gomes (2009) que avaliam a confiabilidade dos resultados experimentais, conforme Tabela 9.

Tabela 9 – Classificação do índice de precisão de experimentos conforme avaliação do coeficiente de variação C.V.

C.V.	Avaliação do C.V.	Precisão
< 10%	Baixo	Alta
10 a 20 %	Médio	Média
20 a 30 %	Alto	Baixa
> 30%	Muito alto	Muito Baixa

Fonte: Gomes (2009).

## 3.4 Cálculo Analítico das Frequências Naturais

Utilizando as formulações para placas retangulares uniformes e isotrópicas, e as equações para placas retangulares ortotrópicas (item 2.2.6), foram calculadas as frequências naturais para o primeiro modo de vibração das lajes nervuradas e pré-moldadas, por meio dos dois métodos citados.

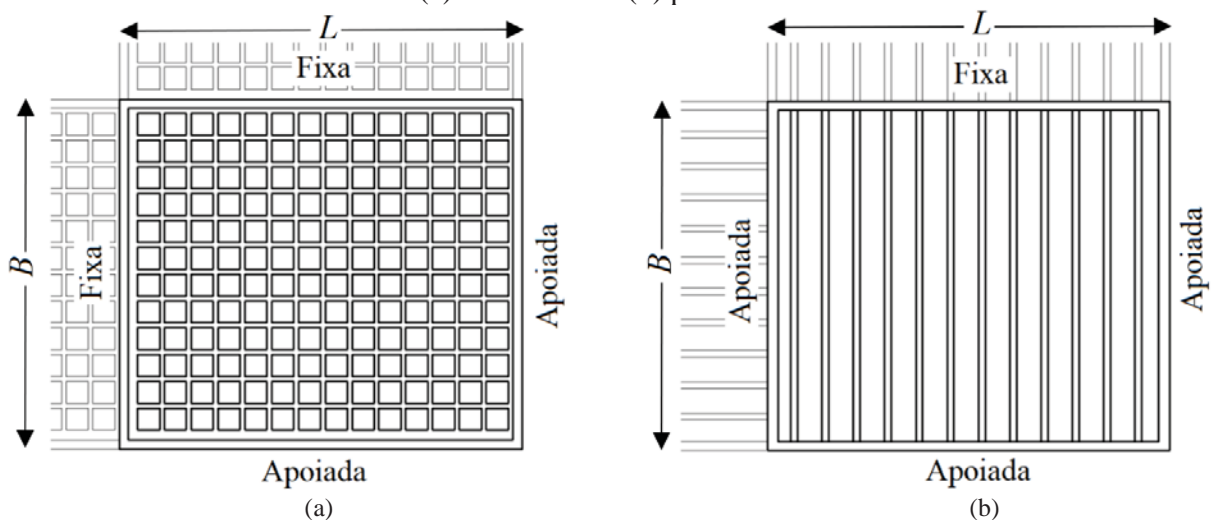
Pela suposição de placas finas isotrópicas, que requer que as lajes sejam representadas por um elemento plano de espessura uniforme, utilizando os valores de espessura equivalente apresentados na Tabela 7 e na Tabela 8, foram calculadas as frequências naturais analíticas  $f_{a,he}$  para o primeiro harmônico das lajes nervuradas e das lajes pré-moldadas treliçadas, conforme item 2.2.6.1.

Pela suposição de placas ortotrópicas retangulares, foram calculadas as frequências naturais analíticas  $f_a$  para o primeiro modo de vibração das lajes nervuradas e pré-moldadas, de acordo com o item 2.2.6.2.

No cálculo simplificado das frequências, independentemente do método utilizado, determinam-se condições de contorno relacionadas às vinculações das lajes em suas bordas. Essas vinculações são determinadas através das constantes  $G$ ,  $H$  e  $J$ , definidas no Anexo A deste documento.

Exemplos das vinculações adotadas podem ser observados na Figura 38 para (a) lajes nervuradas e (b) lajes pré-moldadas.

Figura 38 – Exemplos de consideração das vinculações para estimativa das frequências naturais em (a) nervuradas e (b) pré-moldadas



Fonte: Autor.

De uma forma geral, as lajes nervuradas foram consideradas fixas em suas extremidades quando apresentam continuidade com o restante do pavimento, e simplesmente apoiadas quando não há continuidade. No caso de vigas de concreto com dimensões usuais, a rigidez da viga à torção

é pequena, o que faz com que esta gire e deforme-se, acompanhando as pequenas rotações da laje, o que acaba garantindo a concepção teórica do apoio simples.

Nas lajes pré-moldadas, pelo fato de as vigotas serem arrançadas somente em uma direção, considerou-se que as extremidades são sempre simplesmente apoiadas na direção ortogonal às vigotas treliçadas. Na direção das vigotas, a consideração de borda fixa acontece quando esta apresenta continuidade com o restante do pavimento, caso contrário a extremidade é considerada simplesmente apoiada.

### **3.5 Modelagem Computacional em Elementos Finitos**

Neste item são apresentadas as estratégias utilizadas para a análise numérica dos sistemas estruturais em vibração livre. São empregadas técnicas usuais de discretização via método dos elementos finitos, com o desenvolvimento de modelos computacionais para os sistemas estudados através do programa computacional ANSYS Mechanical APDL 19.0.

Os modelos consideraram concreto com densidade de  $2.500 \text{ kg/m}^3$ , módulo de elasticidade calculado pela formulação da norma ABNT NBR 6118 (2014) para cada laje, e coeficiente de Poisson 0,2.

Na elaboração dos modelos numéricos, conforme recomendado por Dias (2003) e visando a simplificação dos modelos, optou-se pela utilização de elementos finitos de casca, definindo a espessura das nervuras e da capa de concreto conforme características geométricas de cada sistema estrutural.

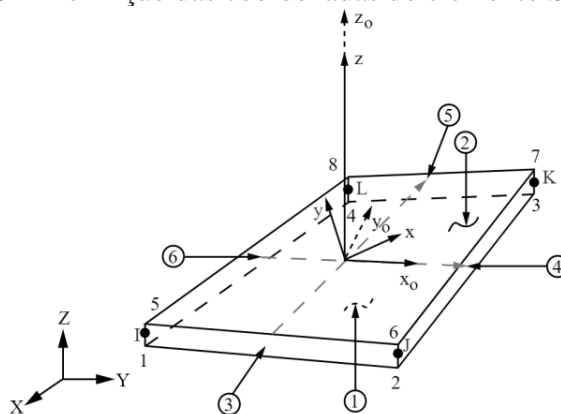
Após obtenção do modelo completo, procedeu-se com a análise modal. Através da resolução do problema de autovalor, a análise modal determina as características dinâmicas da estrutura, como as frequências naturais de vibração e as formas modais, permitindo a comparação com as frequências obtidas experimentalmente.

#### **3.5.1 Elemento finito de casca – SHELL181**

Neste trabalho, para a discretização das lajes, utilizou-se um elemento de casca SHELL181. Este elemento é predominantemente utilizado na modelagem de estruturas com comportamento de membrana, placa ou casca, adequado para análise de estruturas de cascas finas a moderadamente

espessas, e permite a consideração de carregamentos no plano do elemento e transversalmente ao mesmo.

Figura 39 – Definição das coordenadas do elemento SHELL181



Fonte: Ansys (2017).

O elemento SHELL181 possui quatro nós com seis graus de liberdade por nó (translação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e rotações em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), e utiliza interpolação linear dentro do elemento. Esse elemento é recomendado para aplicações lineares, e a espessura da casca pode ser incluída para análises não lineares.

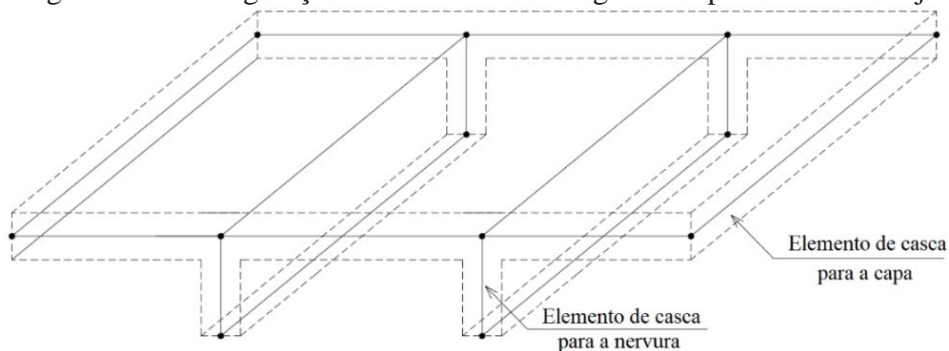
O elemento SHELL181 considera a deformação por cisalhamento, elemento de placa tipo Mindlin, no entanto, por tratarem-se de placas finas, a parcela da energia de deformação referente ao esforço cortante é desprezível quando comparada à energia de deformação por flexão.

### 3.5.2 Descrição dos modelos

Com a finalidade de comparação com os resultados analíticos e experimentais, foram criados modelos simplificados para reprodução do comportamento das lajes. Buscando a consistência entre o cálculo manual e os modelos numéricos, adotou-se um modelo estudado por Dias (2003) que utiliza elementos bidimensionais de placa para representar as superfícies planas.

No modelo simplificado as lajes foram discretizadas pelo elemento de casca SHELL181. Esse modelo representa a geometria das lajes conforme projeto original. A Figura 40 traz a representação do modelo utilizado.

Figura 40 – Configuração utilizada na modelagem computacional das lajes

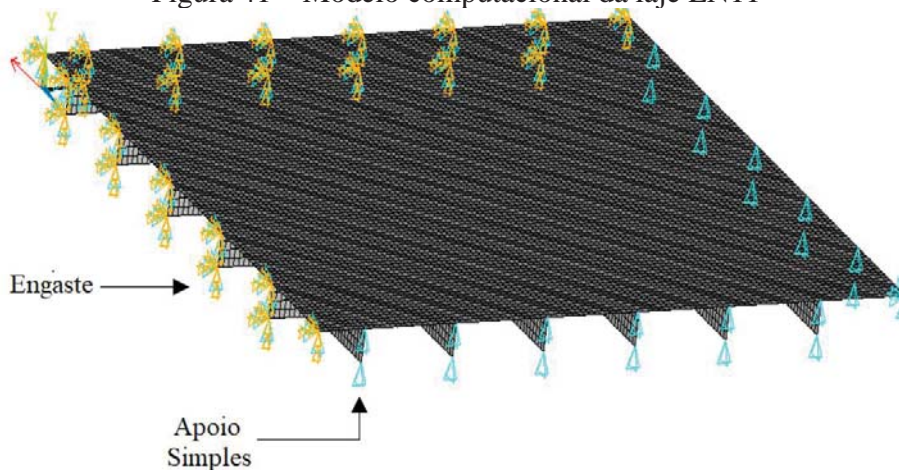


Fonte: Adaptado de Dias (2003).

Conforme Figura 40, as nervuras ou vigotas treliçadas foram modeladas como elementos de casca com espessura constante  $b$ , distribuídos no sentido da sua disposição original. Superior às nervuras há a adição de elementos de casca representando a capa de concreto. Os elementos de enchimento não foram considerados na modelagem computacional já que sua influência no comportamento mecânico do modelo é irrelevante.

Um exemplo de modelo computacional para lajes nervuradas é mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Modelo computacional da laje LN11

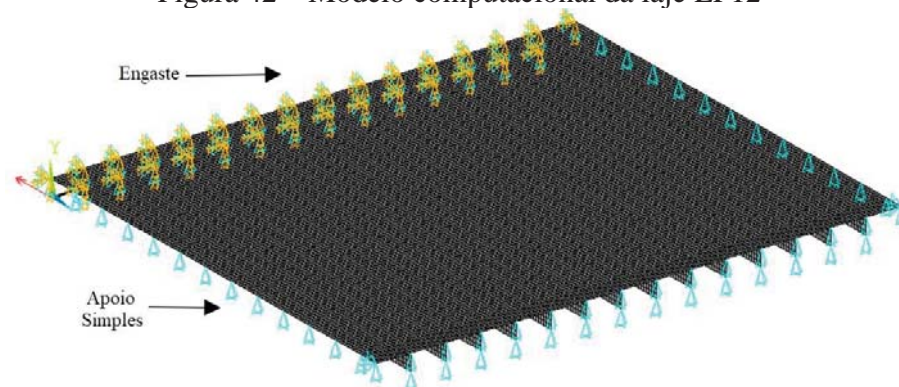


Fonte: Autor.

A figura anterior representa o modelo para a laje LN11. No modelo, as bordas que possuem continuidade com o restante do pavimento foram engastadas, restringindo os graus de liberdade de rotação e translação. Nas bordas simplesmente apoiadas em vigas, foi restringido o movimento na direção perpendicular ao plano. As translações nas três direções também foram restringidas onde há pilares sustentando a laje.

Na Figura 42 é apresentado um exemplo para as lajes pré-moldadas.

Figura 42 – Modelo computacional da laje LP12



Fonte: Autor.

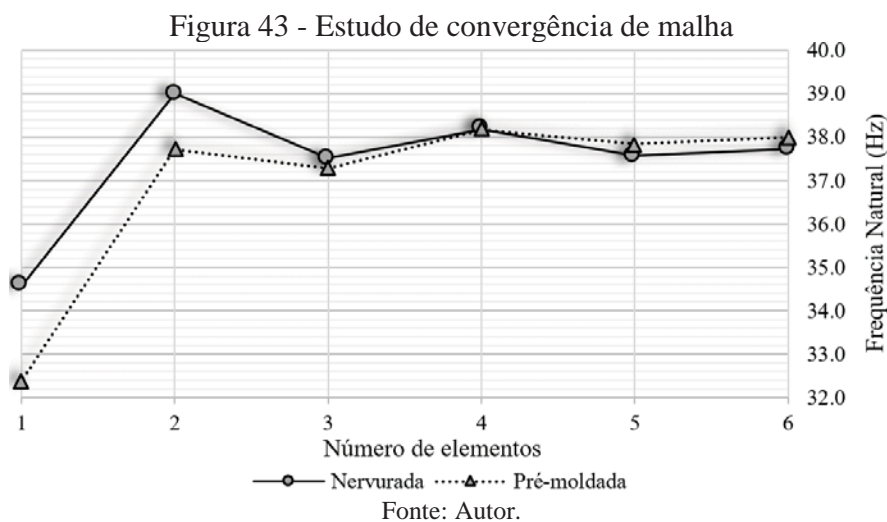
O modelo apresentado na figura anterior refere-se à laje LP12. O diferencial na modelagem das lajes pré-moldadas é que, além de possuírem nervuras somente em um sentido, as bordas nas quais as nervuras não são apoiadas são sempre simplesmente apoiadas no pavimento, sem restrição à rotação. As demais restrições seguem o mesmo padrão das lajes nervuradas com bordas engastadas quando há continuidade com o restante do pavimento, restrição à movimentação vertical quando a borda é simplesmente apoiada, e restrição à translação onde há pilares.

### 3.5.3 Estudo de convergência de malha

A seleção correta da densidade da malha a ser usada nos modelos em elementos finitos é uma etapa fundamental para a obtenção de resultados satisfatórios. Teoricamente, neste tipo de análise, quanto maior a quantidade de elementos melhor serão os resultados obtidos. No entanto, o esforço computacional necessário para a solução do modelo também será maior. Sendo assim, o estudo da convergência de malha é fundamental para definir o equilíbrio entre o custo computacional e a convergência dos resultados.

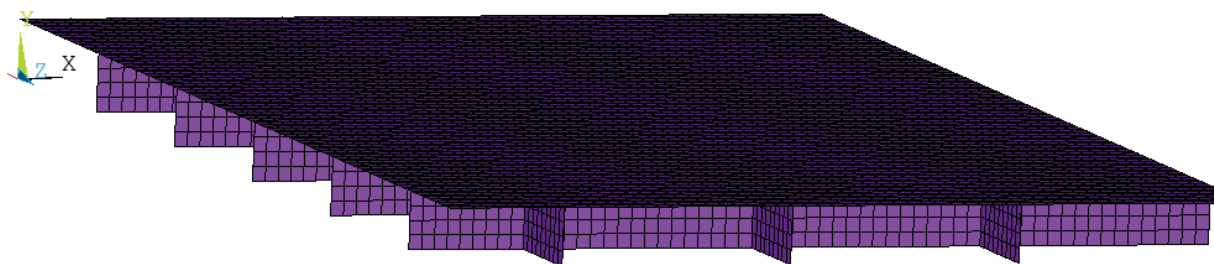
Para a definição da malha, foram realizadas análises em vibração livre para duas lajes, com o objetivo de obter as frequências naturais do sistema. A densidade da malha foi alterada variando o número de camadas utilizadas na discretização através da altura das nervuras ou vigotas. A malha foi refinada até o momento em que as respostas de frequência natural dos modelos passaram a

convergir para um determinado valor. A Figura 43 apresenta dois estudos de convergência realizados para um modelo de laje nervurada e um modelo em laje pré-moldada.



Na Figura 43 observa-se que, com utilização de quatro ou mais camadas de elementos através da altura das nervuras, os valores de frequência passam a convergir para um determinado valor, o que torna a discretização efetiva. Dessa forma, tomando como base os valores de frequências naturais obtidos pelo método experimental, escolheu-se utilizar quatro camadas de elementos através da altura, com elementos quadrangulares, como pode ser observado na Figura 44 que traz uma amostra da modelagem para a laje LN16.

Figura 44 - Modelo discretizado da laje LN16



Fonte: Autor.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste tópico são apresentadas as características geométricas e de vibração de 26 lajes nervuradas e 26 lajes pré-moldadas treliçadas que são objeto de estudo desse trabalho. As lajes foram selecionadas para a obtenção das características modais de frequência natural e amortecimento.

Em seguida as estruturas são avaliadas quanto aos critérios de conforto através do cálculo analítico simplificado fornecido na revisão da literatura, conforme item 2.5.

### 4.1 Resultados Experimentais

#### 4.1.1 Lajes nervuradas

A Tabela 10 apresenta as frequências naturais para o primeiro modo de vibração das lajes nervuradas, resultantes da média das amostras nas seções  $M_1$  e  $M_2$ , utilizando os dois dispositivos mencionados. Na tabela,  $L$  e  $B$  representam as dimensões maior e menor dos vãos livres, respectivamente,  $f_{nm}$  é a média das frequências de todas as leituras, e o desvio padrão e o coeficiente de variação foram calculados com base em todas as leituras para cada laje.

Observa-se que as frequências naturais entre a utilização do acelerômetro e do celular são muito próximas, sendo que, na maioria dos casos, a variação dos resultados obtidos com a utilização do celular comparados com os obtidos pelo acelerômetro é inferior a 1,0 %.

Dos resultados provenientes dos dois dispositivos de medição, determinaram-se as frequências médias  $f_{nm}$  para cada laje. Pela Tabela 10, observando as medidas de dispersão, nota-se que a variação dos resultados é baixa em relação ao valor médio. Todos os coeficientes de variação C.V. são inferiores a 10,0 %, o que indica alta precisão dos resultados. Esses aspectos permitem afirmar também que a utilização de celulares é capaz de fornecer resultados confiáveis comparados aos resultados obtidos por acelerômetros.

Tratando-se das características geométricas, na Figura 45 é traçado um diagrama da frequências naturais  $f_n$  (obtidas pelo acelerômetro) em função dos vãos  $L$  e  $B$  das lajes nervuradas.

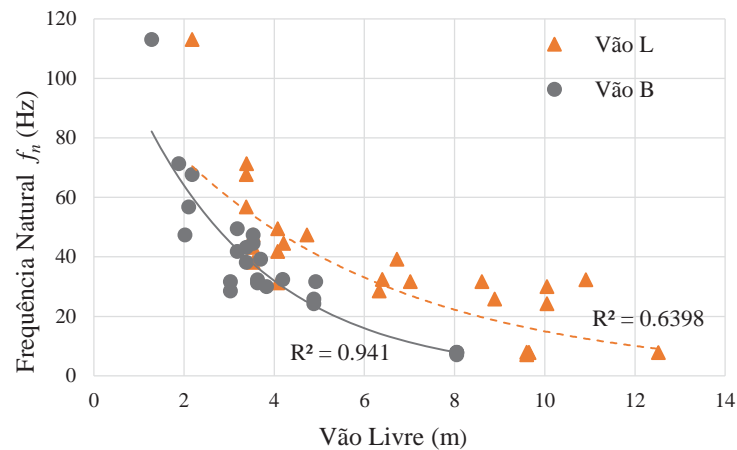
Tabela 10 – Frequências naturais experimentais de lajes nervuradas utilizando acelerômetro e celular, e respectivas medidas de dispersão

Laje	$L$ (m)	$B$ (m)	$L/B$	Frequência natural $f_n$ (Hz)		$f_{nm}$ média (Hz)	Desvio Padrão (Hz)	C.V. (%)	
				Aceler.	Celular				
Edifício 1	LN01	6,33	3,03	2,09*	28,52	28,33	28,43	0,29	1,01
	LN02	8,89	4,88	1,82	25,78	25,88	25,83	0,35	1,35
	LN03	10,91	3,63	3,01*	32,29	32,23	32,26	0,26	0,81
	LN04	7,02	4,92	1,43	31,64	31,74	31,69	0,45	1,41
	LN05	6,72	3,70	1,82	39,19	39,55	39,37	1,35	3,43
	LN06	8,61	3,03	2,84*	31,70	32,23	31,96	0,96	3,01
	LN07	10,05	4,88	2,06*	24,22	24,44	24,33	0,11	0,45
	LN08	10,05	3,83	2,62*	29,95	29,30	29,63	0,42	1,40
	LN09	4,21	3,53	1,19	44,53	44,92	44,72	0,96	2,15
	LN10	6,40	4,19	1,53	32,42	30,11	31,26	2,50	8,00
Edifício 2	LN11	4,08	3,63	1,12	31,25	31,25	31,25	0,00	0,00
	LN12	4,08	3,18	1,28	41,80	41,99	41,89	0,29	0,70
	LN13	3,39	1,88	1,80	71,35	71,29	71,32	1,52	2,13
	LN14	3,53	3,38	1,04	38,15	38,41	38,28	0,76	1,98
	LN15	4,73	3,53	1,34	47,40	47,85	47,62	0,35	0,73
	LN16	3,38	2,10	1,61	56,77	57,62	57,19	1,42	2,48
	LN17	2,18	1,28	1,70	113,02	107,75	110,38	2,87	2,60
	LN18	4,08	3,18	1,28	49,48	48,99	49,24	0,99	2,01
	LN19	3,53	3,38	1,04	43,23	42,97	43,10	0,29	0,68
	LN20	3,53	2,02	1,75	47,40	47,20	47,30	0,43	0,91
	LN21	3,38	2,18	1,55	67,71	67,71	67,71	0,61	0,91
Edifício 3	LN22	12,52	8,05	1,56	7,82	7,83	7,82	0,00	0,04
	LN23	9,65	8,05	1,20	7,82	7,81	7,82	0,00	0,06
	LN24	9,60	8,05	1,19	7,04	7,05	7,04	0,00	0,05
	LN25	9,65	8,05	1,20	7,84	7,06	7,45	0,39	5,25
	LN26	9,60	8,05	1,19	7,93	7,15	7,54	0,39	5,19

\* Lajes LN01, LN03, LN06, LN07 e LN08 são consideradas unidirecionais pois  $L/B > 2$ .

