UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

Valéria Espíndola Lessa

A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES E A FUNÇÃO AFIM: UM ESTUDO SOBRE A REPRESENTAÇÃO E A COMPREENSÃO DE INVARIANTES OPERATÓRIOS

Passo Fundo
2018

Valéria Espíndola Lessa

A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES E A FUNÇÃO AFIM: UM ESTUDO SOBRE A REPRESENTAÇÃO E A COMPREENSÃO DE INVARIANTES OPERATÓRIOS

Tese apresentada ao curso de Doutorado em Educação, do Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação, da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Educação, sob orientação do Prof. Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

Passo Fundo
2018

O ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola (PIAGET, 1983, p. 225).

AGRADECIMENTOS

A realização desta pesquisa contou com o apoio de pessoas e de instituições especiais, por isso agradeço:

Ao Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Erechim, por contribuir financeiramente através de bolsa auxílio à mensalidade do Curso de Doutorado em Educação da Universidade de Passo Fundo (UPF) durante o ano de 2016, por possibilitar o afastamento docente de 01 de março de 2017 a 31 de julho de 2018 para a dedicação integral às atividades do doutorado, por permitir a realização da pesquisa empírica no Campus Erechim com estudantes da instituição, bem como por ser uma instituição pública, gratuita e de qualidade que valoriza seus servidores e estudantes e oferece uma educação de excelência.

Aos estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS que participaram da investigação com carisma e disposição, deixando os momentos da pesquisa mais leves e descontraídos. Em especial, à estudante do Curso de Engenharia Mecânica, Ana Paula Cervinski, bolsista de iniciação científica em 2016, que contribuiu na realização de um dos momentos do estudo de campo, atuando como pesquisadora.

À CAPES, por ter proporcionado o financiamento de uma bolsa do Programa de Suporte à Pós-Graduação de Instituições Comunitárias de Educação Superior – PROSUC/CAPES, pelo período de agosto de 2017 a julho de 2018, e à UPF, por viabilizar a efetivação do recurso.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da UPF, em especial, da Linha de Pesquisa Processos Educativos e Linguagens, às Professoras Adriana Dickel, Flávia Caimi e Cleci da Rosa, pelo carinho, pela dedicação à pesquisa e pelas discussões nos seminários das sextas-feiras à tarde. Foram momentos muito importantes para minha construção como pesquisadora em Educação.

Ao Professor e Orientador Adriano Teixeira, por compartilhar essa experiência, por sempre ter estado à disposição, pelos incentivos constantes, por me dar autonomia e, principalmente, por acreditar no potencial da pesquisa.

Às Professoras Daniela Barros, Leandra Fioreze, Flávia Caimi e ao Professor Marco Trentin, por fazerem a leitura da Tese e ajudarem na qualificação da pesquisa.

À Universidade Aberta, em Portugal, por proporcionar o estágio de doutoramento em Lisboa, de janeiro a abril de 2018, e à Professora Daniela Barros, por me receber tão bem do outro lado do oceano, me mostrar um pouquinho dos encantos portugueses e proporcionar aprendizagens acadêmicas, culturais e gastronômicas.

À colega e amiga Franciele Forigo, que foi parceira desde o início dessa caminhada. Foram quatro anos de muitas conversas, desabafos e parcerias na escrita de artigos, na ida a eventos e na construção de nossas Teses.

Aos amigos queridos, Zoraia, Giovani, Rose e Luis Fernando, pela amizade, pelo carinho e pela presença constante na minha vida.

À minha mãe e ao meu pai, pelo amor, pelo incentivo e pela compreensão nos muitos momentos de ausência. Sem o apoio incondicional de vocês desde sempre, essa caminhada não seria possível.

E ao Thiago, meu marido, meu amor, meu companheiro, agradeço imensamente pelo incentivo, por compreender os momentos difíceis na construção e na escrita da Tese e por compartilhar a felicidade que construímos todos os dias.