Fonte: Autor.

Figura 45 - Frequências naturais experimentais das lajes nervuradas em função dos vãos



Fonte: Autor.

Como era esperado, as frequências naturais possuem relação com os vãos livres, sendo que estas tendem a diminuir com o aumento do vão. Ainda, o vão  $B$  parece exercer maior influência sobre as frequências naturais do que o vão  $L$ , resultando um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) de 0,941, o que indica que cerca de 94,1% da variável dependente (frequência natural) pode ser descrita pelo modelo traçado em função da variável independente (vão  $B$ ).

A influência de  $B$  é ainda mais evidente quando comparam-se as frequências das lajes LN02, LN07 e LN25, como destaca a Tabela 11.

Tabela 11 - Comparação entre frequências naturais para as lajes LN02, LN07 e LN25

Laje	$L$ (m)	$B$ (m)	$f_n$ (Hz)
LN02	8,89	4,88	25,78
LN07	10,05	4,88	24,22
LN25	9,65	8,05	7,84

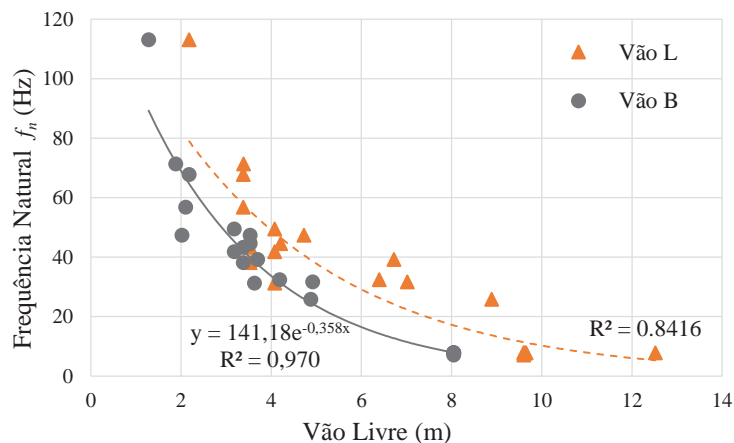
Fonte: Autor.

Avaliando as lajes LN07 e LN25 percebe-se que, mesmo possuindo valores semelhantes para o comprimento  $L$ , há um aumento em 208,9% na frequência natural com a redução de 39,4% do vão  $B$ . Agora comparando-se as laje LN07 e LN02, o vão  $L$  da laje LN07 é 13,0% maior que o vão  $L$  da laje LN02 e ambas possuem o mesmo vão  $B$ . Nesse caso, ainda há uma redução da frequência natural com o aumento do vão  $L$ , mas essa redução é de apenas 6,1%.

Na Tabela 10, observando a razão  $L/B > 2,0$ , nota-se que esta relação define as amostras LN01, LN03, LN06, LN07 e LN08 como lajes unidirecionais. Para investigar a influência desse parâmetro, o diagrama da frequência em função dos vãos foi traçado somente para as lajes com comportamento bidirecional, conforme Figura 46.

Claramente o modelo se ajusta melhor às amostras quando são consideradas somente as lajes nervuradas definidas bidirecionais geometricamente, apresentando coeficiente de determinação de aproximadamente 97,0 % quando o modelo é traçado em função do vão  $B$ , e 84,2% quando traçado em função do vão  $L$ . Vale ressaltar que, conforme a relação  $L/B$  se aproxima de 1,0, o valor do coeficiente de determinação aumenta, tornando o modelo ainda mais preciso.

Figura 46 - Frequências naturais experimentais das lajes nervuradas bidirecionais em função dos vãos



Fonte: Autor.

Após essa primeira análise das frequências naturais experimentais, os sinais captados pelo acelerômetro foram passados em filtros de frequência que permitiram selecionar o primeiro modo de vibração com base nas frequências naturais experimentais. A partir disso, obtiveram-se novas respostas, em termos de aceleração e frequência, que possibilitaram a obtenção do amortecimento pelo método do decremento logarítmico e pelo método da largura da banda. A Tabela 12 traz os resultados de amortecimento para as lajes nervuradas utilizando os dois métodos mencionados.

Da Tabela 12, os fatores de amortecimento  $\zeta$  são resultado das médias dos amortecimentos obtidos para cada repetição de impacto. Observando os coeficientes de variação, nota-se que os amortecimentos obtidos pelo método do decremento logarítmico apresentam menor C.V. que os obtidos pelo método da largura da banda. Pelo método do decremento logarítmico todos os resultados apresentaram média e alta precisão. Já pelo método da largura da banda, quatro lajes possuem baixa precisão, e três lajes precisão muito baixa, com C.V. > 30,0%.

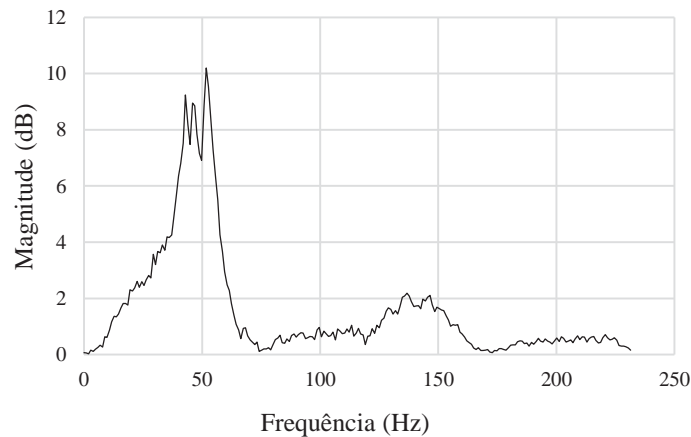
Nota-se que o método da largura da banda a superestimar os amortecimentos de alguns lajes como, por exemplo, a LN17 e LN19, que apresentam fatores de amortecimento muito distantes dos valores de referência encontrados na literatura. Além disso, a utilização dos filtros de frequência não foi totalmente eficaz nas lajes que apresentaram picos muito próximos, como é o caso das lajes aqui citadas. Como explicitado na Figura 47 que representa o sinal no domínio da frequência para a laje LN19, os três primeiros picos de frequência são muito próximos, o que pode fazer com que os picos vizinhos influenciem na largura da banda, aumentando os fatores de amortecimento.

Tabela 12 – Fatores de amortecimento correspondentes ao primeiro modo de vibração nas lajes nervuradas obtidos pelo método do decremento logarítmico e largura da banda, e respectivas medidas de dispersão

	Laje	Decremento Logarítmico			Largura da Banda		
		$\zeta_{dl}$	Desvio Padrão	C.V. (%)	$\zeta_{lb}$	Desvio Padrão	C.V. (%)
Edifício 1	LN01	0,0602	0,0059	9,83	0,0298	0,0164	54,93
	LN02	0,0416	0,0014	3,46	0,0401	0,0036	8,96
	LN03	0,0851	0,0033	3,91	0,0449	0,0041	9,09
	LN04	0,0409	0,0075	18,24	0,0409	0,0054	13,17
	LN05	0,0647	0,0035	5,41	0,0594	0,0023	3,89
	LN06	0,0546	0,0056	10,20	0,0570	0,0037	6,41
	LN07	0,0560	0,0042	7,42	0,0218	0,0005	2,36
	LN08	0,0690	0,0131	18,97	0,0473	0,0061	12,98
	LN09	0,0425	0,0044	10,45	0,0465	0,0009	2,04
	LN10	0,0452	0,0023	4,98	0,0306	0,0024	7,88
Edifício 2	LN11	0,0340	0,0013	3,87	0,0300	0,0000	0,15
	LN12	0,0615	0,0012	1,98	0,0538	0,0004	0,68
	LN13	0,0650	0,0012	1,84	0,0760	0,0162	21,33
	LN14	0,0337	0,0008	2,49	0,0396	0,0010	2,45
	LN15	0,0344	0,0038	10,90	0,0230	0,0026	11,44
	LN16	0,0645	0,0022	3,39	0,0857	0,0015	1,75
	LN17	0,0650	0,0106	16,24	0,1902	0,0532	0,00
	LN18	0,0578	0,0107	18,44	0,0893	0,0185	20,66
	LN19	0,0624	0,0044	7,00	0,1008	0,0037	3,71
	LN20	0,0539	0,0062	11,50	0,0243	0,0016	6,46
	LN21	0,0442	0,0087	19,61	0,0809	0,0305	37,74
Edifício 3	LN22	0,0475	0,0032	6,82	0,0418	0,0081	19,39
	LN23	0,0356	0,0025	6,93	0,0530	0,0109	20,53
	LN24	0,0335	0,0041	12,27	0,0520	0,0025	4,79
	LN25	0,0435	0,0015	3,34	0,0475	0,0158	33,36
	LN26	0,0398	0,0013	3,15	0,0465	0,0066	14,31

Fonte: Autor.

Figura 47 – Resposta no domínio da frequência da laje LN19

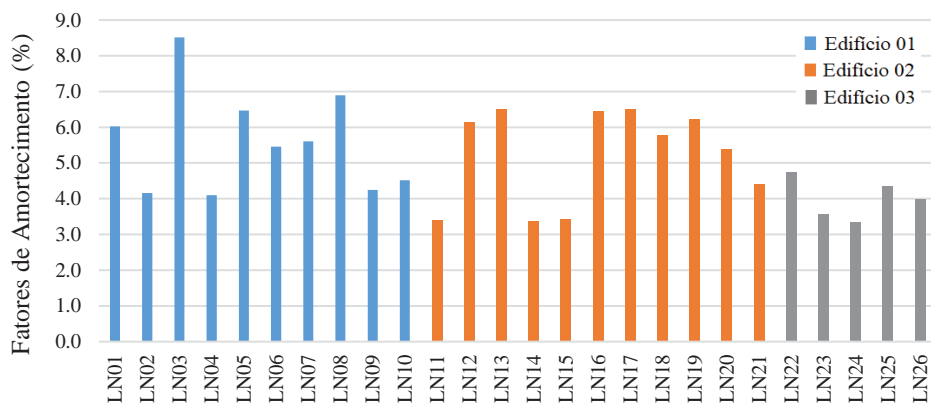


Fonte: Autor.

Observando os resultados utilizando o método do decremento logarítmico, os fatores de amortecimento são dispersos em relação às frequências. Os valores apontam coeficientes de perda entre 3,4 e 8,5 %.

Como pode ser observado na Figura 48, maiores fatores de amortecimento, entre 4,1 e 8,5%, são encontrados nas lajes da Edificação 01 que abrangem as lajes LN01 a LN10. Essas lajes são mais espessas e pesadas, e também são as únicas que possuem elementos não estruturais (divisórias leves) posicionadas diretamente sobre o pavimento. Fatores de amortecimento mais baixos, entre 3,4 e 4,8%, foram encontrados na Edificação 03, que abrange as lajes LN22 a LN26. Essas lajes possuem vãos maiores, com dimensões entre 8,0 e 12,0 metros, e frequências naturais mais baixas. As lajes da Edificação 02 (LN11 a LN21), apresentaram amortecimento entre 3,4 e 6,5%.

Figura 48 - Fatores de amortecimento pelo método do decremento logarítmico nas lajes nervuradas



Fonte: Autor.

A partir desses resultados pode-se concluir que uma estimativa realista para fatores de amortecimento em lajes nervuradas é de pelo menos 3,4%, valor que pode aumentar com a adição de elementos não estruturais e diminuir com o aumento do vão livre. No entanto, a previsão desse parâmetro é sensível a diversos fatores e é necessário desenvolver mais pesquisas na área.

#### 4.1.2 Lajes pré-moldadas

O mesmo processo foi repetido para 26 lajes pré-moldadas, e obtidas as frequências naturais para o primeiro modo de vibração. Os resultados são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Frequências naturais experimentais de lajes pré-moldadas utilizando acelerômetro e celular, e respectivas medidas de dispersão

	Laje	L (m)	B (m)	L/B	Frequência natural $f_n$		$f_{nm}$ média (Hz)	Desvio Padrão (Hz)	C.V. (%)
					(Hz)				
					Aceler.	Celular			
Edifício 4	LP01	5,17	3,31	1,56	36,92	36,98	36,95	0,36	0,96
	LP02	2,66	2,46	1,08	47,14	44,92	46,03	2,57	5,58
	LP03	3,17	2,95	1,07	59,38	59,57	59,47	0,10	0,17
	LP04	3,10	1,85	1,68	36,46	35,97	36,21	0,74	2,04
	LP05	3,27	2,56	1,28	36,46	36,46	36,46	0,44	1,19
	LP06	4,04	3,27	1,24	30,15	31,74	30,94	1,20	3,87
	LP07	3,59	3,36	1,07	65,10	64,94	65,02	0,46	0,71
Edifício 5	LP08	6,96	5,28	1,32	16,62	16,60	16,61	0,22	1,33
	LP09	7,16	6,65	1,08	14,58	14,49	14,53	0,57	3,91
	LP10	6,96	5,28	1,32	15,36	15,46	15,41	0,39	2,50
	LP11	8,66	4,33	2,00	21,61	21,48	21,55	0,28	1,30
	LP12	6,71	5,63	1,19	17,97	18,23	18,10	0,50	2,74
	LP13	6,71	5,63	1,19	17,06	17,09	17,07	0,42	2,46
	LP14	9,21	4,53	2,04	14,84	15,63	15,23	0,96	6,28
	LP15	8,68	8,66	1,00	14,64	14,23	14,44	0,63	4,38
	LP16	9,21	4,53	2,04	23,05	23,27	23,16	1,53	6,62
	LP17	8,89	4,57	1,95	33,75	33,85	33,80	0,40	1,19
	LP18	3,90	3,86	1,01	25,52	25,39	25,46	0,44	1,71
	LP19	5,20	4,83	1,08	34,77	34,83	34,80	0,70	2,00
	LP20	5,40	3,33	1,62	35,94	37,18	36,56	1,60	4,37
	LP21	5,44	5,40	1,01	31,51	31,25	31,38	0,32	1,02
	LP22	5,01	3,06	1,64	57,94	55,99	56,42	2,39	4,24
Edifício 6	LP23	3,40	1,96	1,73	60,94	61,64	61,29	0,39	0,63
	LP24	4,34	3,89	1,12	28,26	28,40	28,22	0,47	1,68
	LP25	2,00	1,91	1,05	95,24	95,54	95,39	0,38	0,39
	LP26	2,30	1,21	1,90	62,62	60,01	61,32	4,96	8,09

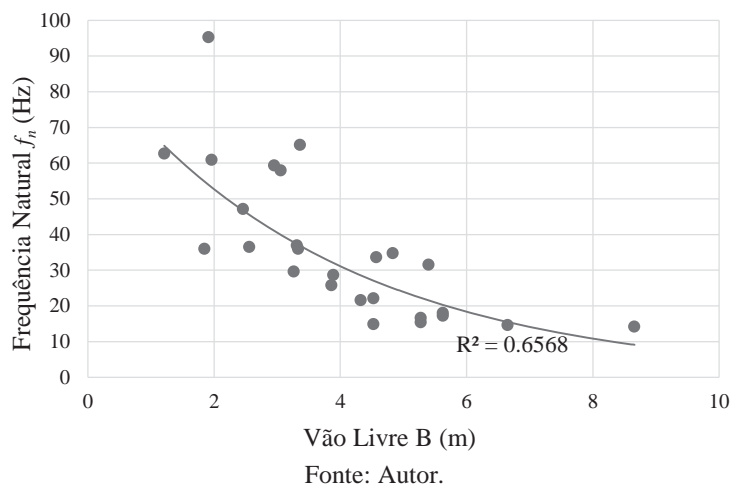
Fonte: Autor.

Novamente, as frequências naturais entre a utilização do acelerômetro e do celular são muito próximas. A maioria das frequências variam em menos de 1,0% entre os resultados obtidos com a utilização do celular em comparação com os obtidos pelo acelerômetro.

Foram determinadas as frequências naturais médias  $f_{nm}$  resultantes da média de todas as amostras de impacto para uma mesma laje. Observando as medidas de dispersão apresentadas na Tabela 13, a variação dos dados é baixa em relação ao valor de referência e todas as frequências possuem coeficientes de variação inferiores à 10,0%, indicando alta precisão dos resultados.

As lajes pré-moldadas compostas por vigotas treliçadas possuem natureza essencialmente unidirecional. Por esse motivo, a Figura 49 traz o diagrama da variação das frequências em função do vão livre  $B$ , sentido de maior rigidez no qual as vigotas treliçadas foram posicionadas.

Figura 49 - Frequências naturais experimentais das lajes pré-moldadas em função do vão  $B$



Observando o diagrama anterior, as frequências naturais das lajes pré-moldadas também tendem a diminuir com o aumento do vão livre, embora a curva exponencial não seja capaz de definir a relação entre frequência e vão com a mesma precisão obtida para as lajes nervuradas.

Na Tabela 14, os fatores de amortecimento são apresentados para as lajes pré-moldadas, e são resultado das médias de todos os amortecimentos obtidos com a utilização do acelerômetro para os dois métodos aplicados.

Os coeficientes de variação novamente expressam melhores resultados utilizando o método do decremento logarítmico. Pelo método do decremento logarítmico as lajes LP05, LP06, LP16, LP20 e LP22 possuem média precisão (C.V. entre 10,0 e 20,0 %), e todas as demais possuem coeficiente de variação inferior a 10,0 %. Além disso, o método da largura da banda mostra-se menos conservativo na maioria dos casos.

Os fatores de amortecimento encontrados quando as lajes são classificadas de acordo com as edificações em que estão localizadas, utilizando o método do decremento logarítmico, são os seguintes: Edificação 04, entre 2,8 e 12,3%; Edificação 05, entre 1,6 e 11,0%; Edificação 06, entre 3,1 e 9,3%.

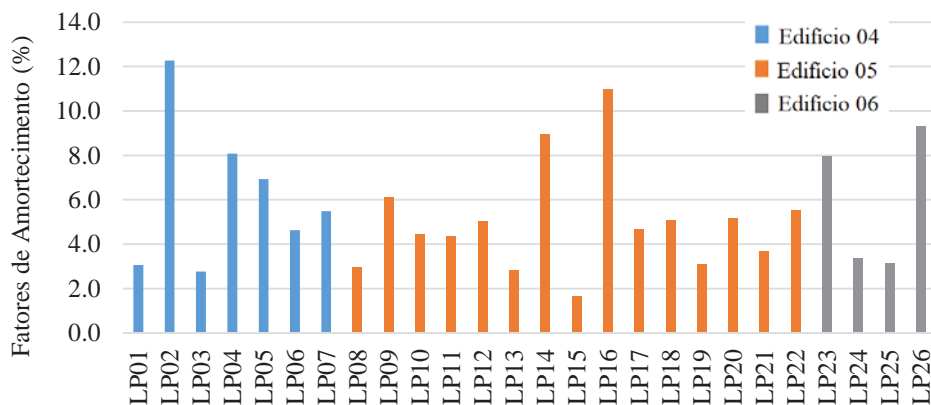


Tabela 14 – Fatores de amortecimento correspondentes ao primeiro modo de vibração nas lajes pré-moldadas pelo método do decremento logarítmico e largura da banda, e respectivas medidas de dispersão

	Laje	Decremento Logarítmico			Largura da Banda		
		$\zeta_{dl}$	Desvio Padrão	C.V. (%)	$\zeta_{lb}$	Desvio Padrão	C.V. (%)
Edifício 4	LP01	0,0306	0,0018	5,92	0,0361	0,0011	3,06
	LP02	0,1227	0,0121	9,83	0,0515	0,0068	13,26
	LP03	0,0276	0,0010	3,64	0,0218	0,0007	3,05
	LP04	0,0809	0,0012	1,45	0,0508	0,0113	22,33
	LP05	0,0692	0,0093	13,46	0,0352	0,0055	15,70
	LP06	0,0464	0,0052	11,32	0,0887	0,0004	0,49
	LP07	0,0548	0,0054	9,93	0,1734	0,0974	56,16
Edifício 5	LP08	0,0295	0,0012	4,09	0,0425	0,0008	1,88
	LP09	0,0609	0,0052	8,56	0,0881	0,0009	1,05
	LP10	0,0445	0,0031	7,06	0,0781	0,0016	2,07
	LP11	0,0436	0,0018	4,04	0,0351	0,0006	1,75
	LP12	0,0504	0,0046	9,06	0,0679	0,0021	3,03
	LP13	0,0283	0,0002	0,62	0,0448	0,0037	8,21
	LP14	0,0895	0,0029	3,24	0,0333	0,0003	0,96
	LP15	0,0164	0,0015	9,28	0,0282	0,0016	5,73
	LP16	0,1098	0,0130	11,81	0,0731	0,0188	25,66
	LP17	0,0467	0,0015	3,24	0,0900	0,0170	18,89
	LP18	0,0505	0,0030	5,96	0,0420	0,0029	6,96
	LP19	0,0309	0,0016	5,11	0,0408	0,0048	11,82
	LP20	0,0514	0,0059	11,55	0,0572	0,0079	13,76
	LP21	0,0368	0,0008	2,25	0,0409	0,0019	4,64
	LP22	0,0554	0,0065	11,71	0,0998	0,0147	14,74
Edifício 6	LP23	0,0797	0,0046	5,74	0,0275	0,0060	21,86
	LP24	0,0335	0,0018	5,22	0,0429	0,0018	4,30
	LP25	0,0312	0,0027	8,62	0,0312	0,0027	8,62
	LP26	0,0932	0,0073	7,82	0,1338	0,0094	7,01

Fonte: Autor.

Figura 50 - Fatores de amortecimento pelo método do decremento logarítmico nas lajes pré-moldadas



Fonte: Autor

Como apresentado na Figura 50, maiores amortecimentos, entre 2,8 e 12,3% foram encontrados para o grupo LP01 a LP07, que pertencem ao Edifício 4. O principal diferencial dessa edificação é que são utilizados blocos cerâmicos como material inerte de enchimento para as lajes, diferente das demais construções em lajes pré-moldadas em que foram utilizados blocos de EPS. O material cerâmico pode aumentar em até três vezes a massa do pavimento, contribuindo diretamente para o aumento do amortecimento, embora não exerça grande influência na rigidez. Amortecimentos mais baixos, entre 3,1 e 9,3%, foram encontrados para as lajes LP08 a LP22, pertencentes ao Edifício 5. Essas são estruturas que possuem vãos maiores entre as lajes pré-moldadas.

Para as lajes pré-moldadas há uma maior variação entre os amortecimentos. Pode-se afirmar que a utilização de blocos cerâmicos de enchimento contribui no aumento do amortecimento das lajes.

## 4.2 Resultados Analíticos

Utilizando as características geométricas, propriedades dos materiais, e vinculações indicadas nos projetos originais, obtiveram-se as frequências naturais para o primeiro modo de vibração das lajes, através das formulações para placas abordadas no item 2.2.6.

O primeiro método de cálculo é direcionado para lajes retangulares, isotrópicas, com espessura constante, que atendem as suposições de Kirchhoff, representado pela Equação (36). Por tratar-se de um método para lajes de espessura constante, um dos parâmetros inseridos na equação é a altura da laje. Para isso, definiu-se uma altura equivalente  $h_e$  através da equivalência do momento de inércia à flexão de uma seção T, definido pela Equação (1), e então foi calculada a frequência analítica  $f_{a,he}$ , conforme Equação (38).

O segundo método considera as lajes como placas ortotrópicas, que podem ter propriedades que variam em cada direção considerada, e tem solução de acordo com a Equação (39), através da qual foi calculada a frequência analítica  $f_a$ , através da Equação (41).

Os resultados para lajes nervuradas e pré-moldadas são discutidos nos tópicos que seguem.

#### 4.2.1 Lajes nervuradas

Inicialmente foi efetuado o cálculo da frequência natural analítica correspondente ao primeiro harmônico para as lajes nervuradas. Esses resultados, calculados através dos dois métodos discutidos anteriormente, são apresentados na Tabela 15.

Observa-se que em todos os casos, utilizar as formulações para lajes isotrópicas, através da consideração de uma laje com altura constante e equivalente em inércia, resulta em frequências naturais mais altas e consequentemente menos conservativas.

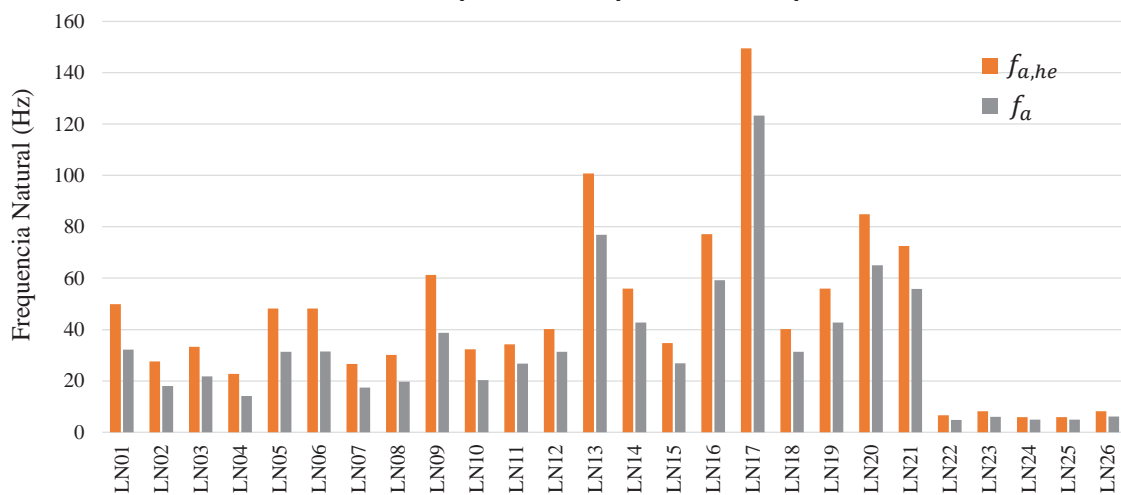
Tabela 15 – Frequências naturais calculadas para o primeiro modo de vibração para as lajes nervuradas

Laje	Isotropia		Ortotropia			
	$h_e$ (cm)	$f_{a,he}$ (Hz)	$f_{a(nerv)}$ (Hz)	$f_{a(capa)}$ (Hz)	$f_a$ (Hz)	
Edifício 1	LN01	16,24	49,92	23,61	8,53	32,14
	LN02	16,24	27,64	13,23	4,72	17,95
	LN03	16,24	33,28	16,10	5,69	21,79
	LN04	16,24	22,77	10,28	3,89	14,17
	LN05	16,24	48,23	23,08	8,24	31,32
	LN06	16,24	48,14	23,20	8,23	31,43
	LN07	16,24	26,61	12,90	4,55	17,45
	LN08	16,24	30,13	14,52	5,15	19,67
	LN09	16,24	61,25	28,29	10,47	38,75
	LN10	16,24	32,31	14,78	5,52	20,31
Edifício 2	LN11	11,57	34,19	17,02	9,71	26,73
	LN12	11,57	40,24	19,89	11,43	31,32
	LN13	11,57	100,75	48,25	28,61	76,85
	LN14	11,57	55,97	26,78	15,89	42,67
	LN15	11,57	34,76	16,94	9,87	26,81
	LN16	11,57	77,15	37,25	21,91	59,15
	LN17	11,57	149,49	80,87	42,45	123,32
	LN18	11,57	40,24	19,89	11,43	31,32
	LN19	11,57	55,97	26,78	15,89	42,67
	LN20	11,57	84,93	40,85	24,12	64,97
	LN21	11,57	72,55	35,17	20,60	55,77
Edifício 3	LN22	13,90	6,55	3,41	1,41	4,82
	LN23	13,90	8,14	4,29	1,75	6,05
	LN24	13,90	5,90	3,64	1,27	4,91
	LN25	13,90	5,88	3,62	1,27	4,89
	LN26	13,90	8,17	4,31	1,76	6,07

Fonte: Autor.

Nos dados da tabela, as frequências  $f_{a,he}$  são entre 20,0 e 60,0 % superiores às frequências  $f_a$ . A diferença entre os valores pode ser melhor observada através da comparação apresentada pela Figura 51. Mais adiante essas frequências são comparadas com os resultados experimentais, indicando que as frequências pelo método para lajes ortotrópicas são mais próximas às frequências obtidas experimentalmente.

Figura 51 - Comparação entre as frequências naturais para as lajes nervuradas calculadas pelo método das placas isotrópicas e ortotrópicas



Fonte: Autor.

Como mostrado no item 2.2.6.2, o cálculo da frequência natural analítica através da teoria de lajes ortotrópicas considera a suposição de uma placa fina sobre uma grelha bidirecional. A frequência natural desse sistema é constituída pela contribuição de uma parcela correspondente às nervuras  $f_{a(nerv)}$  e outra correspondente a capa de concreto  $f_{a(capa)}$ . Sendo assim, de acordo com os valores mostrados na Tabela 15, é possível avaliar a influência de cada um desses elementos estruturais na composição da frequência natural das lajes, já que cada um contribui de maneira diferenciada em massa e rigidez. Verifica-se que, as nervuras contribuem em aproximadamente 70,0% na frequência natural do sistema, em contraste com 30,0% da camada de concreto superior à estas.

#### 4.2.2 Lajes pré-moldadas

Os resultados analíticos de frequência natural para o primeiro harmônico das lajes pré-moldadas calculados através dos dois métodos discutidos anteriormente são apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 – Frequências naturais calculadas para o primeiro modo de vibração para as lajes pré-moldadas

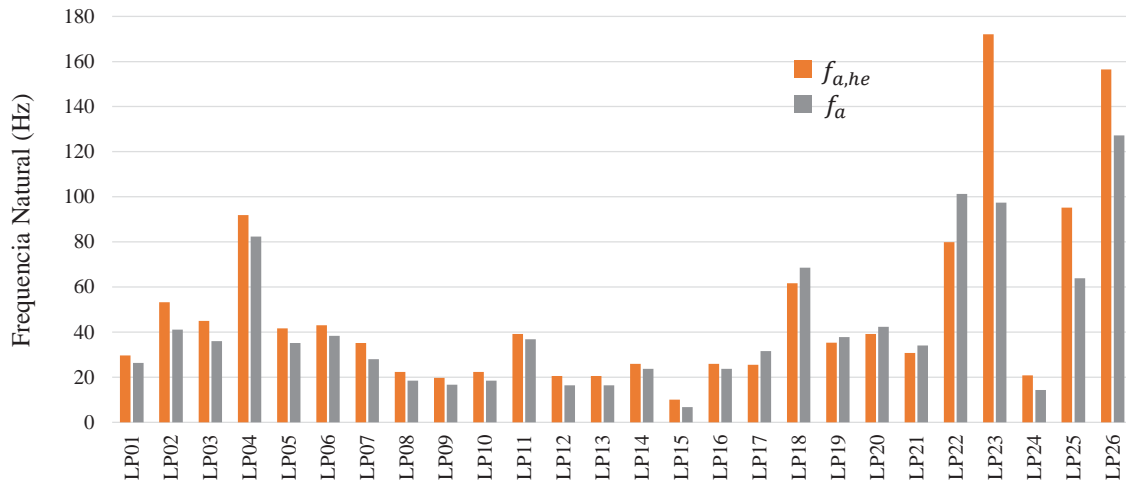
	Laje	$f_n$ (Hz)	$h_e$ (cm)	$f_{a,he}$ (Hz)	$f_a$ (Hz)
Edifício 4	LP01	36,92	9,43	29,70	26,30
	LP02	47,14	9,43	53,24	41,06
	LP03	59,38	9,43	44,91	35,95
	LP04	36,46	9,43	91,87	82,41
	LP05	36,46	9,43	41,70	35,18
	LP06	30,15	9,43	43,04	38,37
	LP07	65,10	9,43	35,13	28,05
Edifício 5	LP08	16,62	15,10	22,30	18,50
	LP09	14,58	15,10	19,76	16,67
	LP10	15,36	15,10	22,30	18,50
	LP11	21,61	15,10	39,19	36,87
	LP12	17,97	15,10	20,50	16,43
	LP13	17,06	15,10	20,50	16,43
	LP14	14,84	15,10	26,00	23,70
	LP15	14,64	18,87	10,10	6,68
	LP16	23,05	15,10	26,00	23,70
	LP17	33,75	15,10	25,53	31,62
	LP18	25,52	15,10	61,74	68,51
	LP19	34,77	15,10	35,37	37,79
	LP20	35,94	15,10	39,11	42,32
	LP21	31,51	15,10	30,70	34,04
	LP22	57,94	15,10	79,94	101,32
Edifício 6	LP23	60,94	16,45	172,03	97,38
	LP24	28,26	10,22	20,88	14,37
	LP25	95,24	10,22	95,18	63,85
	LP26	62,62	10,22	156,49	127,25

Fonte: Autor.

Novamente, para a maioria das lajes pré-moldadas, utilizar as formulações para lajes isotrópicas ( $f_{a,he}$ ) resultou em frequências naturais mais altas e conseqüentemente menos conservativas. As frequências  $f_{a,he}$  são de 6,0 a 76,0 % superiores às frequência  $f_a$ . No entanto,

as lajes LP17 a LP22 mostraram resultados inversos. A distribuição dessa diferença pode ser melhor observada através da Figura 52.

Figura 52 - Comparação entre as frequências naturais para as lajes pré-moldadas calculadas pelo método das placas isotrópicas e ortotrópicas



Fonte: Autor.

Para o cálculo da frequência natural, diferente das lajes nervuradas em que os parâmetros de rigidez  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_{xy}$  foram os mesmos nas duas direções devido à simetria das nervuras, em placas com enrijecedores em somente uma direção, a direção das nervuras exerce maior influência na rigidez e conseqüentemente nas frequências.

Diferente das demais lajes, as lajes LP01 a LP07 pertencentes ao Edifício 04, possuem como material de enchimento entre as vigotas pré-moldadas, tabelas cerâmicas. É importante notar que a massa considerada no cálculo analítico das frequências não inclui o peso das tabelas, pois estas influenciam no amortecimento, mas não contribuem na rigidez. A consideração de massas adicionais pode resultar em frequências excessivamente conservativas.

### 4.3 Resultados Numéricos Computacionais

Foram desenvolvidos modelos em elementos finitos através do programa computacional ANSYS Mechanical APDL para todas as lajes nervuradas e pré-moldadas estudadas nesse trabalho. Utilizaram-se elementos de casca SHELL181 para a representação das nervuras e da capa de concreto através do seu plano médio, e definiu-se a espessura desses elementos conforme projeto

das lajes. Quanto à malha de discretização utilizada, procurou-se utilizar pelo menos quatro elementos na altura. Aspectos relevantes referentes à modelagem computacional são abordados no item 3.5.

Nos tópicos a seguir são apresentados os resultados de frequência natural e comentários sobre os modos de vibração.

### 4.3.1 Lajes nervuradas

Com a modelagem das lajes, através da análise modal no programa de elementos finitos, foram obtidas as frequências naturais correspondentes aos dez primeiros modos de vibração, apresentados na Tabela 17. Essas frequências são comparadas com os valores experimentais e analíticos nas próximas seções.

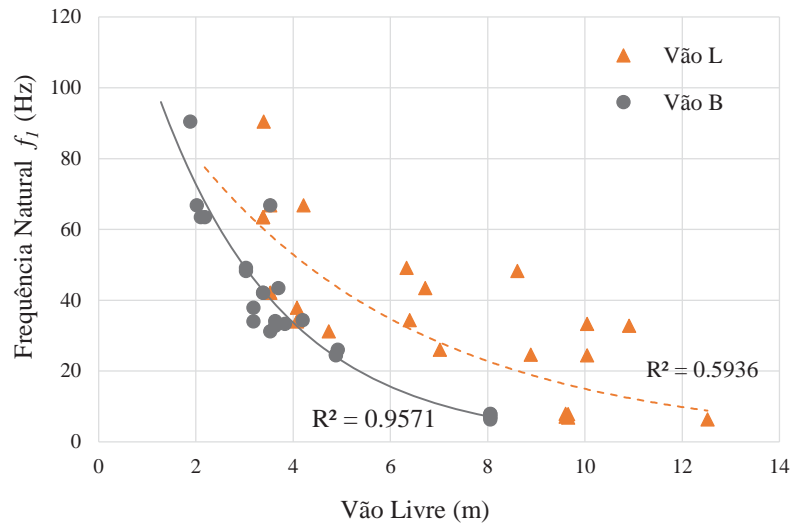
Tabela 17 – Frequências naturais obtidas pelo modelo numérico para os dez primeiros modos de vibração para as lajes nervuradas

	Lajes	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$
Edifício 1	LN01	49,15	60,54	88,76	108,63	131,48	145,07	150,72	166,40	183,10	187,94
	LN02	24,59	30,34	45,06	65,95	68,32	69,23	78,50	95,60	98,28	120,35
	LN03	32,78	36,35	45,44	60,76	81,71	101,35	103,08	106,82	107,76	114,08
	LN04	25,96	45,09	68,59	79,64	80,78	106,13	126,87	130,17	132,02	139,15
	LN05	43,37	55,83	83,42	112,43	119,33	123,44	136,87	166,72	172,05	187,90
	LN06	48,27	53,50	66,79	88,95	118,64	133,86	144,42	146,90	153,57	153,97
	LN07	24,39	28,51	39,54	57,82	65,84	68,18	74,88	82,11	87,61	106,75
	LN08	33,26	36,71	46,41	63,39	86,74	92,49	102,58	104,34	109,24	115,11
	LN09	66,82	108,20	158,98	180,83	183,06	224,67	233,35	237,21	244,87	250,74
	LN10	34,36	57,76	91,46	98,28	104,84	134,31	149,70	172,44	177,65	177,92
Edifício 2	LN11	34,07	69,26	86,78	110,83	128,02	159,40	166,14	174,90	183,83	202,72
	LN12	34,00	69,11	86,79	110,82	127,80	159,09	166,67	172,15	184,17	202,29
	LN13	90,40	130,33	200,87	240,71	263,18	277,71	293,04	302,97	324,98	328,86
	LN14	42,10	85,82	85,82	119,23	154,37	154,63	179,62	179,62	229,29	238,25
	LN15	31,14	55,79	76,89	87,36	96,45	116,55	119,00	158,74	159,73	164,51
	LN16	63,46	98,28	150,29	167,11	179,88	200,03	245,93	256,05	261,25	273,31
	LN17	133,19	226,87	313,24	326,33	337,89	360,61	377,62	385,86	447,94	466,50
	LN18	37,89	66,55	103,93	117,44	122,45	161,43	175,30	184,72	198,69	212,02
	LN19	42,10	85,82	85,82	119,23	154,37	154,63	179,62	179,62	229,29	238,25
	LN20	66,74	98,29	158,07	188,07	206,66	220,64	236,63	246,46	287,49	300,86
	LN21	63,46	98,28	150,29	167,11	179,88	200,03	245,93	256,05	261,25	273,31
Edifício 3	LN22	6,33	9,63	16,78	19,08	21,22	26,50	27,40	35,41	38,90	40,53
	LN23	7,83	16,24	19,93	25,87	30,78	38,25	39,53	43,97	50,57	53,91
	LN24	7,10	15,77	18,14	24,79	30,56	36,54	37,26	42,59	50,22	51,83
	LN25	6,81	14,25	18,00	23,62	27,22	34,35	36,55	41,76	44,66	49,27
	LN26	7,86	16,30	20,01	26,05	30,84	38,48	39,65	44,24	50,63	54,30

Fonte: Autor.

Buscando encontrar relações entre as frequências e a geometria, na Figura 53 é traçado um diagrama da frequência natural em função dos vãos  $B$  e  $L$  das lajes nervuradas.

Figura 53 - Frequências naturais do modelo em elementos finitos das lajes nervuradas em função dos vãos



Fonte: Autor.

Assim como nos resultados experimentais, o aumento das frequências naturais apresenta maior relação com o aumento do vão livre  $B$ , resultando um coeficiente de determinação de 95,7% em contraste com 59,4% resultado da relação das frequências com o vão livre  $L$ .

Comparando as mesmas amostras citadas nos resultados experimentais, a influência do parâmetro  $B$  é clara, conforme Tabela 18.

Tabela 18 – Comparação entre frequências naturais para as lajes LN02, LN07 e LN25

Laje	$L$ (m)	$B$ (m)	$f_1$ (Hz)
LN02	8,89	4,88	24,59
LN07	10,05	4,88	24,39
LN25	9,65	8,05	6,81

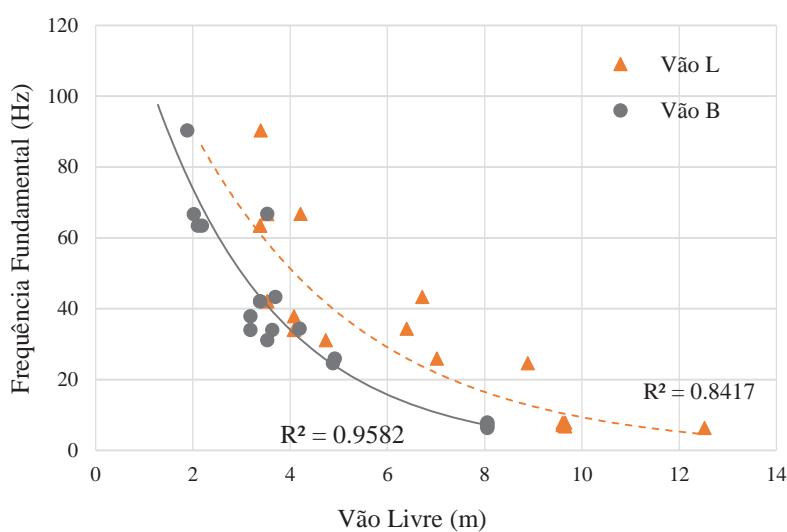
Fonte: Autor.

Avaliando as lajes LN07 e LN25 que apresentam valores semelhantes para o comprimento  $L$ , há um aumento em 258,1% na frequência natural com a redução de 39,4% do vão  $B$ . Em relação as lajes LN07 e LN02, o vão  $L$  da laje LN07 é 13,0% maior que o vão  $L$  da laje LN02 e ambas possuem o mesmo vão  $B$ . Nesse caso há uma redução de apenas 0,8% na frequência natural com o aumento do vão  $L$ .



Na Figura 54, é plotado o diagrama da relação entre os vãos e as frequências agora removendo as lajes com razão  $L/B > 2,0$  (lajes unidirecionais). Conforme observado, os modelos se tornam mais precisos quando selecionadas somente as lajes consideradas bidirecionais de acordo com sua geometria. Há melhoria na correlação da curva de frequências com o vão  $L$  pois, para lajes bidirecionais, a rigidez em  $B$  e  $L$  são semelhantes à medida que  $L/B$  se aproxima de 1,0.

Figura 54 - Frequências naturais do modelo em elementos finitos das lajes nervuradas bidirecionais em função dos vãos



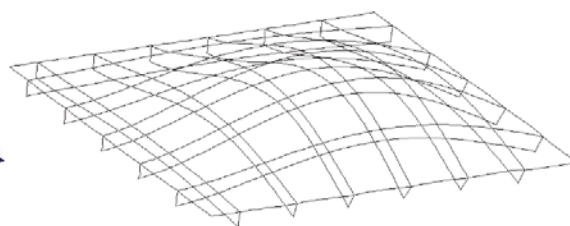
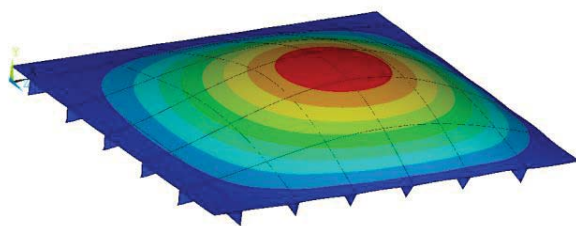
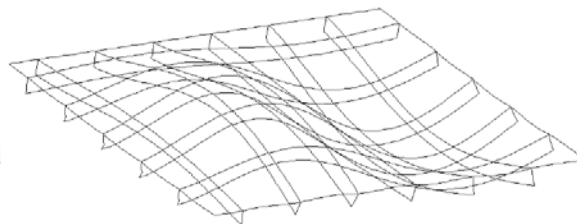
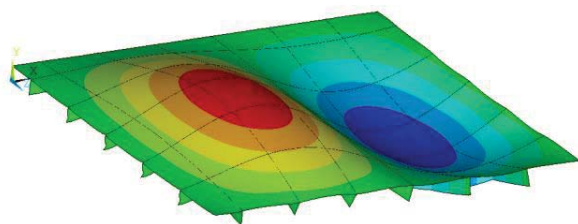
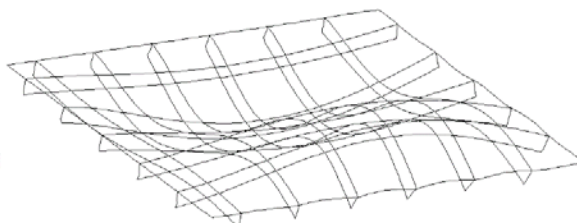
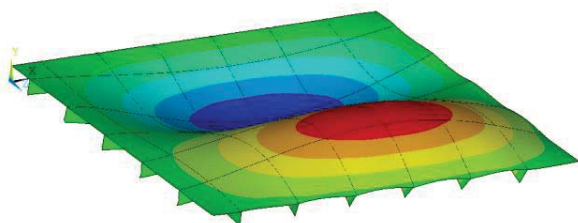
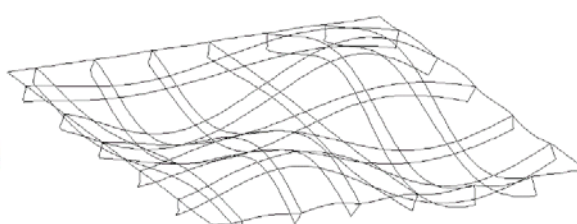
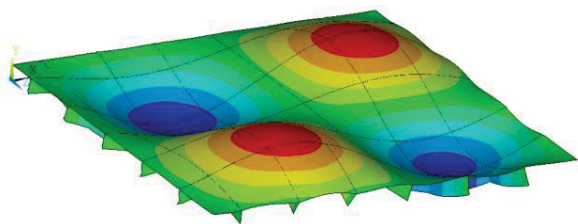
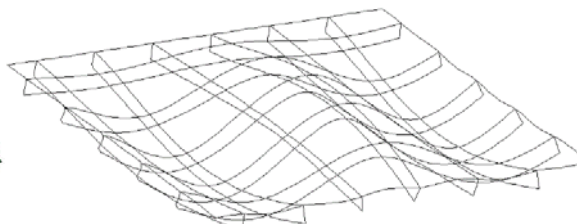
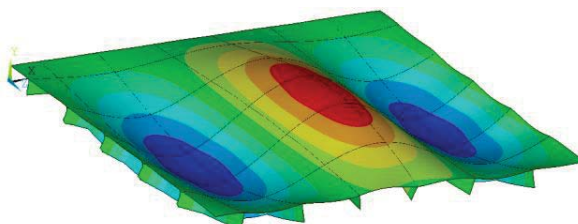
Fonte: Autor.