RESUMO

Esta pesquisa insere-se na temática sobre o processo de conceituação matemática mediada pela programação de computadores. Pensar sobre o movimento de elaboração conceitual da Matemática e sobre o uso das tecnologias no processo educativo é fundamental, tendo em vista o crescente uso dos aparatos tecnológicos na sociedade atual e as possibilidades que apresenta para a educação. Com base no referencial teórico da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, mais precisamente nos seus conceitos de situações, invariantes operatórios e representações, e em elementos da Teoria Construcionista de Seymour Papert, notadamente, o modelo da espiral da aprendizagem proposta por José Armando Valente, a pesquisa buscou responder a seguinte questão: Como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *campus* Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores? Para tanto, realizou-se uma pesquisa de cunho qualitativo com estudo teórico sobre as bases conceituais e estudo empírico com os estudantes. Nessa direção, constituiu-se o Campo Conceitual das Funções Afim, no qual foram categorizados os principais invariantes operatórios associados às situações, o IO1 - variável, IO2 - taxa de variação, IO3 - taxa fixa e IO4 - correspondência biunívoca, os quais atuaram como categorias de análise. Além disso, foi elaborada uma estratégia didática com base no uso da programação de computadores e na contribuição da Teoria dos Estilos de Aprendizagem, a fim de servir como instrumento de pesquisa e, também, como contribuição da Tese para a elaboração didática na escola. Os dados da pesquisa empírica foram produzidos por dois estudantes mediante a realização das situações sobre Funções Afim com o ambiente de programação Scratch, associado ao método da observação interativa. Com isso, foi possível identificar as formas operatórias e predicativas dos invariantes operatórios e interpretar as representações e as compreensões para, então, descrever os teoremas em ação associados. Como resultados, a pesquisa apontou para a ampliação do conceito de variável (IO1) na direção de processos de generalização mais complexos e para a possibilidade de concretização e de dinamização do conceito de taxa de variação constante (IO2). Além disso, permitiu mostrar que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim aconteceu por meio de ações de concretização, dinamização, compreensão e reformulação, proporcionadas, respectivamente, pelas etapas da descrição, da execução, da reflexão e da depuração da espiral da conceituação, a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores.

Palavras-chave: Funções Afim; Programação de computadores; Invariantes operatórios; Situações; Representações; Compreensões.

ABSTRACT

This research is part of the thematic about the process of mathematical conceptualization mediated by computer programming. Thinking about the conceptual elaboration movement of Mathematics and about the use of technologies in the educational process is fundamental, considering the growing use of technological apparatuses in today's society and the possibilities it presents for education. From the theoretical reference of Gérard Vergnaud's Conceptual Field Theory, more precisely in concepts of situations, operative invariants and representations, and elements of Seymour Papert's Constructivist Theory, notably the model of the learning spiral proposed by José Armando Valente, the research sought to answer the following question: How are the processes of representation and understanding of the operative invariants of the Linear Functional Field of Experiments manifest in two students of the Technical Course in Informatics of the IFRS – *Campus* Erechim, based on a didactic strategy mediated by computer programming? For that, a qualitative research was carried out with theoretical study on the conceptual bases and empirical study with the students. In this direction, the Conceptual Field of Linear Functions was constituted, in the sense of delimiting the conceptual field of interest in the research, in which the main operative invariants associated to the situations were categorized: IO1 - variable, IO2 - rate of variation, IO3 - fixed rate and IO4 - one-to-one correspondence, which served as analysis categories. Also, a didactic strategy was created based on the use of computer programming and the contribution of the Theory of Learning Styles, in order to serve as a research tool and also as a contribution of the thesis to the didactic elaboration in the school. The empirical research data were produced by performing the situations on Linear Functions with the Scratch programming environment by two selected students, associated with the method of interactive observation. With this, it was possible to identify the operative and predicative forms of the operative invariants and to interpret the representations and understandings to then describe the associated theorems. As results, the research pointed to the extension of the concept of variable (IO1), providing more complex generalization processes and the possibility of concretization and dynamization of the concept of constant rate of variation (IO2). In addition, it allowed to show that the process of manifestation of the representation and understanding of the operative invariants of the Linear Functions Conceptual Field happened through actions of concretization, dynamization, comprehension and reformulation provided, respectively, by the stages of description, execution, reflection and debugging the spiral of conceptualization, based on a didactic strategy mediated by computer programming.

Keywords: Linear Functions; Computer programming; Operative invariants; Situations; Representations; Understandings.