Além das frequências naturais, registraram-se os modos de vibração das lajes.

Na Figura 55 os cinco primeiros modos de vibração para a laje LN11 são apresentados como exemplo. Vale ressaltar que as demais lajes com comportamento bidirecional apresentaram os primeiros modos de vibração semelhantes aos modos mostrados na figura. Observa-se que, independente das ligações estruturais, os modos de vibração dos modelos apresentam efeitos de flexão predominantes.

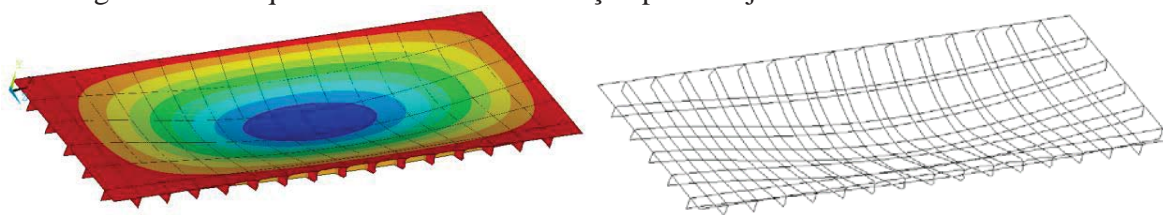
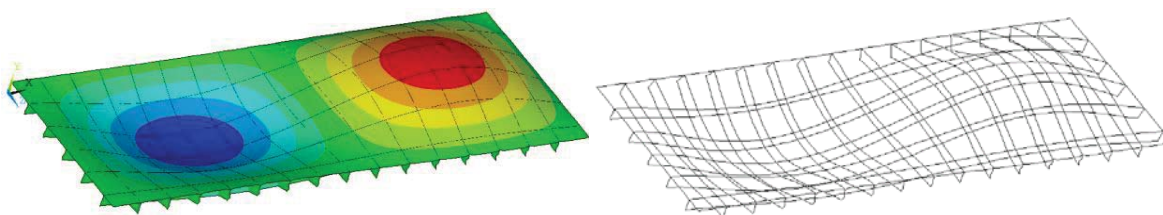
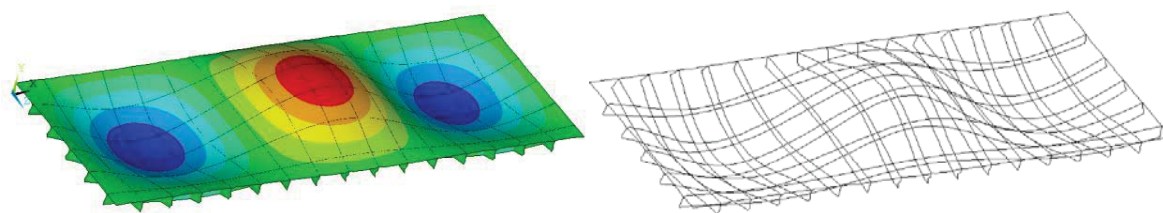
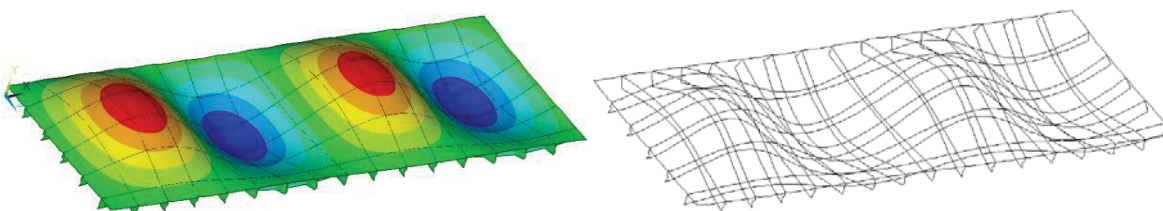
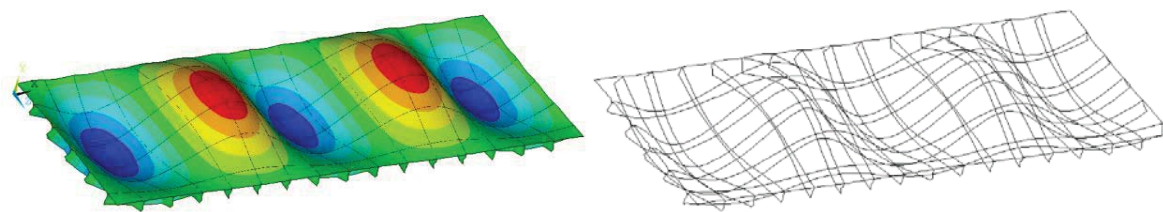
Para lajes unidirecionais com relação  $L/B > 2,0$ , os modelos também apresentam predominantemente modos de flexão. Nesse caso, os primeiros modos de vibração são semelhantes para essas lajes, as curvaturas tendem a se distribuir principalmente em uma direção, e múltiplas curvaturas aparecem no sentido contrário a partir do quinto harmônico para algumas lajes. A Figura 56 traz um exemplo de modelo computacional para lajes nervuradas com comportamento unidirecional, referente à laje LN03.

Figura 55 – Frequências e modos de vibração para a laje nervurada bidirecional LN11

(a) 1º Modo de vibração:  $f_{n1} = 34,07$  Hz(b) 2º Modo de vibração:  $f_{n2} = 69,26$  Hz(c) 3º Modo de vibração:  $f_{n3} = 86,78$  Hz(d) 4º Modo de vibração:  $f_{n4} = 110,83$  Hz(e) 5º Modo de vibração:  $f_{n5} = 128,02$  Hz

Fonte: Autor.

Figura 56 – Frequências e modos de vibração para a laje nervurada unidirecional LN03

(a) 1º Modo de vibração:  $f_{n1} = 32,78$  Hz(b) 2º Modo de vibração:  $f_{n1} = 36,35$  Hz(c) 3º Modo de vibração:  $f_{n1} = 45,44$  Hz(d) 4º Modo de vibração:  $f_{n1} = 60,76$  Hz(e) 5º Modo de vibração:  $f_{n1} = 81,71$  Hz

Fonte: Autor.

### 4.3.2 Lajes pré-moldadas

A partir dos modelos computacionais obtiveram-se as frequências naturais correspondentes aos dez primeiros modos normais de vibração para as lajes pré-moldadas. Esses resultados são apresentados na Tabela 19.

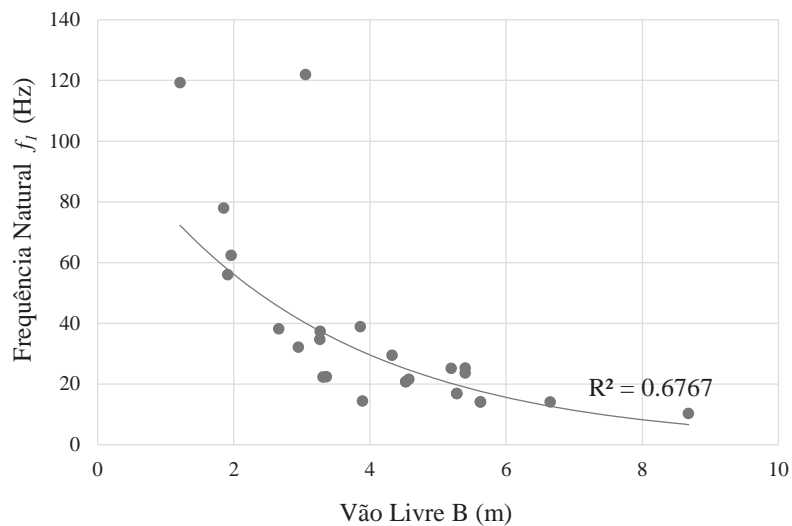
Tabela 19 – Frequências naturais obtidas pelo modelo numérico para os dez primeiros modos de vibração para as lajes pré-moldadas

	Lajes	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$
Edifício 4	LP01	22,22	25,68	32,56	43,20	57,59	69,32	72,37	75,53	78,42	87,62
	LP02	38,12	55,12	88,64	112,28	126,00	136,52	144,51	154,05	195,71	196,82
	LP03	32,09	39,58	53,11	71,57	94,02	98,19	98,68	104,92	117,09	119,26
	LP04	77,86	85,71	101,89	127,24	161,80	198,02	205,43	239,23	245,53	251,62
	LP05	37,33	51,94	81,93	96,36	109,76	125,88	135,97	175,47	182,00	182,49
	LP06	34,62	39,69	50,27	66,99	89,79	92,65	97,59	107,27	118,14	122,16
	LP07	22,37	31,73	50,11	66,65	74,65	77,06	90,44	109,83	111,89	114,28
Edifício 5	LP08	16,76	24,05	38,82	50,39	56,24	60,33	68,51	75,73	87,46	87,97
	LP09	14,07	15,64	18,75	23,44	29,85	37,82	38,45	40,02	43,10	47,41
	LP10	16,76	24,05	38,82	50,39	56,24	60,33	68,51	75,73	87,46	87,97
	LP11	29,41	30,34	32,20	35,00	38,81	43,59	49,39	56,18	64,00	72,78
	LP12	14,05	15,97	19,60	25,01	32,26	41,24	44,49	46,15	49,58	51,96
	LP13	14,05	15,97	19,60	25,01	32,26	41,24	44,49	46,15	49,58	51,96
	LP14	20,70	21,58	23,30	25,90	29,40	33,79	39,11	45,33	52,47	60,46
	LP15	10,20	11,44	13,97	17,87	23,28	27,81	29,07	30,07	31,53	35,19
	LP16	20,70	21,58	23,30	25,90	29,40	33,79	39,11	45,33	52,47	60,46
	LP17	21,52	22,48	24,33	27,12	30,87	35,56	41,23	47,84	55,43	63,89
	LP18	38,80	43,39	53,16	68,11	88,40	104,46	108,65	112,71	117,22	130,27
	LP19	25,13	28,27	34,83	44,88	58,64	67,95	70,96	75,58	76,94	85,97
	LP20	23,52	30,90	46,69	61,84	68,65	69,46	82,21	98,80	102,20	111,20
	LP21	25,19	27,62	32,57	40,14	50,57	63,60	68,44	70,75	75,42	79,18
	LP22	121,93	126,20	137,19	154,39	178,35	206,80	216,46	242,10	279,49	295,92
Edifício 6	LP23	62,28	71,81	91,15	121,00	161,21	185,36	194,44	203,29	210,86	218,35
	LP24	14,35	22,32	37,00	50,00	56,58	58,05	67,17	68,22	69,79	79,09
	LP25	56,00	91,54	154,78	156,15	157,51	185,11	185,55	211,02	248,40	261,29
	LP26	119,24	138,75	174,92	178,62	186,35	238,98	246,75	316,87	405,99	415,74

Fonte: Autor.

Na Figura 57 são plotadas as frequências para o primeiro modo normal de vibração conforme tabela acima em função do vão livre  $B$ , sentido no qual as vigotas treliçadas foram posicionadas.

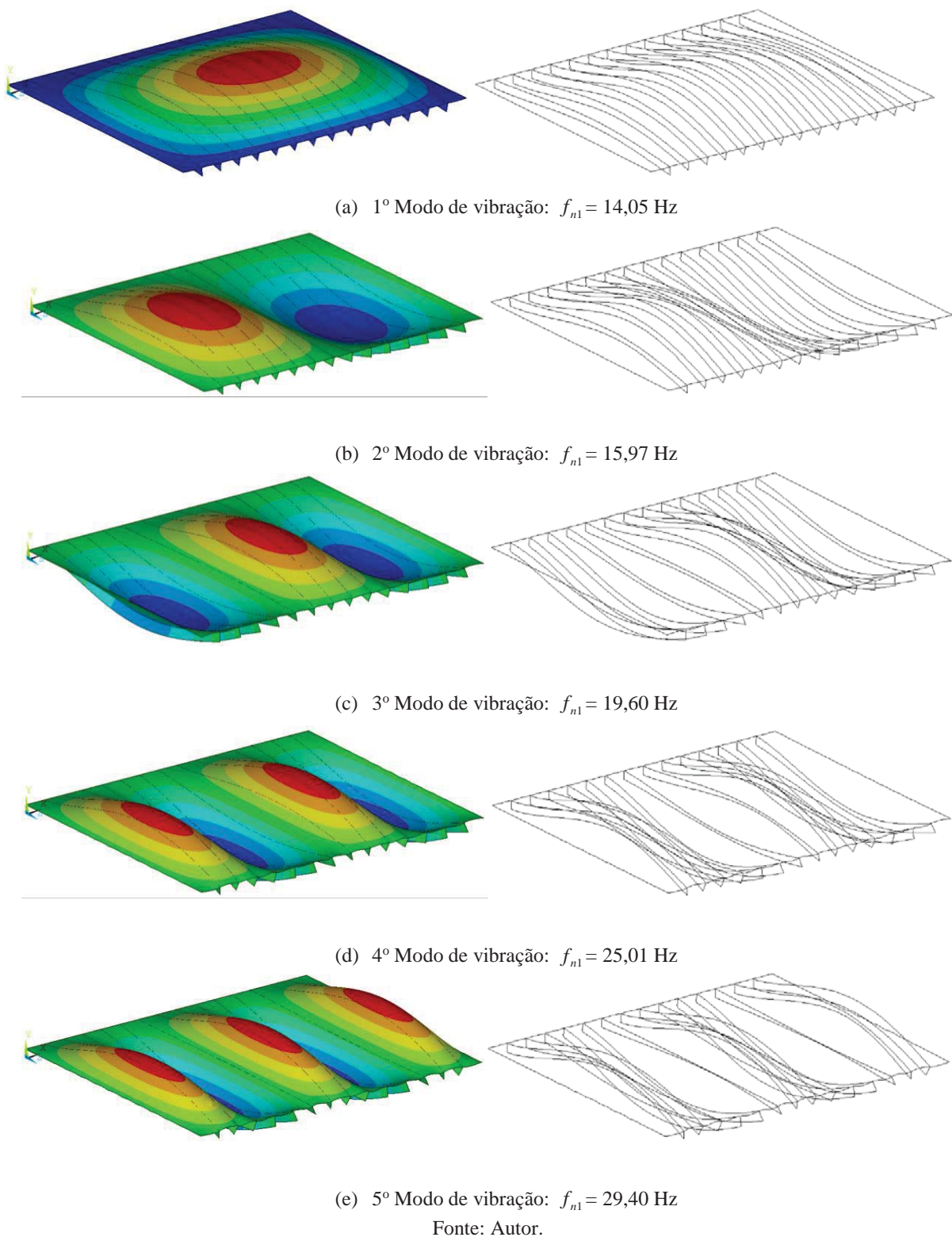
Figura 57 - Frequências naturais do modelo em elementos finitos das lajes pré-moldadas em função do vão  $B$



Observando o diagrama, as frequências das lajes pré-moldadas tendem a diminuir com o aumento do vão livre, contudo a relação entre ambos não é tão precisa quanto observado para lajes nervuradas.

Na Figura 58 os modos normais para a laje LP12 são apresentados. Da mesma forma, todas as lajes pré-moldadas apresentaram modos de vibração semelhantes, com curvaturas no sentido em que as vigotas treliçadas são distribuídas, e múltiplas curvaturas no sentido contrário a partir do sexto modo de vibração para algumas lajes. O modo de flexão com uma ou várias curvaturas é predominante.

Figura 58 – Frequências e modos de vibração para a laje pré-moldada unidirecional LP12



#### 4.4 Comparações

Nesta seção, são comparados os resultados experimentais, analíticos e numérico-computacionais para as lajes nervuradas e pré-moldadas, e são apontadas algumas relações pertinentes entre os resultados para os dois tipos de lajes. Além disso, são feitas observações sobre os limites aceitáveis de vibrações de acordo com a revisão da literatura.

Na Tabela 20 são apresentados os resultados de frequências naturais e amortecimentos para as lajes nervuradas, e na Tabela 21 são apontados os resultados para lajes pré-moldadas. Nas tabelas a seguir,  $f_n$  é a frequência natural experimental,  $f_{a,he}$  é a frequência calculado pelo método das lajes com espessura constante,  $f_a$  é a frequência calculada considerando as nervuras das lajes e  $f_1$  a frequência natural obtida pela modelagem computacional.

Tabela 20 – Lajes nervuradas: frequências naturais experimentais, analíticas e numéricas, e amortecimentos pelo método do decremento logarítmico e da largura da banda

Laje	$f_n$ (Hz)	$f_{a,he}$ (Hz)	$f_n / f_{a,he}$ %	$f_a$ (Hz)	$f_n / f_a$ %	$f_1$ (Hz)	$f_n / f_1$ %	$\zeta_{dl}$	$\zeta_{lb}$	
Edifício 1	LN01	28,52	49,92	75,0	32,14	12,7	49,15	72,3	0,0602	0,0298
	LN02	25,78	27,64	7,2	17,95	-30,4	24,59	-4,6	0,0416	0,0401
	LN03	32,29	33,28	3,1	21,79	-32,5	32,78	1,5	0,0851	0,0449
	LN04	31,64	22,77	-28,0	14,17	-55,2	25,96	-18,0	0,0409	0,0409
	LN05	39,19	48,23	23,1	31,32	-20,1	43,37	10,7	0,0647	0,0594
	LN06	31,70	48,14	51,9	31,43	-0,9	48,27	52,3	0,0546	0,0570
	LN07	24,22	26,61	9,9	17,45	-28,0	24,39	0,7	0,0560	0,0218
	LN08	29,95	30,13	0,6	19,67	-34,3	33,26	11,1	0,0690	0,0473
	LN09	44,53	61,25	37,5	38,75	-13,0	66,82	50,1	0,0425	0,0465
	LN10	32,42	32,31	-0,3	20,31	-37,4	34,36	6,0	0,0452	0,0306
Edifício 2	LN11	31,25	34,19	9,4	26,73	-14,5	34,07	9,0	0,0340	0,0300
	LN12	41,80	40,24	-3,7	31,32	-25,1	34,00	-18,7	0,0615	0,0538
	LN13	71,35	100,75	41,2	76,85	7,7	90,40	26,7	0,0650	0,0760
	LN14	38,15	55,97	46,7	42,67	11,8	42,10	10,4	0,0337	0,0396
	LN15	47,40	34,76	-26,7	26,81	-43,4	31,14	-34,3	0,0344	0,0230
	LN16	56,77	77,15	35,9	59,15	4,2	63,46	11,8	0,0645	0,0857
	LN17	113,02	149,49	32,3	123,32	9,1	133,19	17,8	0,0650	0,1902
	LN18	49,48	40,24	-18,7	31,32	-36,7	37,89	-23,4	0,0578	0,0893
	LN19	43,23	55,97	29,5	42,67	-1,3	42,10	-2,6	0,0624	0,1008
	LN20	47,40	84,93	79,2	64,97	37,1	66,74	40,8	0,0539	0,0243
	LN21	67,71	72,55	7,1	55,77	-17,6	63,46	-6,3	0,0442	0,0809
Edifício 3	LN22	7,82	6,55	-16,2	4,82	-38,4	6,33	-19,1	0,0475	0,0418
	LN23	7,82	8,14	4,1	6,05	-22,6	7,83	0,1	0,0356	0,0356
	LN24	7,04	5,90	-16,2	4,91	-30,3	7,10	0,9	0,0335	0,0335
	LN25	7,84	5,88	-25,0	4,89	-37,6	6,81	-13,1	0,0435	0,0435
	LN26	7,93	8,17	3,0	6,07	-23,5	7,86	-0,9	0,0398	0,0398

Fonte: Autor.

Tabela 21 – Lajes pré-moldadas: frequências naturais experimentais, analíticas e numéricas, e amortecimentos pelo método do decremento logarítmico e da largura da banda

Laje	$f_n$ (Hz)	$f_{a,he}$ (Hz)	$f_n / f_{a,he}$ %	$f_a$ (Hz)	$f_n / f_a$ %	$f_1$ (Hz)	$f_n / f_1$ %	$\zeta_{dl}$	$\zeta_{lb}$	
Edifício 4	LP01	36,92	29,70	-19,6	26,30	-28,8	22,22	-39,8	0,0306	0,0361
	LP02	47,14	53,24	12,9	41,06	-12,9	38,12	-19,1	0,1227	0,0515
	LP03	59,38	44,91	-24,4	35,95	-39,5	32,09	-46,0	0,0276	0,0218
	LP04	36,46	91,87	152,0	82,41	126,0	77,86	113,5	0,0809	0,0508
	LP05	36,46	41,70	14,4	35,18	-3,5	37,33	2,4	0,0692	0,0352
	LP06	30,15	43,04	42,8	38,37	27,3	34,62	14,8	0,0464	0,0887
	LP07	65,10	35,13	-46,0	28,05	-56,9	22,37	-65,6	0,0548	0,1734
Edifício 5	LP08	16,62	22,30	34,2	18,50	11,3	16,76	0,8	0,0295	0,0425
	LP09	14,58	19,76	35,5	16,67	14,3	14,07	-3,5	0,0609	0,0881
	LP10	15,36	22,30	45,2	18,50	20,4	16,76	9,1	0,0445	0,0781
	LP11	21,61	39,19	81,4	36,87	70,6	29,41	36,1	0,0436	0,0351
	LP12	17,97	20,50	14,1	16,43	-8,6	14,05	-21,8	0,0504	0,0679
	LP13	17,06	20,50	20,2	16,43	-3,7	14,05	-17,6	0,0283	0,0448
	LP14	14,84	26,00	75,2	23,70	59,7	20,70	39,5	0,0895	0,0333
	LP15	14,64	10,10	-31,0	6,68	-54,4	10,20	-30,3	0,0164	0,0282
	LP16	23,05	26,00	12,8	23,70	2,8	20,70	-10,2	0,1098	0,0731
	LP17	33,75	25,53	-24,4	31,62	-6,3	21,52	-36,2	0,0467	0,0900
	LP18	25,52	61,74	141,9	68,51	168,5	38,80	52,0	0,0505	0,0420
	LP19	34,77	35,37	1,7	37,79	8,7	25,13	-27,7	0,0309	0,0408
	LP20	35,94	39,11	8,8	42,32	17,8	23,52	-34,6	0,0514	0,0572
	LP21	31,51	30,70	-2,6	34,04	8,0	25,19	-20,1	0,0368	0,0409
	LP22	57,94	79,94	38,0	101,32	74,9	121,93	110,4	0,0554	0,0998
Edifício 6	LP23	60,94	172,03	182,3	97,38	59,8	62,28	2,2	0,0797	0,0275
	LP24	28,26	20,88	-26,1	14,37	-49,2	14,35	-49,2	0,0335	0,0429
	LP25	95,24	95,18	-0,1	63,85	-33,0	56,00	-41,2	0,0312	0,0312
	LP26	62,62	156,49	149,9	127,25	103,2	119,24	90,4	0,0932	0,1338

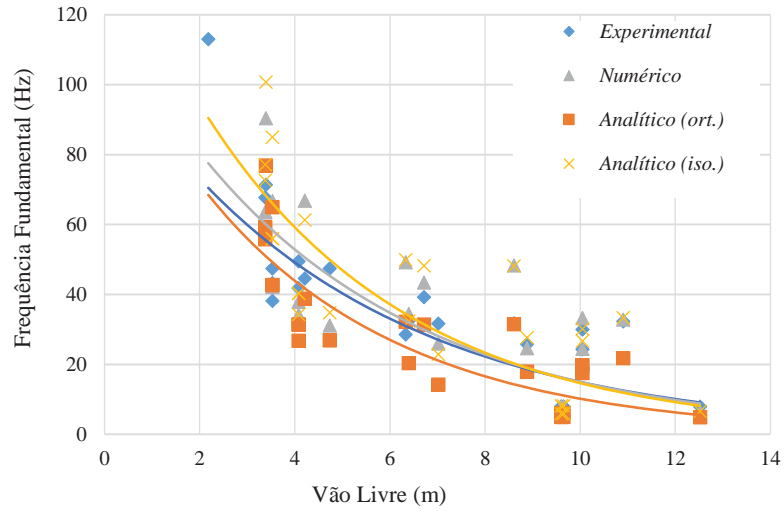
Fonte: Autor.

Na Figura 59 e na Figura 60 são sobrepostas as curvas de frequência natural em função do vão  $L$  para os quatro métodos abordados, para lajes nervuradas e pré-moldadas, respectivamente.

Através dos gráficos nota-se que a correlação entre as curvas para os métodos numéricos e analíticos em relação aos ensaios experimentais para as lajes nervuradas é excelente. Com o aumento do vão e consequentemente redução da frequência fundamental, as curvas tendem a se sobrepor. Em relação às lajes pré-moldadas treliçadas, a correlação é média, devido principalmente a variabilidade na espessura da laje construída em relação ao especificado em projeto. Para os dois métodos construtivos os resultados experimentais estão entre os resultados numéricos e analíticos.

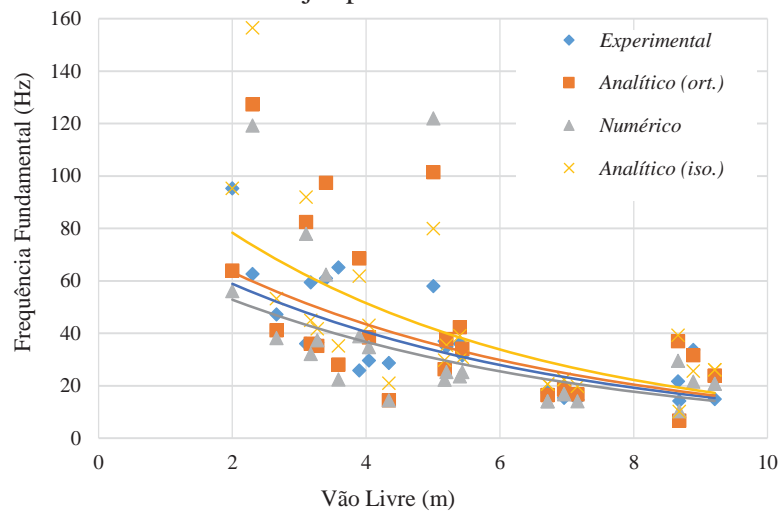


Figura 59 - Comparação entre as frequências naturais experimentais, numéricas e analíticas para lajes nervuradas



Fonte: Autor.

Figura 60 - Comparação entre as frequências naturais experimentais, numéricas e analíticas para lajes pré-moldadas



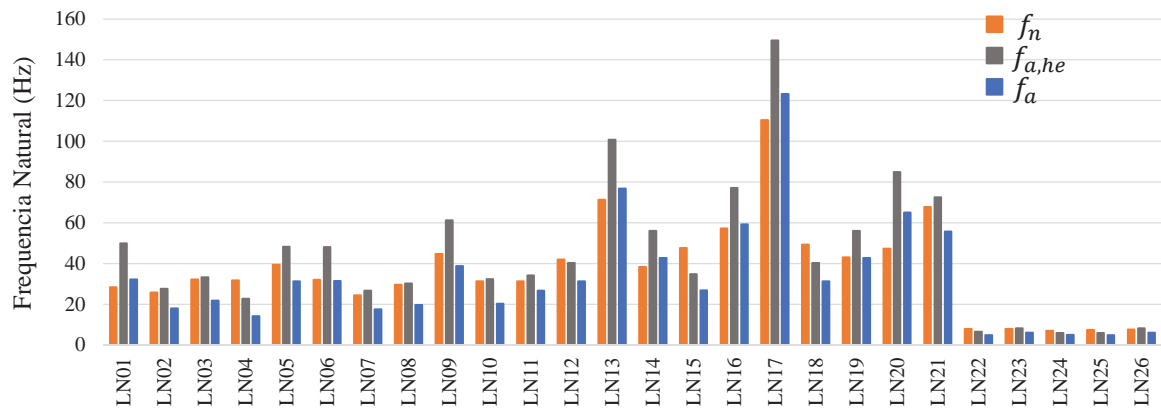
Fonte: Autor.

#### 4.4.1 Frequências experimentais vs. resultados analíticos

A seguir são comparadas as frequências experimentais  $f_n$  para o primeiro modo normal e as frequências obtidas pelo cálculo manual: pelas equações para lajes isotrópicas ( $f_{a,he}$ ) e pelas equações para lajes ortotrópicas ( $f_a$ ).

A partir dos valores apresentados na Tabela 20, construiu-se o gráfico da Figura 61 que traz uma comparação entre os valores experimentais e analíticos.

Figura 61 – Comparação entre os resultados experimentais e analíticos para lajes nervuradas

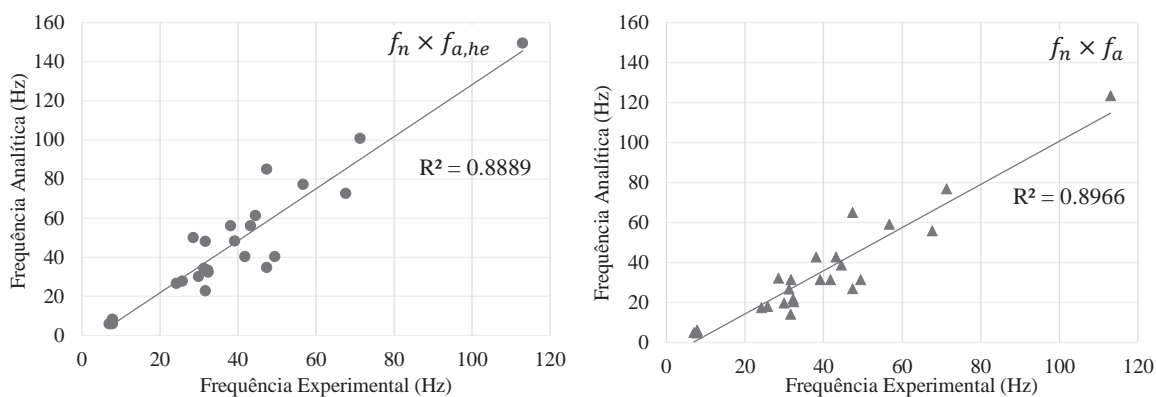


Fonte: Autor.

Sabe-se que quando uma estrutura possui frequências naturais baixas, ela se torna mais suscetível aos efeitos dinâmicos induzidos pelas atividades humanas. Isto posto, observa-se que vinte das lajes avaliadas apresentaram frequências experimentais acima das frequências calculadas  $f_a$ . Para essas lajes, o cálculo analítico subestima a frequência fundamental, o que significa que calcular as frequências naturais das lajes através das formulações para lajes ortotrópicas representou uma estimativa conservativa para as lajes nervuradas. O mesmo não ocorreu para as frequências  $f_{a,he}$ , em que a maioria dos resultados analíticos mostraram-se superiores aos experimentais. Além disso,  $f_{a,he}$  apresenta grande diferença com os valores experimentais, especialmente para as lajes LN01, LN09, LN13 e LN17.

Na Figura 62, busca-se uma relação entre os resultados experimentais e analíticos para as lajes nervuradas.

Figura 62 – Relação entre frequências experimentais e analíticas para lajes nervuradas

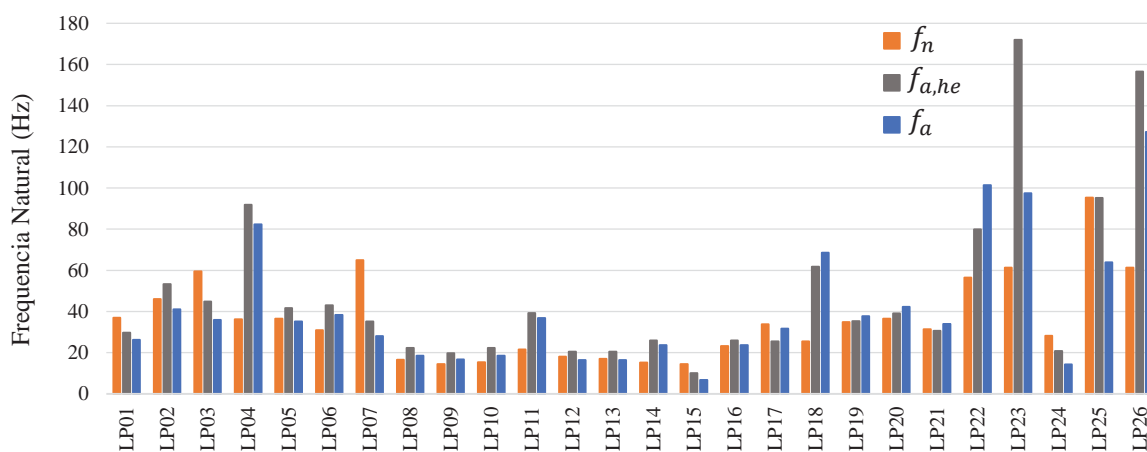


Fonte: Autor.

Observando a relação anterior, o cálculo manual garante boas aproximações para uma estimativa inicial das frequências naturais das lajes nervuradas para ambos os métodos estudados. A relação entre as frequência calculadas e as frequências experimentais pode ser descrita por uma relação linear com certa precisão, garantindo coeficientes de determinação de aproximadamente 89,0% para os dois métodos de cálculo.

Em relação às lajes pré-moldadas, os valores experimentais e analíticos podem ser observados na Tabela 21 e na Figura 63 esses valores são comparados.

Figura 63 – Comparação entre os resultados experimentais e analíticos para lajes pré-moldadas



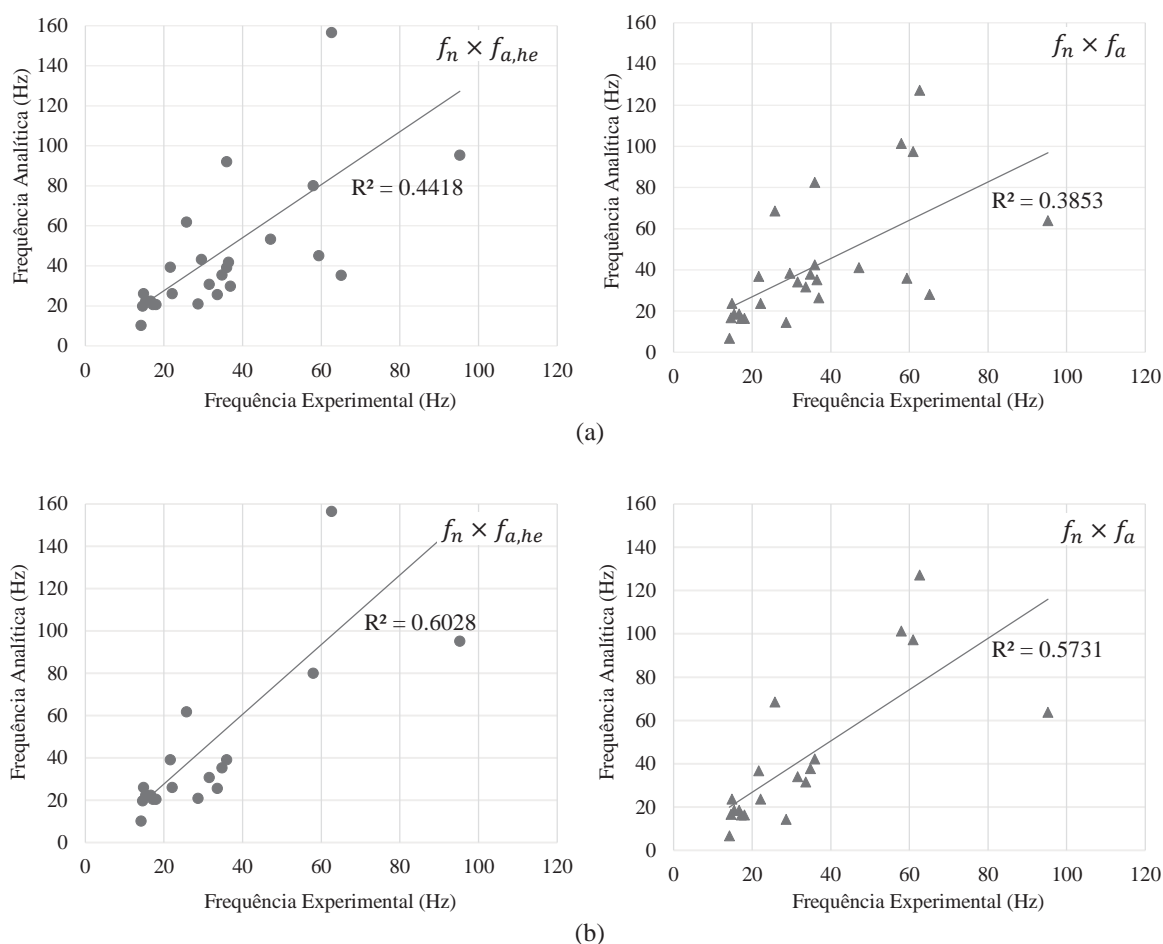
Fonte: Autor.

De uma maneira geral, para as lajes pré-moldadas, os dois métodos mostraram-se menos conservativos quando comparados com os valores experimentais. Contudo, o método analítico para lajes ortotrópicas propiciou valores mais próximos aos experimentais, embora tenha apresentado

grandes diferenças em relação aos resultados experimentais para as lajes LP04, LP07, LP11, LP18, LP22, LP23 e LP26.

Na Figura 64 relações entre os resultados experimentais e analíticos são apresentadas. Avaliando a Figura 64 (a), nota-se que há certa relação entre as frequências experimentais e analíticas para ambos os métodos, embora a comparação expresse que os valores calculados se correlacionam mal com os resultados da medição, com coeficientes de determinação baixos para ambos os casos.

Figura 64 – Relação entre frequências experimentais e analíticas para lajes pré-moldadas: (a) todas as amostras e (b) lajes com material de enchimento em EPS (LP08 a LP26)



Fonte: Autor.

Entre as amostras de lajes pré-moldadas, as lajes LP01 a LP07 possuem como material de enchimento, tabelas cerâmicas, diferente das demais lajes que utilizam EPS para esta finalidade.

Na Figura 64 (b) a relação entre as frequências analíticas e experimentais é definida novamente, agora mantendo somente as lajes com enchimento em placas de EPS. Percebe-se uma melhoria significativa entre a relação, com coeficiente de determinação de aproximadamente 60,3% para as frequências  $f_{a,he}$  e 57,3% para as frequências  $f_a$ . No entanto, os resultados para as lajes pré-moldadas ainda não convergem satisfatoriamente. Isso pode ser justificado por alguns fatores observados:

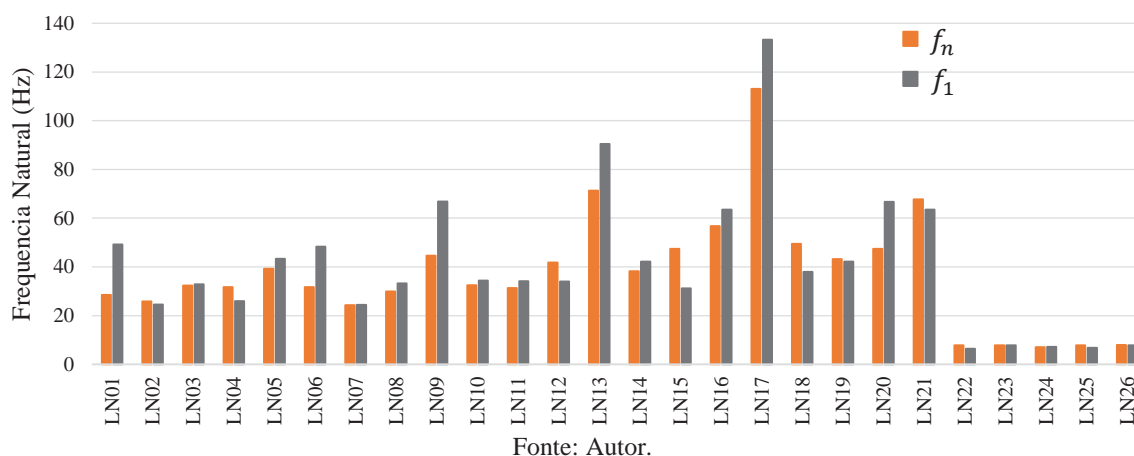
- a) nas lajes pré-moldadas foram utilizados diferentes materiais de enchimento para o preenchimento das cavidades entre as nervuras. Embora os métodos de cálculo manuais não considerem a influência desses materiais, estes podem ter contribuído de alguma forma na rigidez e massa do pavimento;
- b) foram realizadas simplificações na geometria efetiva da seção transversal das lajes pré-moldadas para o cálculo da inércia e da altura equivalente da laje, o que pode ter influenciado, por exemplo, na rigidez das lajes;
- c) além dos fatores mencionados anteriormente, a falta de uniformidade geométrica na espessura da capa de concreto decorrente do processo construtivo nas lajes pré-moldadas é o fator principal responsável pela dispersão dos resultados.

#### 4.4.2 Frequências experimentais x modelagem computacional

Através dos valores obtidos pelas modelagens das lajes por elementos finitos é possível realizar a comparação entre as frequências para o primeiro modo de vibração  $f_1$ , com os valores experimentais  $f_n$ .

Com base nos valores da Tabela 20, a Figura 65 mostra a comparação entre os resultados experimentais e numéricos para lajes nervuradas.

Figura 65 – Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para lajes nervuradas

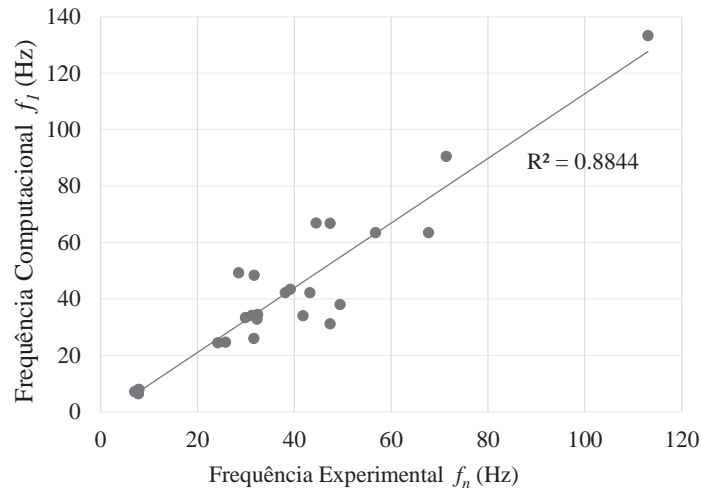


Como pode ser observado, na maioria das amostras o modelo numérico traz resultados de frequência superiores aos experimentais. Embora este seja um indicativo de que o modelo pode não ser conservativo, os valores entre as frequências são ainda mais próximos do que comparando-se com o cálculo manual. Em treze das amostras a variação dos valores numéricos é de 10% ou menos em relação aos experimentais. Maiores diferenças entre os resultados foram encontradas para as lajes LN01, LN09, LN13 e LN17.

No entanto, espera-se que o concreto utilizado na edificação, por possuir mais de 28 dias de cura, e ainda, considerando a margem estatística, tenha  $f_c$  superior a  $f_{ck}$  e, conseqüentemente maior módulo de deformação. Esses aspectos levariam a valores experimentais para frequência natural superiores aos resultados numéricos. O fato de o modelo numérico prever uma frequência natural maior que a experimental pode ser um indicativo de que o  $f_c$  do concreto na obra não atingiu o  $f_{ck}$  de projeto.

Na Figura 66, é estabelecida uma relação entre os resultados experimentais e numéricos das lajes nervuradas.

Figura 66 – Relação entre frequências experimentais e numéricas para lajes nervuradas



Fonte: Autor.

O diagrama mostra que o modelo em elementos finitos garante boas aproximações em relação às frequências naturais experimentais para as lajes nervuradas. A relação linear observada possui desvio padrão relativo de 88,4%, o que indica que o modelo simplificado, utilizando elementos de placa para a representação das nervuras e da capa de concreto, pode representar o modelo real da estrutura com certa precisão.

Em relação às lajes pré-moldadas, os resultados experimentais e numéricos disponibilizados na Tabela 21 são comparados graficamente por meio da Figura 67.

Nota-se que em quinze das amostras as frequências obtidas pelo modelo numérico foram inferiores aos resultados experimentais. Este pode ser um indicativo de que o modelo representa uma estimativa conservativa em relação aos resultados experimentais, e que, o concreto utilizado na estrutura real atingiu  $f_c$  superior a  $f_{ck}$ . Logo, a estrutura real possui módulo de deformação superior ao informado no modelo numérico, sendo, portanto, mais rígida e apresentando frequência natural maior. Houveram maiores diferenças em relação aos resultados experimentais, especialmente para as lajes LP04, LP07, LP22 e LP26.

Figura 67 – Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para lajes pré-moldadas



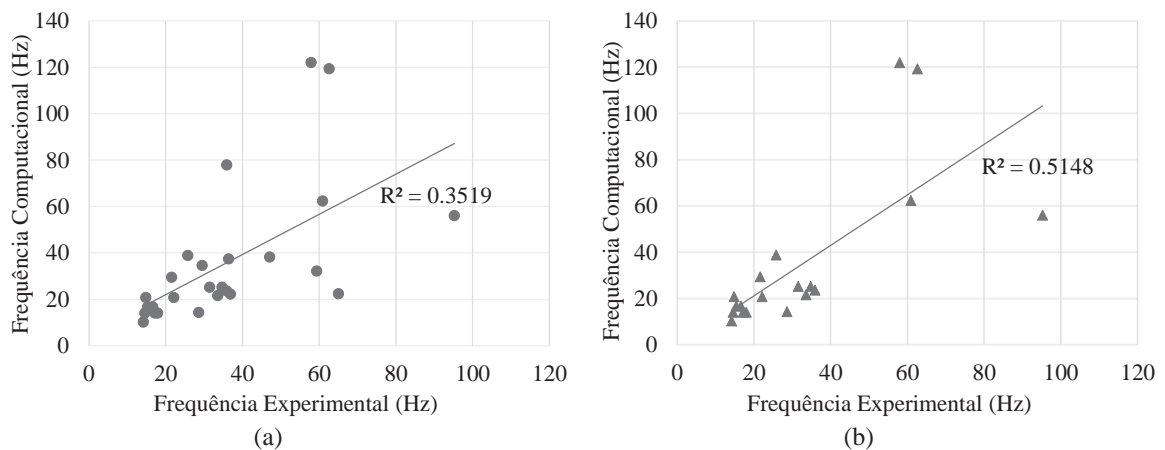
Fonte: Autor.