LISTA DE FIGURAS E GRÁFICO

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

[...] o momento da tese é, antes de tudo, um momento de reflexão (HESS, 2005, p. 29)

Ao fazer uma tese, o pesquisador se coloca diante da necessidade de fazer reflexões e escolhas. E tais escolhas estão repletas de significados provenientes de espaços nos quais transita. Para Minayo (1996), realizar uma pesquisa requer situar-se numa *Área de Interesse* na qual se insere a curiosidade e, a partir desta, definir o *Objeto* ou o *Problema* a ser investigado. Trata-se, então, de realizar um recorte a partir da ampla gama de possibilidades que uma temática apresenta.

Como sou professora e estou fazendo pesquisa em educação, as opções e os recortes que faço estão relacionados com meu processo formativo e com o trabalho docente que realizo há mais de doze anos. Para tanto, inicio a exposição desta tese apresentando considerações a respeito de minha trajetória acadêmica enquanto estudante, professora e pesquisadora, bem como os anseios e as inquietudes que se desdobram desta caminhada. Por fim, apresento os capítulos que organizam este texto.

A trajetória começa em dezembro de 2001, sábado de manhã, no bairro Agronomia de Porto Alegre, no primeiro dia de aula da disciplina "Computador na Matemática Elementar I"[1], e num momento de muita expectativa. Meu ingresso na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), no Curso de Licenciatura em Matemática (Noturno), ocorreu em paralelo com minha inserção no mundo das tecnologias digitais. E foi na Universidade que tive a oportunidade de ter meu primeiro contato com o computador. Para acompanhar a disciplina, foi necessário que eu criasse um *e-mail* e que comprasse um *disquete* para salvar as construções na Linguagem Logo que estava aprendendo. Esta foi uma experiência revolucionária e percebi que, a partir daquele momento, a informática faria parte de toda a minha vida profissional e pessoal.

Depois, outras disciplinas do curso, como "Ensino-Aprendizagem de Matemática I, II e III", "Laboratório de Prática de Ensino de Matemática I, II e III" e "Educação Matemática e

---

[1] Disciplina do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Neste ano o segundo semestre letivo iniciou em dezembro devido à greve.

Tecnologias – EDUMATEC", ministradas por professores[2] do Instituto de Matemática, os quais se aproximavam das questões educacionais, foram cruciais para minha aproximação aos recursos tecnológicos disponíveis para se trabalhar conteúdos de matemática na sala de aula.

Ainda durante a graduação, experiências fora da Universidade foram imprescindíveis para ratificar minha escolha pela docência. No Projeto Escola, Conectividade e Sociedade da Informação (ECSIC), do Laboratório de Estudos Cognitivos (LEC)[3], trabalhei em laboratórios de informática de escolas municipais de Porto Alegre, realizando projetos de aprendizagens com estudantes e auxiliando professores na realização de diversas atividades, tais como a criação de páginas da internet, a utilização de objetos de aprendizagem e jogos, *chats*, *e-mails* e outras ações pertinentes ao universo virtual. Foi um momento de grandes aprendizagens.

Minha prática docente inicia em abril de 2006, antes mesmo de minha formatura. Trabalhei com estudantes de Ensino Fundamental e Médio, em escolas particulares e públicas da região metropolitana de Porto Alegre, e pude vivenciar as desigualdades sociais, a dura realidade de nossas escolas públicas e os desafios constantes da docência. A partir destas experiências, começo a refletir sobre questões relacionadas à minha prática e sobre a aprendizagem dos estudantes, levantando algumas indagações que orientaram meu percurso acadêmico: Como melhorar a aula de matemática? Como melhorar a aprendizagem dos estudantes? Como ensinar num contexto de desenvolvimento tecnológico?

Na continuidade do percurso acadêmico, ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, para cursar o Mestrado Profissional, em 2009. Neste novo espaço, inicio minha caminhada no campo da pesquisa e, mais especificamente, da pesquisa em Educação Matemática. A partir do contexto em que eu vivia no momento e das minhas indagações constantes sobre como melhorar a minha prática docente, optei por investigar o processo de construção do conhecimento sobre Frações num 6º ano do Ensino Fundamental (EF) da escola onde eu lecionava, através da aplicação de uma sequência didática envolvendo o significado medida das Frações (LESSA, 2011), tendo como orientadora a Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina.

Para desenvolver a pesquisa, me aproximei das ideias referentes à construção de conceitos e construí meu referencial teórico baseado na Teoria dos Campos Conceituais (TCC),

---

[2] Destaco duas pessoas importantes neste processo: Profª. Drª. Maria Alice Gravina e Prof. Dr. Marcus Vinícius Azevedo Basso.