Na Figura 68, apresenta-se uma a relação entre os resultados experimentais e numéricos para as lajes pré-moldadas.

Como pode ser observado Figura 68 (a), novamente a dispersão dos dados mostra uma correlação com baixa precisão entre os resultados experimentais e numéricos, com coeficiente de determinação de 35,2%. Na Figura 68 (b) a relação é traçada novamente mantendo somente as lajes com material de enchimento em EPS. A melhoria no coeficiente de determinação é significativa, mas ainda não pode-se afirmar que os modelos numéricos representem as estruturas reais.

Figura 68 – Relação entre frequências experimentais e numéricas para lajes pré-moldadas:

(a) todas as amostras e (b) lajes com material de enchimento em EPS (LP08 a LP26)



Fonte: Autor.



#### 4.4.3 Lajes nervuradas vs. lajes pré-moldadas

Tratando-se das frequências naturais experimentais para lajes nervuradas e pré-moldadas, embora a comparação desse parâmetro entre diferentes sistemas construtivos não seja um processo simples, uma vez que envolve uma série de variáveis e resultados sujeitos a erros, buscou-se relacionar algumas lajes com vãos semelhantes, conforme apresentado na Tabela 22.

Tabela 22 – Comparação de frequências naturais entre lajes nervuradas e pré-moldadas

Lajes Nervuradas				Lajes Pré-Moldadas			
Laje	$L$ (m)	$B$ (m)	$f_n$ (Hz)	Laje	$L$ (m)	$B$ (m)	$f_n$ (Hz)
LN13	3,39	1,88	71,35	LP23	3,40	1,96	60,94
LN18	4,08	3,18	49,48	LP06	4,04	3,27	29,57
LN15	4,73	3,53	47,40	LP24	4,34	3,89	28,65
LN11	4,08	3,63	31,25	LP18	3,90	3,86	25,78
LN02	8,89	4,88	25,78	LP14	9,21	4,53	14,84
LN04	7,02	4,92	31,64	LP10	6,96	5,28	15,36

Fonte: Autor.

Avaliando a tabela, quando comparadas lajes com vãos semelhantes, como era de se esperar, as frequências naturais das lajes nervuradas analisadas tendem a ser maiores do que para as lajes pré-moldadas. As frequências para as lajes pré-moldadas, apresentadas na tabela anterior, são entre 14,6% e 51,5% inferiores em relação as lajes nervuradas.

Sabendo que a frequência natural depende da relação entre rigidez e massa, com o aumento da espessura da laje, a rigidez aumenta com o cubo da espessura ( $h^3$ ) enquanto a massa aumenta com ( $h^1$ ). Ou seja, a influência do aumento da espessura sobre a rigidez é muito maior do que sobre a massa, razão pela qual as lajes nervuradas, possuindo maior altura, resultam em sistemas mais rígidos do que as pré-moldadas.

Como as frequências naturais das lajes possuem estreita relação com suas dimensões, embora as lajes pré-moldadas aparentemente tenham tendência a frequências mais baixas, geralmente são utilizadas para vãos menores. Sendo assim, essas lajes podem não representar um problema quando utilizadas para com vãos livres regulares, em edificações residenciais por exemplo.

#### 4.4.4 Limites aceitáveis de vibrações

As normas e recomendações apresentadas na revisão da literatura que estabelecem limites para vibrações em lajes de edifícios visam oferecer conforto para os usuários. Nesse sentido, oferecem equações simplificadas para estimar parâmetros a serem comparados com os limites de vibração, que podem ser utilizados na fase de projeto ou para prever o comportamento dessas estruturas de uma forma simplificada quando não é possível a realização de testes modais de vibração livre ou forçada. As comparações realizadas são em função da atividade do caminhar humano, uma vez que as edificações estudadas não são destinadas a atividades outras além desta.

O primeiro critério é tratado na ABNT NBR 6118 (2014) e define limites em termos de frequências naturais para a segurança das edificações. A norma recomenda manter a frequência fundamental da estrutura afastada ao máximo da frequência de excitação. No limite mínimo estabelecido, a frequência fundamental deve ser pelo menos 1,2 vezes maior que a frequência crítica. Para isso, valores de frequência crítica são recomendados de acordo com a utilização do pavimento. Nesse sentido, as lajes nervuradas e pré-moldadas se enquadram melhor na categoria “escritórios”, em que a frequência crítica é definida como 4,0 Hz. Nenhuma das lajes nervuradas ou pré-moldadas deixou de atender esta especificação.

A ABNT NBR 8800 (1986) trata os limites em termos de aceleração de pico. Os valores aproximados de aceleração de pico para das lajes foram obtidos de acordo com a Equação (52), conforme sugerido pela norma. As acelerações de pico são então comparadas com os limites apresentados na Figura 25. A norma sugere que as lajes de concreto mais sensíveis são aquelas com frequências entre 4,0 e 15,0 Hz, e oferece um diagrama de comparação para frequências até 20,0 Hz. Entre as lajes compreendidas nessa limitação, todas as lajes nervuradas pertencentes ao Edifício 03, ou seja, LN22 a LN26, não atendem aos limites especificados. Para as pré-moldadas, as lajes LP08, LP10, LP12, LP13 e LP15, todas pertencentes ao Edifício 05, também não atendem aos limites de conforto.

Os limites foram avaliados também de acordo com os critérios oferecidos pelo AISC Design Guide #11 (Murray et al., 2016), um guia que trata das vibrações em estruturas metálicas e é vastamente utilizado nos países da América do Norte. Esse guia também traz seus limites em termos de aceleração de pico estabelecidos pela ISO2631-2, conforme Figura 26. A aceleração de pico para pavimentos de baixa frequência, com  $f_n < 9,0$  Hz pode ser estimada conforme a Equação

(54) e para pisos com  $f_n > 9,0$  Hz, conforme Equação (56), embora os autores ressaltem que lajes com frequência natural superior a 9,0 Hz não sofrem ressonância devido ao caminhar humano. As lajes nervuradas que não atendem as especificações desse guia são LN11, LN14, LN23, LN24 e LN26. Entre as pré-moldadas as seguintes lajes não atendem a esta limitação: LP01, LP05, LP08, LP10, LP13, LP18, LP20, LP24. Apesar de que um grande número de estruturas não atenda aos critérios do guia, como a principal atividade que pode causar ressonância nessas edificações é devido ao caminhar humano por tratarem-se de edificações residenciais e salas de aula, somente as lajes LN23, LN24, e LN26 podem oferecer algum problema de desconforto, já que estas lajes possuem frequência natural inferior a 9,0 Hz.

O último critério, estabelecido pelo guia PCI (2006), estabelece limites mínimos em termos de frequência fundamental. A frequência fundamental deve ser maior do que aquela obtida pela fórmula empírica apontada na Equação (57) de maneira a prevenir vibrações indesejadas que causem algum desconforto. As lajes que não atenderam a esse critério foram as lajes nervuradas pertencentes ao Edifício 03 (LN22 a LN26), e as lajes pré-moldadas LP10 e LP15.

De uma maneira geral, as lajes nervuradas que não atenderam a pelo menos dois dos limites abordados são as lajes do Edifício 03. Essas estruturas são caracterizadas por possuírem vãos maiores, com dimensões entre 8,05 e 12,52 metros. Além disso suas frequências naturais são de aproximadamente 7,0 Hz e, conforme os resultados experimentais, não possuem altos níveis de amortecimento. Esses fatores podem ser um indicativo de que essas lajes sejam mais suscetíveis aos efeitos das vibrações.

Entre as lajes pré-moldadas, as amostras LP08, LP10, LP13 e LP15 não atenderam a pelo menos dois dos critérios mencionados anteriormente. Essas estruturas têm dimensões entre 5,28 e 8,68 metros, e frequências naturais que variam entre 14,3 e 17,4 Hz. A faixa de frequência natural dessas estruturas dificilmente poderá coincidir as frequências do carregamento para o tipo de ocupação em que são destinadas.

Ressalta-se aqui que, embora algumas lajes não atendam a um ou mais dos limites abordados na literatura, isto não represente um indicativo de ineficiência estrutural. Com exceção da ABNT NBR 6118 (2014), os demais critérios tratam das vibrações em termos de conforto humano, assunto ainda pouco abordado nos cursos de graduação, e, como consequência, casualmente considerado no desenvolvimento dos projetos de edificações.

## 5 CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como foco analisar os parâmetros de vibração de frequências naturais e amortecimentos de dois diferentes tipos de sistemas construtivos de lajes de edifício, e avaliar se as estruturas estudadas atendem a certos limites de vibrações em estruturas apresentados na revisão da literatura.

Para isso, são realizadas análises dinâmicas experimentais numéricas e analíticas em 26 lajes nervuradas e 26 lajes pré-moldadas. As lajes nervuradas armadas nas duas direções, pertencem a três edifícios, dois deles residenciais e um utilizado como ambiente de ensino. As lajes pré-moldadas compostas de vigotas treliçadas e material inerte de enchimento, pertencem a três edifícios residenciais, dois ainda em fase de construção ou acabamentos. Através das medições experimentais obtiveram-se as frequências fundamentais das lajes e os fatores de amortecimento calculados pelo método do decremento logarítmico e pelo método da largura da banda, utilizando filtros de frequência.

As frequências experimentais são comparadas com resultados analíticos, obtidos através de equações para placas isotrópicas, considerando uma espessura equivalente à espessura de uma laje maciça; e por meio de equações para placas ortotrópicas. Além disso, foram criados modelos computacionais em software de elementos finitos para a representação numérica das lajes.

Com as medições realizadas é possível concluir que:

- a utilização de celular para o registro da resposta em aceleração das lajes fornece resultados satisfatórios que permitem afirmar que a utilização desse dispositivo é confiável, podendo ser uma alternativa válida para verificar as propriedades vibratórias das lajes de piso. Na maioria das amostras a diferença entre os resultados do dispositivo de celular em relação ao acelerômetro é inferior a 1,0%;
- o uso de filtros de frequência foi essencial no desenvolvimento da pesquisa, principalmente no cálculo dos fatores de amortecimento, permitindo selecionar o harmônico de interesse para o estudo desse parâmetro de vibração;
- no cálculo dos fatores de amortecimento através do método da largura da banda e do decremento logarítmico, nota-se que, para algumas amostras, há uma grande variação dos resultados entre os dois métodos. Nas lajes em que os picos dos harmônicos são muito próximos, os picos vizinhos podem aumentar a largura da banda, conseqüentemente

aumentando os fatores de amortecimento, o que pode justificar o fato de que o método da largura da banda mostrou resultados menos conservativos. Como mostrado nessa pesquisa e por outros autores como Davis (2008) e Barrett (2006), o amortecimento é um parâmetro que mostra significativa variação, mesmo dentro de um determinado sistema de piso, e assim, para fins de projeto, a melhor solução é adotar valores de referência estabelecidos em normas e manuais. De forma geral, é possível afirmar que os elementos não estruturais influenciaram significativamente nos resultados de amortecimento.

- comparando-se lajes nervuradas e pré-moldadas com vãos semelhantes, as lajes pré-moldadas tendem a apresentar frequências naturais mais baixas, isso porque a rigidez do sistema é influenciada tanto pela espessura da laje como pela direção em que as nervuras são posicionadas;
- os resultados experimentais mostraram que, através de uma função exponencial, é possível obter uma relação simplificada para a obtenção da frequência natural para o primeiro modo normal de vibração das lajes nervuradas em função do vão menor dessas lajes. A relação entre a frequência e o vão menor apresentou coeficiente de determinação de 97,0% quando consideradas lajes bidirecionais.

Comparadas as frequências naturais experimentais com as frequências naturais analíticas calculadas por meio das equações para placas isotrópicas e placas ortotrópicas, conclui-se que:

- o cálculo da frequência natural em lajes nervuradas ofereceu resultados satisfatórios através dos dois métodos analíticos de cálculo, com coeficiente de determinação de aproximadamente 90,0%. Isso permite afirmar que as equações trazem bons resultados para as frequências reais para este tipo de estrutura;
- para as lajes nervuradas, a utilização de uma altura equivalente para o cálculo das frequências naturais através da formulação para lajes isotrópicas traz boas aproximações aos resultados experimentais, no entanto, nos casos em que a frequência do pavimento é baixa, esta pode representar uma alternativa não conservativa;
- calcular a frequência natural de lajes nervuradas através das equações para lajes ortotrópicas, em que as nervuras e a capa de concreto são contabilizadas separadamente na composição da frequência natural do pavimento, apresentou resultados conservativos em relação aos resultados experimentais, e mostrou-se a melhor alternativa entre os dois métodos avaliados;

- na composição da frequência natural das lajes nervuradas estudadas a partir dos resultados analíticos, a contribuição das nervuras é de cerca de 70,0%, e camada de concreto superior às nervuras é responsável por aproximadamente 30,0% no valor total da frequência.
- entre as lajes pré-moldadas, o cálculo manual não convergiu satisfatoriamente com os resultados experimentais. Primeiramente, o cálculo não considera o material de enchimento das nervuras, e entre as amostras, as lajes LP01 a LP07 possuem materiais cerâmicos de enchimento, fato que pode influenciar de alguma forma nos parâmetros de massa e rigidez. Nota-se que quando somente as lajes com um mesmo material de enchimento são avaliadas, os resultados se comportam melhor. Além disso, a simplificação da geometria da seção transversal pode ter influenciado nos valores analíticos.

Em relação ao modelo numérico simplificado que representa as nervuras e camada de concreto através de elementos de casca, pode-se afirmar que:

- é adequado utilizar quatro elementos na altura das nervuras para discretização destas;
- os resultados de frequência fundamental obtidos para as lajes nervuradas foram compatíveis com aqueles obtidos experimentalmente. Através de adaptações para as diversas geometrias, a solução numérica se mostra capaz de fornecer frequências naturais confiáveis para os demais modos de vibração das estruturas;
- novamente, para as lajes pré-moldadas os valores de frequência encontrados pelo modelo não são totalmente compatíveis com os resultados experimentais, não sendo possível obter uma relação linear entre os resultados. Os resultados numéricos são compatíveis com os resultados analíticos, apresentando coeficiente de determinação de 89,0% o que leva a acreditar que os resultados experimentais não são totalmente confiáveis para essas lajes. Acredita-se que, entre outros fatores, a posição do impacto possa influenciar nos resultados já que esse tipo de laje tem comportamento essencialmente unidirecional, e a transferência de carga se dá principalmente ao longo do comprimento das vigotas.

## 5.1 Recomendações para Trabalhos Futuros

Na dinâmica das estruturas existem vários tópicos que carecem de pesquisas voltadas para o melhoramento da previsão de resposta vibratória de pisos. A seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- a) realizar estudos experimentais com foco na obtenção da resposta dinâmica dos sistemas estruturais em termos de valores de deslocamentos, velocidade e acelerações;
- b) desenvolver pesquisas para a previsão dos parâmetros modais dinâmicos através de ensaios referenciados, em que não somente as frequências e amortecimentos sejam levantados, mas também as formas modais;
- c) explorar a previsão dos fatores de amortecimento também é necessário. Atualmente, opta-se por adotar valores recomendados pela literatura já que o amortecimento pode ser altamente variável, mesmo dentro de um sistema de piso. É interessante a avaliação do amortecimento também em diversas fases da construção da edificação, e também o estudo dos efeitos dos revestimentos, divisórias e ocupantes;
- d) investigar o comportamento de pisos com vibrações excessivas através da realização de testes experimentais que simulem atividades humanas rotineiras como, caminhar, correr, pular, bem como a modelagem computacional dessas atividades.

## 6 REFERÊNCIAS

- ALLAHYARI, H. et al. Experimental measurement of dynamic properties of composite slabs from frequency response. **Measurement**, v. 114, p.150-161, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2017.09.030>>.
- ALLEN, D. E.; MURRAY, T. M. Design criterion for vibrations due to walking. **Engineering Journal**, v 4, n 30, p. 117-129, 1993.
- ANSYS, Mechanical APDL Theory Reference V18.1. ANSYS Inc. Canonsburg, PA, 2017.
- ARAÚJO, J. M. A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande, v. 6, p. 1-9, 2006.
- ARMER, G. S. T. **Monitoring and Assessment of Structures**. London And New York: Spon Press, 2001.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 - Projeto De Estruturas De Concreto**. Rio de Janeiro. 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800 - Projeto De Estruturas De Aço e De Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios**. Rio de Janeiro. 1986.
- BACHMANN, H. et al. **Vibration problems in structures: practical guidelines**. Birkhäuser, 1995.
- BACHMANN, H.; AMMANN, W. **Vibrations in structures: induced by man and machines**. 3 ed. Iabse, 1987.
- BARRETT, A. R. **Dynamic testing of in-situ composite floors and evaluation of vibration serviceability using the finite element method**. 2006. 452 f. Tese (Doutorado) - Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 2006.
- BERT, C W; MALIK, M. Frequency equations and modes of free vibrations of rectangular plates with various edge conditions. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 208, n. 5, p.307-319, 1994. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1243/pime\\_proc\\_1994\\_208\\_133\\_02](http://dx.doi.org/10.1243/pime_proc_1994_208_133_02)>.



- BHAT R.B.; SINGH J.; MUNDKUR G. Plate characteristic functions and natural frequencies of vibration of plates by iterative reduction of partial differential equation. **Vib Acoust**, v. 115, p. 177-181, 1993.
- BLAKEBOROUGH, A.; WILLIAMS, M. S. Measurement of floor vibrations using a heel drop test. **Structures & Buildings**. v. 156, n. 4, p.367-371, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1680/stbu.156.4.367.37848>>
- BLEVINS, R. D. **Formulas for dynamics, acoustics and vibrations**. John Wiley & Sons, 2016.
- BRANDT, A. **Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures**. John Wiley & Sons, 2011. ISBN: 978-0-470-74644-8.
- CAHILL, P. et al. Comparison of smartphone accelerometer applications for structural vibration monitoring. **Advances in Computational Design**, v. 4, n. 1, p.1-13, jan. 2019. Disponível em: < <https://doi.org/10.12989/acd.2019.4.1.001>.>
- CAO, L.; QI, H.; LI, J. Experimental and numerical studies on the vibration serviceability of fanshaped prestressed concrete floor. **International Journal of Distributed Sensor Networks**, v. 14, n. 8, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/1550147718795746>>.
- CARMONA, J. E. C.; AVILA, S. M.; DOZ, G. Proposal of a tuned mass damper with friction damping to control excessive floor vibrations. **Engineering Structures**, v. 148, p.81-100, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.06.022>.>
- CARVALHO, F. W. L. **Procedimento Experimental para avaliação do fator de amortecimento em estruturas**. 2002. 141 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2002.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118. 2014. 4ª ed. São Carlos: Edufscar, 2015.
- CASAGRANDE, D. et al. Analytical, numerical and experimental assessment of vibration performance in timber floors. **Engineering Structures**, v. 168, p.748-758, 2018. Elsevier BV. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.05.020>>.

- CHANG, D.; WANG, G.; WERELEY, N. M. Analysis and applications of extended Kantorovich–Krylov method. **Applicable Analysis**, v. 82, n. 7, p.713-740, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/0003681031000148573>>.
- CHEN, J.; LI, G.; RACIC, V. Acceleration response spectrum for predicting floor vibration due to occupants jumping. **Engineering Structures**, v 112. p.71-80. 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.01.013>>.
- CHOPRA, K, A. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. 4. ed. Boston, Prentice Hall, 2012.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3<sup>rd</sup> ed. Computers & Structures: Berkely, 1995.
- DAVIS, B.; LIU, D.; MURRAY, T. M. Simplified experimental evaluation of floors subject to walking-induced vibration. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 28, n. 5, p.040140231-040140238, 2014. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)cf.1943-5509.0000471](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)cf.1943-5509.0000471)>.
- DAVIS, D. B. **Finite element modeling for prediction of low frequency floor vibrations due to walking**. 2008. 269 f. Tese (Doutorado) – Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, 2008.
- DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. 2003. 455 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- DUAN, G.; WANG, X. Vibration analysis of stepped rectangular plates by the discrete singular convolution algorithm. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 82, p.100-109, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.004>>.
- EBADI, M. M. **Vibration behaviour of glulam beam-and-deck floors**. 2017. 160 f. Tese (Doutorado) - University Of Ottawa, Ottawa, 2017.
- EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.

- EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. 2. Ed. Research Studies Press, 2000.
- FAISCA, R. G. **Caracterização de cargas dinâmicas geradas por atividades humanas**. 2003. 240 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.
- FALSONE, G. SETTINERI, D. A Kirchhoff-like solution for the Mindlin plate model: A new finite element approach. **Mechanics Research Communications**, v. 40, p.1-10, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.11.008>>.
- FELDMANN, M. et al. Design of floor structures for human induced vibrations. **JRC–ECCS joint report**, 2009.
- FIGUEIREDO, L. J.; et al. **Aplicações de acelerómetros**. IAS - Instrumentação de Aquisição de Sinais, Lisboa, 2007.
- FLODÉN, O. **Vibration transmission in lightweight buildings: numerical prediction models**. 2016. 200 f. Tese (Doutorado) - Lund University, Lund, 2016.
- GENTA, Giancarlo. **Vibration Dynamics and Control**. New York: Springer, 2009.
- GOMES, F. P. **Curso de estatística Experimental**. 15 ed. FEALQ, 2009.
- GORMAN, D.J. Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic plates by the method of superposition. **Journal of Sound and Vibration**, v. 140, n. 3, p. 391-411, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90758-R](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90758-R)>.
- GORMAN, D.J. Accurate free vibration analysis of the completely free orthotropic plate by the method of superposition . **Journal of Sound and Vibration**, v. 165, n. 3, p. 409-420, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1267>>.
- GORMAN, D.J. Highly accurate free vibration eigenvalues for the completely free orthotropic plate. **Journal of Sound and Vibration**, v. 280, n. 3-5, p.1095-1115, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.030>>.
- GRIFFIN, M. J. **Hanbook of human vibration**. Academic Press. 1990.

- HARRIS, C. M.; PIERSOL, A. G. **Harris' shock and vibration handbook**. 5. ed. New York: Mcgraw-hill, 2002.
- HE, J. FU, Z. **Modal Analysis**. 1. ed. Oxford: University of Oxford, 2001.
- INMAN, D. J. **Engineering vibration**. 4. ed. Pearson Education, 2014.
- INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 2631-2 - **Evaluation of human exposure to whole-body vibration, Part 2: Human exposure to continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 to 80 Hz)**. 1989.
- KRALIK, J.; KRALIK JR, J. Experimental and sensitivity analysis of the vibration impact to the human comfort. **Procedia Engineering**, v. 190, p. 480-487, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.367>>.
- LEISSA, A. W. The free vibration of rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n. 3, p.257-293, 1973. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/s0022-460x\(73\)80371-2](http://dx.doi.org/10.1016/s0022-460x(73)80371-2)>.
- LEISSA, A. W. **Vibration of Plates**, Washington: NASA SP-160, 1969 .
- LI, R. et al. New analytic free vibration solutions of rectangular thin plates resting on multiple point supports. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 110, p.53-61, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.03.002>>.
- LIMA, S. S.; SANTOS, S. H. C. **Análise dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- LIU, B. XING, Y. Exact solutions for free vibrations of orthotropic rectangular Mindlin plates. **Composite Structures**, v. 93, n. 7, p.1664-1672, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.014>>.
- LIU, B. XING, Y.F. REDDY, J.N. Exact compact characteristic equations and new results for free vibrations of orthotropic rectangular Mindlin plates. **Composite Structures**, v. 118, p.316-321, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.051>>.

- MELLO, A. V. A. **Análise do efeito da interação aço-concreto sobre a resposta dinâmica de pisos mistos**. 2009. 211 f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- MENDES, P.; OLIVEIRA, S. **Análise dinâmica de estruturas: utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos**. LNEC, 2008.
- MINDLIN R. D. SCHACKNOW A. DERESIEWICZ H. Flexural vibrations of rectangular plates. **Appl Mech**, v.23, p. 430–436, 1956.
- MURRAY T. M. et al. **Steel design guide series nº 11: vibrations of steel-framed structural systems due to human activity**, 2 ed. American Institute of Steel Construction (AISC), USA, 2016.
- NGUYEN, H. A. T. **Walking induced floor vibration design and control**. 2013. 340 f. Tese (Doutorado) - Swinburne University of Technology, Melbourne, 2013.
- NILSON, A. H.; DARWIN, D.; DOLAN, C. W. **Design of Concrete Structures**. 13. ed. New York: Mcgraw-hill, 2004.
- PARK, R.; GAMBLE, W. L. **Reinforced Concrete Slabs**. 2. ed. Danver: John Wiley & Sons, 2000.
- PASQUETTI, E.; KRIPKA, M.; MEIRA, A. D. M. Consideração de ações dinâmicas no dimensionamento de lajes de edifícios em concreto armado. **Engenharia Estudo e Pesquisa**, v. 4, n. 14, p. 75-81, 2001.
- PAVIC, A.; REYNOLDS, P. Modal testing and dynamic FE model correlation and updating of a prototype high-strength concrete floor. **Cement And Concrete Composites**, v. 25, n. 7, p.787-799, 2003. Elsevier BV. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/s0958-9465\(02\)00100-2](http://dx.doi.org/10.1016/s0958-9465(02)00100-2)>.
- PCI Design Handbook: Precast and Prestressed Concrete, 6 Ed., Precast/Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL, 2004.
- PEPPER, D. W.; HEINRICH, J. C. **The finite element method: basic concepts and applications with MATLAB, MAPLE, and COMSOL**. 3. ed. CRC Press, 2017.

- PINTO, J. F. A. **Análise numérica de vibrações em sistemas de piso misto de aço e concreto e avaliação de desempenho considerando o conforto humano**. 2015. 148 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Viçosa. Viçosa. 2015.
- PORTO, T. B.; FERNANDES, D. S. G. **Curso básico de concreto armado: conforme NBR 6118/2014**. São Paulo: Oficina de Textos, 2015. ISBN: 978-85-7975-187-5.
- PRAVIA, Z. M. C.; BRAIDO, J. D. Medição de características de vibração de pontes de concreto usando telefonia móvel. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 8, n. 5, p.721-743, 2015. <http://dx.doi.org/10.1590/s1983-41952015000500009>.
- RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Education, 2008.
- RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. John Wiley & Sons, 2007.
- SAKATA, T.; TAKAHASHI, K.; BHAT, R.B. Natural frequencies of orthotropic rectangular plates obtained by iterative reduction of the partial differential equation. **Journal of Sound and Vibration**, v.189, n. 1, p.89-101, 1996. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1996.9999>>.
- SARAYI, S. M. M. J. BAHRAMI, A. BAHRAMI, M. N. Free vibration and wave power reflection in Mindlin rectangular plates via exact wave propagation approach. **Composites Part B: Engineering**, v. 144, p.195-205, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.03.001>>.
- SETAREH, M.; DARVAS, R. **Concrete Structures**. New Jersey: Pearson Education, 2007.
- SETAREH, M.; GAN, S. Vibration Testing, Analysis, and Human-Structure Interaction Studies of a Slender Footbridge. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 32, n. 5, p.040180681-040180688, 2018. American Society of Civil Engineers (ASCE). Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)cf.1943-5509.0001213](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)cf.1943-5509.0001213)>.
- SILVA Jr, L. A. **Análise experimental de vibrações em sistemas de piso misto de aço e concreto e avaliação de desempenho considerando o conforto humano**. 2015. 191 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.

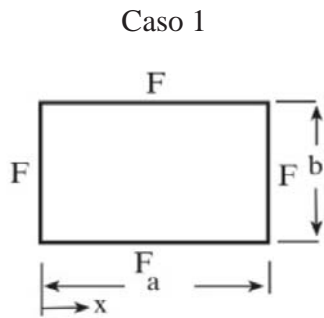
- SILVA, C. W. **Vibration: fundamentals and practice**. 2. ed. Boca Raton: Crc Press, 2006.
- SILVA, C.W. **Vibration Damping, control, and design**. Vancouver, Canada: Taylor & Francis Group, 2007.
- SORIANO, H. L. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.
- SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- TADEU, D. M. F. **Atenuação de vibrações em pavimentos: estudo experimental**. 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Coimbra, Coimbra, 2015.
- THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. **Theory of vibration with applications**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- TREDGOLD T. **Elementary Principles of Carpentry**, 2. Ed., Publisher unknown. 1824.
- VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin plates and shells: theory, analysis, and applications**. Taylor & Francis, 2001.
- WANG, C.; SALMON, C. G. **Reinforced Concrete Design**. 6. ed. Boston: Addison-wesley, 1998.
- WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. **Mech. Engrs**, v. 168, p. 371-384, 1954.
- XING, Y. et al. The overall assessment of closed-form solution methods for free vibrations of rectangular thin plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 140, p.455-470, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.013>>.
- XING, Y. F.; LIU, B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates. **Composite Structures**, v. 89, n. 4, p.567-574, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.11.010>>.
- XING, Y.F.; LIU, B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates. **Composite Structures**, v. 89, n. 4, p.567-574, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.11.010>>.

- XING, Y.F.; XU, T.F. Solution methods of exact solutions for free vibration of rectangular orthotropic thin plates with classical boundary conditions. **Composite Structures**, v. 104, p.187-195, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.04.030>>.
- YOON et al. Vibration measurements of steel foot-bridges using mobile-phone. **Applied Mechanics and Materials**, v. 470, p. 471-493, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.470.777>>.
- YOUNG, D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method. **Appl. Mech.**, v. 17, p. 448-453, 1950.
- ZHANG, S.; XU, L.; QIN, J. Vibration of lightweight steel floor systems with occupants: Modelling, formulation and dynamic properties. **Engineering Structures**, v. 147, p.652-665, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.06.008>>.
- ZHOU, X. et al. Vibration Behavior of Prestressed Cable Reinforced Concrete Truss System Caused by Jumping and Hopping. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 31, n. 5, p.04017068-04017068, 2017. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)cf.1943-5509.0001054](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)cf.1943-5509.0001054)>.
- ZHOU, X. et al. Vibration serviceability of pre-stressed concrete floor system under human activity. **Structure and Infrastructure Engineering**, v. 13, n. 8, p.967-977, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/15732479.2016.1229796>>.
- ZHOU, X.; LI, J.; LIU, J. Vibration of Prestressed Cable RC Truss Floor System due to Human Activity. **Journal of Structural Engineering**, v. 142, n. 5, p.040151701-040151710, 2016. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0001447](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0001447)>.



## ANEXO A – FREQUÊNCIA NATURAL DE PLACAS RETANGULARES ISOTRÓPICAS

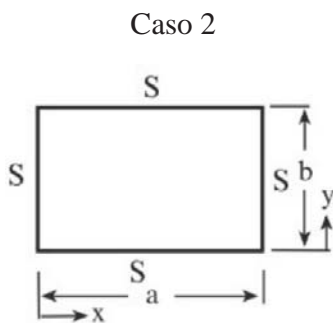
Notações:  $a$ : comprimento da placa;  $b$ : largura da placa;  $h$ : espessura da placa ;  $i$ : número de meia ondas no modo de vibração ao longo do eixo horizontal ( $x$ );  $j$ : número de meia ondas no modo de vibração ao longo do eixo vertical ( $y$ );  $\lambda_{ij}$ : parâmetro adimensional que depende dos índices modais  $i$  e  $j$ , da geometria da placa e das condições de apoio;  $E$ : módulo de elasticidade;  $f$ : frequência natural, Hz;  $G, H, J$  = parâmetros adimensionais do modo de vibração;  $S$ : borda simplesmente apoiada,  $C$ : borda engastada;  $F$ : borda livre.



a/b	Modos de vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	3.463 (13)	5.288 (22)	9.622 (14)	11.44 (23)	18.79 (15)
2/3	8.946 (22)	9.602 (13)	20.74 (23)	22.35 (31)	25.87 (14)
1.0	13.49 (22)	19.79 (13)	24.43 (31)	35.02 (32)	35.02 (23)
1.5	20.13 (22)	21.60 (31)	46.65 (32)	50.29 (13)	50.20 (41)
2.5	21.64 (31)	33.05 (22)	60.14 (41)	71.48 (32)	117.5 (51)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \left\{ G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)] \right\}^{1/2}$$

$G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 1.506, G_k = k - 3/2, k=4,5.$  Also see Refs [63, 64]  
 $H_1 = 0, H_2 = 1.248, H_3 = 1.506, H_k = (k - 3/2) \left( 1 - 2[(k - 3/2)\pi]^{-1} \right), k=4,5.$   
 $J_1 = 0, J_2 = 1.216, J_3 = 5.017, J_k = (k - 3/2)^2 (1 + 6[(k - 3/2)\pi]^{-1}), k=4,5..$



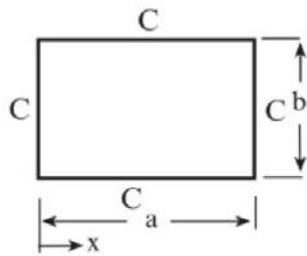
$\lambda^2$  e (ij)       $\lambda$  independente de  $\nu$

a/b	Modo de vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	11.45 (11)	16.19 (12)	24.08 (13)	35.14 (14)	41.06 (21)
2/3	14.26 (11)	27.42 (12)	43.86 (21)	49.35 (13)	57.02(22)
1.0	19.74 (11)	49.35 (21)	49.35 (12)	78.96 (22)	98.99(70)
1.5	32.08 (11)	61.69 (21)	98.70 (12)	111.0 (31)	128.3(22)
2.5	71.56 (11)	101.2 (21)	150.5 (31)	219.6 (41)	256.6(12)

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2 \{ i^2 + j^2 (a/b)^2 \}, \quad \tilde{w}_{ij} = \sin(i\pi x / a) \sin(j\pi y / b),$$

$H_j = J_j = j^2, \quad H_i = J_i = i^2, \quad G_i = i, \quad G_j = j.$

Caso 3



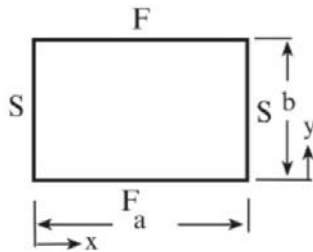
$\lambda^2$  e (ij)  $\lambda$  independente de  $\nu$

a/b	Modo de vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	23.65 (11)	27.82 (12)	35.45(13)	46.70 (14)	61.55 (15)
2/3	27.01 (11)	41.72 (12)	66.14 (21)	66.55 (13)	79.85 (22)
1.0	35.99 (11)	73.41 (21)	73.41( 12)	108.3 (22)	131.6 (31)
1.5	60.77 (11)	93.86 (21)	148.8 (12)	149.7 (31)	179.7 (22)
2.5	147.8 (11)	173.9 (21)	221.5 (31)	291.9 (41)	384.7 (51)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 J_i J_j\}^{1/2}$$

$G_1 = 1.506, G_2 = 2.5, G_k = k + 1/2, k = 3, 4, \dots,$   
 $H_k = J_k, J_1 = 1.248, J_2 = 4.658, J_3 = 10.02, J_k = (k+1/2)^2 (1 - 2[(k+1/2)\pi]^{-1}), k = 4, 5, \dots$

Caso 4



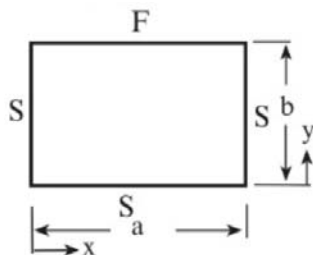
$\lambda^2$  e (ij)  $\nu = 0.3$

a/b	Modo de Vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	9.760 (11)	11.04 (12)	15.06 (13)	21.71 (14)	31.18 (15)
2/3	9.698 (11)	12.98 (12)	22.95 (13)	39.11 (21)	40.36 (14)
1.0	9.631 (11)	16.14 (12)	36.73 (13)	38.95 (21)	46.74 (22)
1.5	9.558 (11)	21.62 (12)	38.72 (21)	54.84 (22)	65.79 (13)
2.5	9.484 (11)	33.62 (12)	38.36 (21)	75.20 (22)	86.97 (31)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2i^2 (a/b)^2 [J_j + 2\nu(H_j - J_j)]\}^{1/2}$$

$W_{ij} = \sin(i\pi x/a) \tilde{y}_j(y/b), \tilde{y}_j$  do caso 1 da Tabela 4.3 da ref.  
 $G_j, H_j, J_j$ , do caso 1

Caso 5



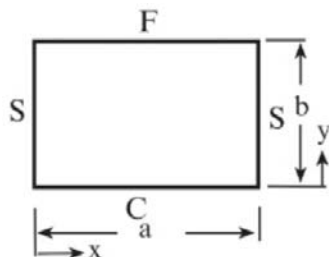
$\lambda^2$  e (ij)  $\nu = 0.3$

a/b	Modo de Vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	10.13 (11)	13.06 (12)	18.84 (13)	27.56(14)	39.34 (15)
2/3	10.67 (11)	18.30 (12)	33.70 (13)	40.13 (21)	48.41 (22)
1.0	11.68 (11)	27.76 (12)	41.20 (21)	59.17 (22)	61.86 (13)
1.5	13.71 (11)	43.57 (21)	47.86 (12)	81.48 (22)	92.69 (31)
2.5	18.80 (11)	50.54 (21)	100.2 (31)	100.2 (12)	147.6 (22)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2i^2 (a/b)^2 [J_j + 2\nu(H_j - J_j)]\}^{1/2}$$

$\tilde{w}_{ij} = \sin(i\pi x/a) \tilde{y}_j(y/b), \tilde{y}_j$  do caso 4 da Tabela 4.3 da ref.  
 $G_j, H_j, J_j$ , do caso 9.

Caso 6



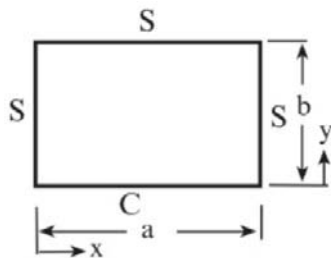
$\lambda^2$  e (ij)  $\nu = 0.3$

a/b	Modo de Vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	10.19 (11)	13.60 (12)	20.10 (13)	29.62 (14)	39.64 (21)
2/3	10.98 (11)	20.34 (12)	37.96 (13)	40.27 (21)	49.73 (22)
1.0	12.69 (11)	33.07 (12)	41.70 (21)	63.01 (22)	72.40 (13)
1.5	16.82 (11)	45.30 (21)	61.02 (12)	92.31 (22)	93.83 (31)
2.5	30.63 (11)	58.08 (21)	105.5 (31)	149.5 (12)	173.1 (41)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2i^2 (a/b)^2 [J_j + 2\nu(H_j - J_j)]\}^{1/2}$$

$\tilde{w}_{ij} = \sin(i\pi x/a) \tilde{y}_j(y/b), \tilde{y}_j$  caso 3 da Tabela 4.3 da ref.  
 $G_j, H_j, J_j$ , do caso 15.

Caso 7



$\lambda^2$  e (ij)

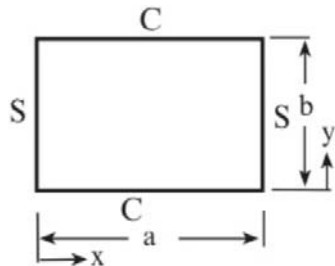
a/b	Modo de vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	11.75 (11)	17.19 (12)	25.92 (13)	37.83 (14)	41.21 (21)
2/3	15.58 (11)	31.07 (12)	44.56 (21)	55.39 (13)	59.46 (22)
1.0	23.65 (11)	51.67 (21)	58.65 (12)	86.13 (22)	100.3 (31)
1.5	42.53 (11)	69.00 (21)	116.3 (31)	121.0 (12)	147.6 (22)
2.5	103.9 (11)	128.3 (21)	172.4 (31)	237.3 (41)	320.8 (12)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2i^2(a/b)^2 J_j\}^{1/2}$$

$\tilde{w}_{ij} = \sin(i\pi x/a)\tilde{y}_j(y/b)$ ,  $\tilde{y}_j$  do caso 6 da Tabela 4.3 da ref.

$G_j, J_j$  do caso 20.

Caso 8



$\lambda^2$  e (ij)

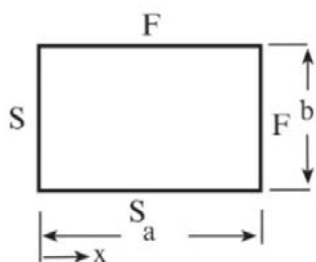
a/b	Modo de Vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	12.13 (11)	18.36 (12)	27.97 (13)	40.75 (14)	41.38 (21)
2/3	17.37 (11)	35.34 (12)	45.43 (21)	62.05 (13)	62.31 (22)
1.0	28.95 (11)	54.74 (21)	69.12 (12)	94.59 (22)	102.2 (31)
1.5	56.35 (11)	78.98 (21)	123.2 (31)	146.3 (12)	170.1 (22)
2.5	145.5 (11)	164.7 (21)	202.2 (31)	261.1 (41)	342.1 (51)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2i^2(a/b)^2 J_j\}^{1/2}$$

$\tilde{w}_{ij} = \sin(i\pi x/a)\tilde{y}_i(y/b)$ ,  $\tilde{y}_j$  do caso 7 da Tabela 4.3 da ref.

$G_j, J_j$ , do caso 3

Caso 9



$\lambda^2$  e (ij)

$\nu=0.3$

a/b	Modos de Vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	1.320 (11)	4.743 (12)	10.36 (13)	15.87 (21)	18.93 (14)
2/3	2.234 (11)	9.575 (12)	16.76 (21)	24.66 (13)	27.06 (22)
1.0	3.369 (11)	17.41 (12)	19.37 (21)	28.29 (22)	51.32 (13)
1.5	5.026 (11)	21.54 (21)	37.72 (12)	55.49 (31)	60.88 (22)
2.5	8.251 (11)	29.65 (21)	64.76 (31)	99.21 (12)	118.3 (41)

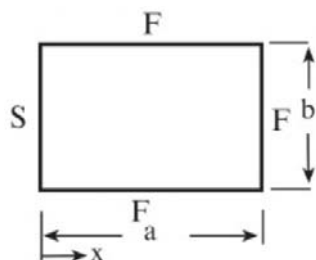
$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$$

$G_1=0, G_2=1.25, G_3=2.25, G_k = k-1/2, k=4,5..$

$H_1=0, H_2=1.165, H_3=4.346, H_k = (k-3/4)^2(1-2[(k-3/4)\pi]^{-1}), k=4,5,..$

$J_1=0.3040, J_2=2.756, J_3=7.211, J_k = (k-3/4)^2(1+3[(k-3/4)\pi]^{-1}), k=4,5..$

Caso 10



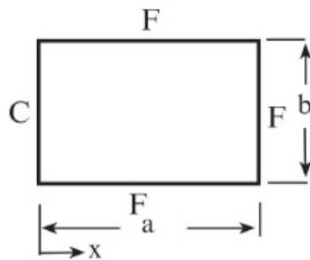
$\lambda^2$  e (ij)  $\nu=0.3$

a/b	Modo de vibração				
	1	2	3	4	5
0.4	2.692 (12)	6.503 (13)	12.64 (14)	15.34 (21)	17.51 (22)
2/3	4.481 (12)	13.01 (13)	15.67 (21)	20.37 (22)	30.55 (14)
1.0	6.648 (12)	15.02 (21)	25.49 (22)	26.13 (13)	48.71 (31)
1.5	9.850 (12)	15.01 (21)	34.03 (22)	48.33 (31)	55.07 (13)
2.5	14.94 (21)	16.24 (12)	48.84 (31)	52.09 (22)	97.23 (32)

$$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$$

$G_i, H_i, J_i$  do caso 9.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 1.

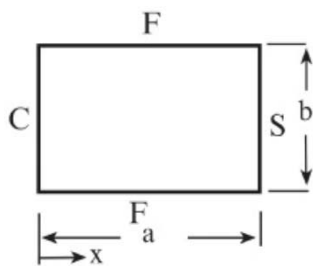
Caso 11



a/b	Modo de vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	3.511 (11)	4.786 (12)	8.115 (13)	13.88 (14)	21.64 (21)
2/3	3.502 (11)	6.406 (12)	15.54 (13)	20.04 (21)	26.07 (22)
1.0	3.492 (11)	8.525 (12)	21.43 (21)	27.33 (13)	31.11 (22)
1.5	3.477 (11)	11.68 (12)	21.62 (21)	39.49 (22)	53.88 (13)
2.5	3.456 (11)	17.99 (12)	21.56 (21)	57.46 (22)	60.58 (31)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 15.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 1.  $\lambda_{11}^2 = 1.875^2$

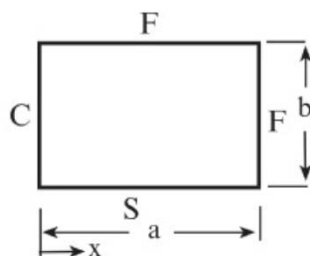
Caso 12



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	15.38 (11)	16.37 (12)	9.622 (13)	11.44 (14)	34.51 (15)
2/3	15.34 (11)	17.95 (12)	20.74 (13)	22.35 (14)	49.84 (21)
1.0	15.29 (11)	20.67 (12)	24.43 (13)	35.02 (21)	56.62 (22)
1.5	15.22 (11)	25.71 (12)	46.65 (21)	50.29 (22)	68.13 (13)
2.5	15.13 (11)	37.29 (12)	60.14 (21)	71.48 (22)	103.1 (31)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 20.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 1.