[3] Coordenado pela Prof.ª Dr.ª Léa da Cruz Fagundes, da UFRGS.

de Gérard Vergnaud. Assim, passo a compreender a aprendizagem como um processo de construção cognitiva que acontece na relação entre as situações, os elementos cognitivos de cada sujeito e as diferentes formas de representações.

Foi na prática da pesquisa em sala de aula que consegui compreender com maior clareza a complexidade da teoria proposta por Vergnaud. A partir de idas e vindas às leituras e de muitas análises da prática, meu olhar para as ações dos estudantes passou a identificar elementos teorizados por Vergnaud. Desta forma, começo a perceber os conhecimentos matemáticos válidos ou conhecimentos que precisavam ser reelaborados pelos estudantes de modo a se constituírem como válidos no corpo do saber matemático, a partir das representações que faziam das suas ideias. A partir de então, passo a perceber com mais clareza a integração entre teoria e prática.

Com o meu ingresso na rede federal de educação, em 2013, torno-me professora do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), no *campus* Erechim, ministrando disciplinas de Matemática para cursos técnicos e superiores. Neste novo contexto, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) tornam-se cotidianamente companheiras da minha prática docente, na sala de aula e fora dela. Percebo que, cada vez mais, estão mudando a forma como são tratadas as informações, como acontece a comunicação e, consequentemente, estão apresentando formas diferenciadas para aquisição de conhecimentos. Nessa perspectiva, concordo com Pretto (2013) quando afirma que

> os computadores e as redes nos trazem inúmeras possibilidades de produção de conhecimento e de culturas e não apenas de consumo de informação e, se não forem aprisionadas por teorias pedagógicas estreitas e imediatistas, podem contribuir para a formação de uma geração de pessoas geniais que estarão programando as máquinas, suas vidas e, principalmente, os destinos do planeta e da humanidade (PRETTO, 2013, p.105-106).

A partir de então, passo a refletir cada vez mais sobre o uso das TDICs em sala de aula. Ou seja, de que forma usá-las ou integrá-las à atividade docente, não apenas na exposição de conteúdos? Ou ainda, como usá-las para potencializar o ensino e a aprendizagem? O que os recursos digitais podem fazer a mais na construção do conhecimento que outras tecnologias analógicas, como o papel e o lápis, não podem?

Seguindo nesta direção, em 2014, ingresso no Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGEdu), da Universidade de Passo Fundo (UPF), por compreender que o objeto de pesquisa de educadores matemáticos está inteiramente ligado à área de investigação em ciências humanas, embora trabalhem cotidianamente com objetos de uma ciência dita exata. E, desde então, sob orientação do Professor Dr. Adriano Canabarro Teixeira, também integro o Grupo de Estudo em Cultura Digital na Educação da UPF (GEPID), que, em linhas gerais, investiga os processos pedagógicos no contexto da cultura digital e da informática educativa. Isso possibilitou novamente minha aproximação com a programação de computadores, trazendo à tona um sentimento nostálgico de quando aprendi a Linguagem Logo. A partir dessa trajetória, assumo o compromisso e o prazer de construir este *momento da tese*.

O objeto de investigação desta pesquisa foi produzido a partir da articulação do aporte teórico de base que trago da experiência do mestrado, a **Teoria dos Campos Conceituais**, do conteúdo matemático das **Funções Afim**, da importância e relevância dos conceitos e raciocínios à formação matemática do estudante da escola básica e da **Programação de Computadores** como recurso tecnológico e pedagógico inserido numa estratégia didática.

Para Vergnaud (1996, 2008, 2017a), é por meio de situações que desafiam o sujeito que há a manifestação de seus invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação), permitindo reformulações do que ele já sabia e a constituição de novas ideias para, assim, acontecer a conceituação. Da mesma forma, a explicitação, a exteriorização das representações e das compreensões dos estudantes são caras à didática, ao professor, de modo a contribuir na organização das estratégias de ação docente visando à aprendizagem dos estudantes.

Logo, tenho o interesse em conhecer as possibilidades que a programação de computadores pode trazer ao professor de Matemática da escola básica em relação às manifestações conceituais dos estudantes, não apenas como um recurso avaliativo no sentido de verificação (se conseguiu fazer a programação correta), mas no sentido de mediação que objetiva a troca de ideias entre e com seus estudantes, num movimento de construção do conhecimento.