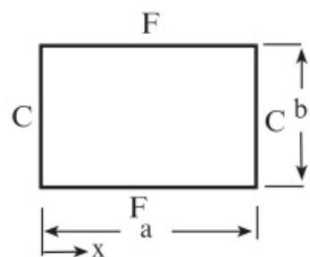
Caso 13



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	3.854 (11)	6.420 (12)	11.58 (13)	19.77 (14)	22.52 (21)
2/3	4.425 (11)	10.91 (12)	22.96 (21)	25.70 (13)	32.43 (22)
1.0	5.364 (11)	19.17 (12)	24.77 (21)	43.19 (22)	53.00 (13)
1.5	6.931 (11)	27.29 (21)	38.59 (12)	64.25 (22)	67.47 (31)
2.5	10.10 (11)	35.16 (21)	74.99 (31)	99.93 (12)	127.7 (22)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 15.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 9.

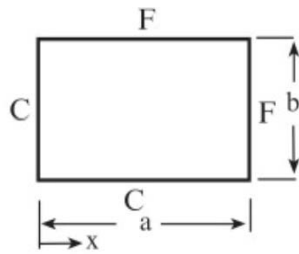
Caso 14



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	22.35 (11)	23.09 (12)	25.67 (13)	30.63 (14)	38.69 (15)
2/3	22.31 (11)	24.31 (12)	31.70 (13)	46.82 (14)	61.57 (21)
1.0	22.27 (11)	26.53 (12)	43.66 (13)	61.47 (21)	67.55 (22)
1.5	22.21 (11)	30.90 (21)	61.30 (21)	70.96 (13)	74.26 (22)
2.5	22.13 (11)	41.69 (21)	61.00 (21)	92.38 (22)	119.9 (31)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 3.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 1.

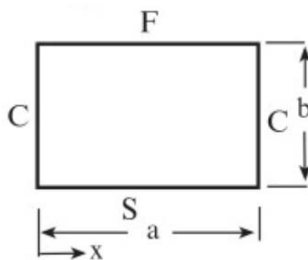
Caso 15



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	3.986 (11)	7.155 (12)	13.10 (13)	21.84 (14)	22.90 (21)
2/3	4.985 (11)	13.29 (12)	23.38 (21)	30.26 (13)	34.24 (22)
1.0	6.942 (11)	24.03 (21)	26.68 (12)	47.78 (22)	63.04 (13)
1.5	11.22 (11)	29.90 (21)	52.62 (12)	68.09 (31)	77.04 (22)
2.5	24.91 (11)	44.72 (21)	81.88 (31)	136.5 (41)	143.1 (12)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_1=0.597, G_2=1.494, G_3=2.50, G_k = k-1/2, k=4,5..$   
 $H_1=-0.087, H_2=1.347, H_3 = 4.658, H_k = (k-1/2)^2(1-2[(k-1/2)\pi]^{-1}),$   
 $J_1=0.471, J_2 = 3.284, J_3 = 7.842, J_k = (k-1/2)^2(1+2[(k-1/2)\pi]^{-1}),$

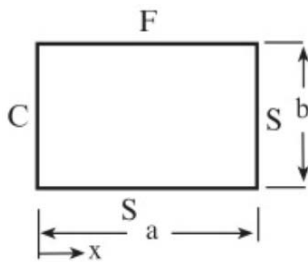
Caso 16



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	22.54 (11)	24.30 (12)	28.34 (13)	35.35 (14)	45.71 (15)
2/3	22.86 (11)	27.97 (12)	40.68 (13)	62.31 (21)	62.70 (14)
1.0	23.46 (11)	35.61 (12)	63.13 (21)	66.81 (13)	77.50 (22)
1.5	24.78 (11)	53.73 (12)	64.96 (21)	97.26 (22)	124.5 (31)
2.5	28.56 (11)	70.56 (21)	114.0 (12)	130.8 (31)	159.5 (22)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$  do caso 3.  $G_j, H_j, J_j$  do caso 9.

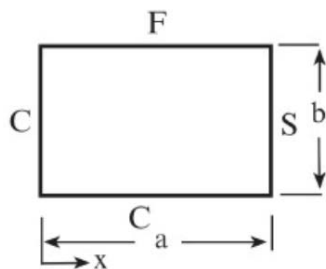
Caso 17



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	15.65 (11)	17.95 (12)	22.90 (13)	30.89 (14)	42.11 (15)
2/3	16.07 (11)	22.45 (12)	36.70 (13)	50.70 (21)	57.91 (22)
1.0	16.87 (11)	31.14 (12)	51.63 (21)	64.04 (13)	67.65 (22)
1.5	18.54 (11)	50.44 (12)	53.72 (21)	88.80 (22)	108.2 (31)
2.5	23.07 (11)	59.97 (21)	112.0 (12)	115.1 (31)	153.2 (22)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , caso 20.  $G_j, H_j, J_j$  caso 9.

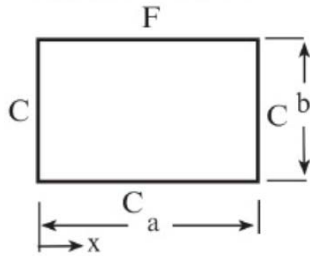
Caso 18



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	15.70 (11)	18.37 (12)	23.99 (13)	32.18 (14)	44.86 (15)
2/3	16.29 (11)	24.20 (12)	40.70 (13)	50.82 (21)	59.07 (22)
1.0	17.62 (11)	36.05 (12)	52.07 (21)	71.19 (22)	74.35 (13)
1.5	21.04 (11)	55.18 (21)	63.18 (12)	99.01 (22)	109.2 (31)
2.5	33.58 (11)	66.61 (21)	119.9 (31)	150.8 (12)	187.6 (22)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 20.  $G_j, H_j, J_j$ , do caso 15

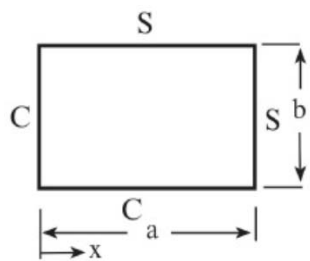
Caso 19



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	22.58 (11)	24.62 (12)	29.24 (13)	37.06 (14)	48.28 (15)
2/3	23.02 (11)	29.43 (12)	44.36 (13)	62.42 (21)	68.89 (14)
1.0	24.02 (11)	40.04 (12)	63.49 (21)	76.76 (13)	80.71 (22)
1.5	26.73 (11)	65.92 (12)	66.22 (21)	106.8 (22)	125.4 (31)
2.5	37.66 (11)	76.41 (21)	135.2 (31)	152.5 (12)	193.0 (22)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 3.  $G_j, H_j, J_j$ , do caso 15.

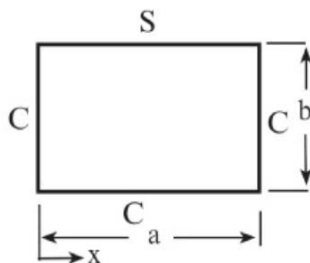
Caso 20



a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	16.85 (11)	21.36 (12)	29.24 (13)	40.51 (14)	51.46 (21)
2/3	19.95 (11)	34.02 (12)	54.37 (21)	57.52 (13)	67.81 (22)
1.0	27.06 (11)	60.54 (21)	60.79 (12)	92.86 (22)	114.6 (13)
1.5	44.89 (11)	76.55 (21)	122.3 (12)	129.3 (31)	152.6 (22)
2.5	105.3 (11)	133.5 (21)	182.7 (31)	253.2 (41)	321.6 (12)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 J_i J_j\}^{1/2}$   
 $G_k = k + 1/4, k=1,2,3,.., H_k=J_k;$   
 $J_1 = 1.165, J_2=4.346, J_3 =9.528, J_k = (k+1/4)^2(1-[(k+1/4)\pi]^{-1}), k=4,5.$

Caso 21



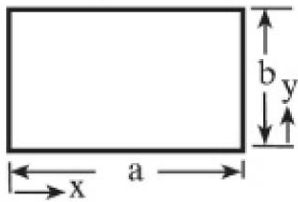
a/b	Modo de Vibração $\lambda^2$ e (ij) $\nu=0.3$				
	1	2	3	4	5
0.4	23.44 (11)	27.02 (12)	33.80 (13)	44.13 (14)	58.03 (15)
2/3	25.86 (11)	38.10 (12)	60.33 (13)	65.62 (21)	77.56 (22)
1.0	31.83 (11)	63.35 (12)	71.08 (21)	100.8 (22)	116.4 (13)
1.5	48.17 (11)	85.51 (21)	124.0 (12)	144.0 (31)	158.4 (22)
2.5	107.1 (11)	139.7 (21)	194.4 (31)	270.5 (41)	322.6 (12)

$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \{G_i^4 + (a/b)^4 G_j^4 + 2(a/b)^2 J_i J_j\}^{1/2}$   
 $G_i, H_i, J_i$ , do caso 3.  $G_j, J_j$ , do caso 20.

Fonte: Blevins (2016).

## ANEXO B – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS RETANGULARES ORTOTRÓPICAS

Caso 1 – Placa ortotrópica retangular

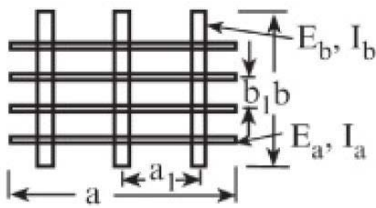


$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_k = G_{\text{shear}} h^3 / 12, \quad D_{xy} = D_x \nu_y + 2D_k, \quad G_{\text{shear}} = \text{Módulo de cisalhamento}$$

$E_x$  e  $\nu_y$  são os módulos de elasticidade para tensões e deformações nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são os coeficientes de Poisson associados.

Caso 2 – Grelha de vigas intercaladas

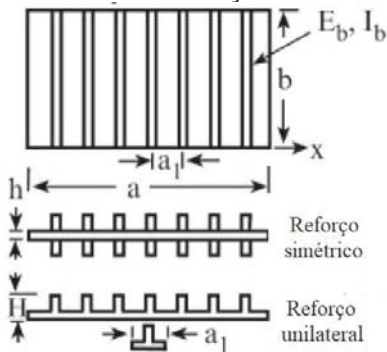


$$D_x = E_a I_a / b_1, \quad D_y = E_b I_b / a_1$$

$$D_{xy} = 2D_k = \frac{E_a C_a}{2b_1} + \frac{E_b C_b}{2a_1} = 0 \quad \text{despreza rigidez à torsão da viga}$$

Índices  $a$  e  $b$  referem-se aos reforços horizontais e verticais, respectivamente. Para placas com reforços nas duas direções, adicionar casos 1 e 2.

Caso 3 – Placa com reforços em uma direção



Para reforço simétrico (bilateral):

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_y = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E_b I_b}{a_1}$$

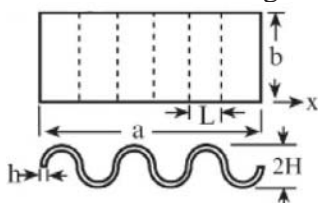
$$D_{xy} = 2D_k = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Para reforço unilateral ( $I_r$  calculado conforme seção)

$$D_x = \frac{Ea_1 h^3}{12(a_1 - t + t(h/H)^3)}, \quad D_y = \frac{EI_r}{a_1},$$

$$D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} + \frac{EC_r}{a_1}, \quad C_r = \text{constante de torção da nervura, ver Tabela 4.15 da ref.}$$

Caso 4 – Placas corrugadas

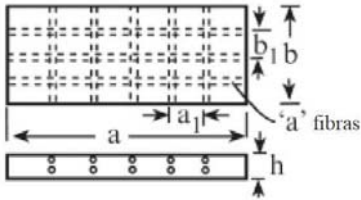


$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{a}{s}, \quad D_{xy} \approx 2D_k = \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} \frac{s}{a}, \quad \frac{s}{a} \approx 1 + \frac{\pi^2 H^2}{4L^2}$$

$$D_y \approx \frac{EhH^2}{2} \left[ 1 + \frac{\pi H^2}{L^2} \right]$$

As ondulações são ondas de seno,  $I_b$ .

Caso 5 – Placas reforçadas com fibra



$$D_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{h^3}{12} + \left( \frac{E_a}{E} - 1 \right) \frac{I_a}{b_1} \right], D_{xy} = (D_x D_y)^{1/2}, E_a, E_b = \text{fibra}$$













$$D_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{h^3}{12} + \left( \frac{E_b}{E} - 1 \right) \frac{I_b}{a_1} \right], D_k \approx \frac{D_{xy}}{2}, \nu = \nu_{\text{placa}}$$







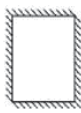







$I_a, I_b$  = momento de inércia das fibras em torno do plano médio

Fonte: Blevins (2016).



### APÊNDICE C – FREQUÊNCIAS NATURAIS E AMORTECIMENTOS DAS LAJES NERVURADAS

Laje	Vínculo	Dimensões (m)						Frequências Naturais (Hz)										Amortecimento								
		$B$		$L/B$		$h$		$h_e$		Experimental					Analítico					Numérico	D. Log.	L. Band.				
		$B$	$L$	$L/B$	$L/B$	$h$	$h_e$	$M_{1,acel}$	$M_{1,cel}$	$M_{2,acel}$	$M_{2,cel}$	$f_n$	$f_{a,he}$	$f_a$	$f_1$	$\xi_{dl}$	$\xi_{lb}$									
LN01		3,03	6,33	2,09	0,26	0,16	0,16	28,13	28,32	28,91	28,32	28,13	28,18	28,32	28,91	28,32	28,13	28,32	28,91	28,32	28,43	49,92	32,14	49,15	0,0602	0,0298
LN02		4,88	8,89	1,82	0,26	0,16	0,16	25,78	25,39	25,78	26,37	25,78	25,78	25,39	25,78	26,37	25,78	25,39	25,78	26,37	25,83	27,64	17,95	24,59	0,0416	0,0401
LN03		3,63	10,91	3,01	0,26	0,16	0,16	32,81	32,23	-	-	32,81	32,03	32,23	-	-	32,81	32,03	32,23	-	32,26	33,28	21,79	32,78	0,0851	0,0449
LN04		4,92	7,02	1,43	0,26	0,16	0,16	31,25	31,25	32,03	32,23	31,25	31,25	31,25	32,03	32,23	31,25	31,25	32,03	32,23	31,69	22,77	14,17	25,96	0,0409	0,0409
LN05		3,70	6,72	1,82	0,26	0,16	0,16	38,28	38,09	39,84	39,06	38,28	38,09	39,84	39,06	38,28	38,09	39,84	39,06	39,37	48,23	31,32	43,37	0,0647	0,0594	
LN06		3,03	8,61	2,84	0,26	0,16	0,16	31,31	31,25	32,87	33,20	31,31	31,25	32,87	33,20	31,31	31,25	32,87	33,20	31,96	48,14	31,43	48,27	0,0546	0,0570	
LN07		4,88	10,05	2,06	0,26	0,16	0,16	24,22	24,44	-	-	24,22	24,44	-	-	24,22	24,44	-	-	24,33	26,61	17,45	24,39	0,0560	0,0218	
LN08		3,83	10,05	2,62	0,26	0,16	0,16	30,47	29,30	-	-	30,47	29,30	-	-	29,69	29,30	-	-	29,63	30,13	19,67	33,26	0,0690	0,0473	
LN09		3,53	4,21	1,19	0,26	0,16	0,16	43,75	43,94	45,31	45,90	43,75	43,94	45,31	45,90	43,75	43,94	45,31	45,90	44,72	61,25	38,75	66,82	0,0425	0,0465	
LN10		4,19	6,40	1,53	0,26	0,16	0,16	32,81	33,20	32,03	27,34	32,81	33,20	32,03	27,34	32,81	33,20	32,03	27,34	31,26	32,31	20,31	34,36	0,0452	0,0306	
LN11		3,63	4,08	1,12	0,17	0,12	0,12	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	34,19	26,73	34,07	0,0340	0,0300
LN12		3,18	4,08	1,28	0,17	0,12	0,12	41,41	41,99	42,19	41,99	41,41	41,99	42,19	41,99	41,41	41,99	42,19	41,99	41,89	40,24	31,32	34,00	0,0615	0,0538	

LN13		1,88	3,39	1,80	0,17	0,12	71,09	70,31	71,88	73,24	71,32	100,75	76,85	90,4	0,0650	0,0760
LN14		3,38	3,53	1,04	0,17	0,12	71,09	69,34	72,65	73,24	71,32	55,97	42,67	42,1	0,0337	0,0396
LN15		3,53	4,73	1,34	0,17	0,12	68,75	69,34	72,65	72,27	71,32	34,76	26,81	31,14	0,0344	0,0230
LN16		2,10	3,38	1,61	0,17	0,12	39,06	38,09	36,72	39,06	38,28	77,15	59,15	63,46	0,0645	0,0857
LN17		1,28	2,18	1,70	0,17	0,12	37,50	38,09	39,06	38,09	38,28	149,49	123,32	133,19	0,0650	0,1902
LN18		3,18	4,08	1,28	0,17	0,12	37,50	38,09	39,06	39,06	38,28	40,24	31,32	37,89	0,0578	0,0893
LN19		3,38	3,53	1,04	0,17	0,12	47,66	47,85	-	-	47,62	55,97	42,67	42,1	0,0624	0,1008
LN20		2,02	3,53	1,75	0,17	0,12	46,88	46,88	47,66	46,88	47,30	84,93	64,97	66,74	0,0539	0,0243
LN21		2,18	3,38	1,55	0,17	0,12	46,88	46,88	47,66	47,85	47,30	72,55	55,77	63,46	0,0442	0,0809
LN22		8,05	12,52	1,56	0,20	0,14	67,19	67,38	-	-	67,71	6,55	4,82	6,33	0,0475	0,0418
LN23		8,05	9,65	1,20	0,20	0,14	7,82	7,82	7,82	7,83	7,82	8,14	6,05	7,83	0,0356	0,0530
LN24		8,05	9,60	1,19	0,20	0,14	7,82	7,81	7,82	7,81	7,82	5,9	4,91	7,1	0,0335	0,0520
LN25		8,05	9,65	1,20	0,20	0,14	7,04	7,05	7,04	7,05	7,04	5,88	4,89	6,81	0,0435	0,0475
LN26		8,05	9,60	1,19	0,20	0,14	7,81	7,03	7,87	7,09	7,45	8,17	6,07	7,86	0,0398	0,0465

## APÊNDICE D – FREQUÊNCIAS NATURAIS E AMORTECIMENTOS DAS LAJES PRÉ-MOLDADAS

Laje	Vínculo	Dimensões (m)						Frequências Naturais (Hz)										Amortecimento				
		$B$		$L/B$		$h$		$h_e$		Experimental					Analítico					Numérico	D. Log.	
		$L$	$L/B$	$h$	$h_e$	$M_{1,acel}$	$M_{1,cel}$	$M_{2,acel}$	$M_{2,cel}$	$f_n$	$f_{a,he}$	$f_a$	$f_1$	$\xi_{dl}$	$\xi_{lb}$							
LP01		3,31	5,17	1,56	0,12	0,09	0,09	36,79	36,13	37,57	37,18	36,79	37,11	36,79	37,18	36,95	29,70	26,30	0,0306	0,0361		
LP02		2,46	2,66	1,08	0,12	0,09	0,09	43,75	43,95	-	-	47,66	46,88	-	-	46,03	53,24	41,06	0,1227	0,0515		
LP03		2,95	3,17	1,07	0,12	0,09	0,09	59,38	59,57	59,38	59,57	59,38	59,57	59,38	59,57	59,47	44,91	35,95	0,0276	0,0218		
LP04		1,85	3,10	1,68	0,12	0,09	0,09	35,94	36,13	38,28	36,13	35,94	36,13	35,94	36,13	36,21	91,87	82,41	0,0809	0,0508		
LP05		2,56	3,27	1,28	0,12	0,09	0,09	35,94	36,13	36,72	36,13	35,94	36,13	36,72	37,11	36,46	41,70	35,18	0,0692	0,0352		
LP06		3,27	4,04	1,24	0,12	0,09	0,09	29,57	31,25	29,69	32,23	29,57	31,25	30,47	31,25	30,94	43,04	38,37	0,0464	0,0887		
LP07		3,36	3,59	1,07	0,12	0,09	0,09	64,84	64,45	64,84	65,43	64,84	64,45	65,63	65,43	65,02	35,13	28,05	0,0548	0,1734		
LP08		5,28	6,96	1,32	0,20	0,15	0,15	16,42	16,60	16,42	16,60	16,42	16,60	16,81	16,60	16,61	22,30	18,50	0,0295	0,0425		
LP09		6,65	7,16	1,08	0,20	0,15	0,15	14,84	14,65	14,06	15,63	14,84	14,65	14,84	14,65	14,53	19,76	16,67	0,0609	0,0881		
LP10		5,28	6,96	1,32	0,20	0,15	0,15	14,84	14,65	15,63	15,63	15,63	15,63	15,63	15,63	15,41	22,30	18,50	0,0445	0,0781		
LP11		4,33	8,66	2,00	0,20	0,15	0,15	21,88	21,48	21,09	21,48	21,88	21,48	21,88	21,48	21,55	39,19	36,87	0,0436	0,0351		
LP12		5,63	6,71	1,19	0,20	0,15	0,15	17,97	18,55	17,97	18,55	17,97	18,55	18,75	18,55	18,10	20,50	16,43	0,0504	0,0679		

LP13		5,63	6,71	1,19	0,20	0,15	17,19	17,58	17,19	16,60	17,07	17,38	20,50	16,43	0,0283	0,0448
LP14		4,53	9,21	1,04	0,20	0,15	15,63	15,63	-	-	15,23	15,23	26,00	23,70	0,0895	0,0333
LP15		8,66	8,68	1,00	0,25	0,19	14,17	14,47	15,63	13,67	14,44	14,32	10,10	6,68	0,0164	0,0282
LP16		4,53	9,21	2,04	0,20	0,15	21,88	21,48	24,22	24,41	23,16	21,81	26,00	23,70	0,1198	0,0731
LP17		4,57	8,89	1,95	0,20	0,15	33,59	33,20	34,38	34,18	33,80	33,56	25,53	31,62	0,0467	0,0900
LP18		3,86	3,90	1,01	0,20	0,15	25,78	25,39	25,78	25,39	25,46	25,59	61,74	68,51	0,0505	0,0420
LP19		5,20	4,83	1,08	0,20	0,15	35,16	35,16	35,16	35,16	34,80	34,80	35,37	37,79	0,0309	0,0408
LP20		3,33	5,40	1,62	0,20	0,15	33,59	36,20	-	-	36,56	36,56	39,11	42,32	0,0514	0,0572
LP21		5,40	5,44	1,01	0,20	0,15	32,03	31,25	-	-	31,38	31,38	30,70	34,04	0,0368	0,0409
LP22		3,06	5,01	1,64	0,20	0,15	57,03	58,59	57,03	53,71	56,42	56,42	79,94	101,32	0,0554	0,0998
LP23		1,96	3,40	1,73	0,16	0,17	60,94	61,64	-	-	61,29	61,29	172,03	97,38	0,0797	0,0275
LP24		3,89	4,34	1,12	0,13	0,10	28,13	28,32	28,13	28,32	28,22	28,65	20,88	14,37	0,0335	0,0429
LP25		1,91	2,00	1,05	0,13	0,10	94,72	95,21	-	-	95,39	95,39	95,18	63,85	0,0312	0,0312
LP26		1,21	2,30	1,90	0,13	0,12	64,19	55,77	-	-	61,32	4,53	156,49	127,25	0,0932	0,1338
							62,62	55,77	-	-						
							61,06	68,49	-	-						