Diante disso, o problema de pesquisa constitui-se da seguinte forma: **Como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS –** ***campus*** **Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores?**

Para tanto, tenho como objetivo geral investigar, nas formas de manifestação no ambiente de programação de computadores, os teoremas em ação associados de modo a reconhecer os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios. De modo mais específico, pretendo:

(a) Compreender o Campo Conceitual das Funções Afim, a partir da TCC, examinando a complexidade das situações, dos invariantes operatórios e das representações desse campo;
(b) Explorar a programação de computadores como recurso que possibilite uma estratégia didática para o processo de conceituação;
(c) Identificar as manifestações conceituais dos estudantes, nas suas formas operatórias e predicativas, e interpretar os teoremas em ação.

No capítulo subsequente, "O objeto de pesquisa e o desenho metodológico: uma construção possível", apresento com maior riqueza de detalhes a construção do problema de pesquisa, apontando as justificativas para os temas de interesse, o encontro com a produção acadêmica e o desenho metodológico da investigação. No terceiro capítulo, "O Campo Conceitual das Funções Afim", desenvolvo minha perspectiva sobre a constituição do Campo Conceitual das Funções Afim, discutindo os principais conceitos da TCC que sustentam o objeto de investigação, os aspectos formais da Matemática sobre o conceito de Função e de Função Afim e os aspectos relacionados às diretrizes educacionais e aos livros didáticos. Concluo o capítulo com uma sistematização do Campo Conceitual das Funções Afim, apresentando uma categorização das classes de situações pertinentes ao conteúdo, dos invariantes operatórios necessários de serem desenvolvidos nos estudantes para a compreensão do conceito e das possíveis representações destes invariantes.

No quarto capítulo, "Programação de computadores na constituição de uma estratégia didática", inicio trazendo uma discussão mais técnica sobre programação de computadores, avançando para a discussão da programação na Educação a partir da perspectiva da Teoria Construcionista proposta por Seymour Papert e ratificada por José Armando Valente. Em seguida, estabeleço articulações entre as teorias de Vergnaud e de Papert, constituindo a Espiral da Conceituação. Já entrando em aspectos metodológicos da pesquisa, apresento também uma discussão sobre o ambiente de programação selecionado para a realização da pesquisa empírica, o Scratch, e, por fim, explicito como foi pensada a construção das situações sobre Funções Afim no ambiente Scratch, apontando a contribuição da Teoria dos Estilos de Aprendizagem nessa construção.

No quinto capítulo, “Procedimentos metodológicos”, apresento a construção metodológica da pesquisa, revelando o estudo piloto realizado, os métodos, as técnicas e os instrumentos na seleção dos sujeitos de pesquisa, na aplicação das situações com os sujeitos, na produção dos dados e na análise. Por fim, no sétimo capítulo, “Considerações finais”, apresento os achados da pesquisa, indicando a resposta ao problema de investigação, trazendo uma reflexão sobre todo o processo envolvido na pesquisa, bem como as possibilidades para estudos futuros.

2 O OBJETO DE PESQUISA E O DESENHO METODOLÓGICO: UMA CONSTRUÇÃO POSSÍVEL

A pesquisa não apenas descreve o objeto. Ela o constrói
(SILVA, 2010, p. 20).

Quando um pesquisador se interessa por um assunto e dele formula uma pergunta, esta, por sua vez, já está imbuída de um olhar, de uma leitura de mundo, de uma teoria. Para Silva (2010, p.16), a teoria "[...] é uma lente que deforma, conforma, reforma, informa e dá forma ao que se observa". Com isso, quero dizer que o objeto de pesquisa deste estudo, aquilo que observo e investigo, foi *construído* a partir da *lente* proporcionada por minha formação acadêmica em Matemática e pela aproximação à TCC e às TDICs.

Neste capítulo, busco apresentar os elementos que constituem a problemática da pesquisa, trazendo as justificativas das escolhas feitas, o mapeamento de estudos anteriores sobre o tema, o qual permitiu delinear o foco da pesquisa, para, então, expor o desenho metodológico que representa a forma como produzi a pesquisa.

2.1 Justificativas

A partir de minha formação acadêmica e da experiência docente como professora de Ensino Médio e, agora, Ensino Superior, notadamente de cursos de Engenharias, considero que o conteúdo matemático das Funções é um dos mais relevantes e abrangentes trabalhados na educação básica. Isso é devido à possibilidade de estabelecer relações entre os três ramos da Matemática, a aritmética, a geometria e a álgebra, aplicações em diferentes áreas do conhecimento, como a Economia, Biologia, Física, Química, Sociologia, entre outros, e o desenvolvimento de raciocínios essenciais para a formação matemática do estudante.

Além disso, é um conceito que está presente no cotidiano, como, por exemplo, numa notícia sobre a taxa percentual de desemprego no país nos últimos dez anos, na qual gráficos são criados para estabelecer as relações entre grandezas. Nesse sentido, para interpretar tais gráficos, não é preciso ser *expert* em Matemática, ou conhecer todas as definições, notações e procedimentos de cálculos, apenas é importante ter desenvolvido certas competências que permitam estabelecer as devidas relações e por em ação alguns elementos do repertório conceitual construído que também se associam a outras áreas do conhecimento (como o significado de desemprego). Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio (PCNs+EM),

> o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

O conteúdo de Funções trabalhado na escola é bastante extenso, pois aborda seus diversos tipos relacionados aos estudos de Funções de uma variável real (Função Quadrática, Função Exponencial, Função Logarítmica, Função Trigonométrica, etc.), ocupando a maior parte dos conteúdos dos livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio, deixando algum tratamento para a 2ª série. Em Dante (2013), cerca de 75% do conteúdo tratado é sobre Funções e, em Iezzi et al (2013), é de aproximadamente 63%. Sendo assim, assumo o interesse em focar a pesquisa na Função Afim por ser o tipo de Função introdutória nos currículos escolares e por abordar os conceitos de variáveis, relações de correspondência, dependência, conjunto domínio e imagem, representações gráficas, analíticas etc., os quais também são abordados pelos demais tipos.

Diante de tais constatações e mesmo considerando estudos já realizados sobre o ensino e a aprendizagem de Funções[4], acredito ser relevante e atual o desenvolvimento de pesquisas que tratem do conceito, uma vez que está presente na organização curricular da escola e, conforme dados do SAEB (2017), os estudantes brasileiros concluintes do Ensino Médio apresentam-se no nível dois de 10 níveis de proficiência em Matemática, indicando um conhecimento incipiente sobre a matéria escolar.

Para essa pesquisa, então, vejo na TCC, de Vergnaud, o aporte teórico basilar a fim de me ajudar a *dar forma* ao objeto de investigação ao mesmo tempo que proporciona as *lentes* para ver e interpretar as elaborações conceituais dos estudantes. A teoria apresenta uma forma de tratar o processo de desenvolvimento cognitivo associando elementos empreendidos pelos estudos de Piaget e da Didática da Matemática, buscando responder

[4] No subcapítulo 2.2 trato do assunto.

como este desenvolvimento pode se dar na sala de aula, envolvendo estudantes e professores como protagonistas do processo.

A partir disso, entendo a aprendizagem como a construção de campos conceituais que se dá mediante as situações vivenciadas pelo sujeito ao longo de sua vida, as situações didáticas proporcionadas pelo professor na sala de aula e os repertórios mentais que possui. Na relação entre os desafios e a necessidade de solucioná-los, constroem-se e reconstroem-se os invariantes operatórios a partir da operacionalização proporcionada pelos esquemas de pensamentos (VERGNAUD, 1996; 2003). Tais invariantes constituem-se de elementos cognitivos como conceitos em ação e teoremas em ação que são colocados em prática nas atividades, sendo possível aceitá-los como úteis à situação, refutá-los ou reformulá-los. Assim, um conceito adquire sentido ao sujeito mediante um conjunto de situações, de invariantes operatórios e de representações.

Segundo a TCC, a representação é constituída de significantes (símbolos) e de significados (invariantes operatórios), pois considera que tudo o que é expresso está imbuído de alguma forma de entendimento, de compreensão, esteja essa certa ou equivocada. É possível não obter êxito na resolução de uma atividade matemática tendo conhecimentos corretos sobre os conceitos envolvidos, da mesma forma que é possível obter sucesso na solução final de uma atividade sem compreender de fato os conceitos envolvidos. Por isso, a representação explícita é tão relevante à didática. Somente através dela é possível avaliar os conhecimentos e, assim, propor novas situações e orientar o processo de aprendizagem.

Nas diferentes formas de representações dos conhecimentos, Vergnaud (2017a) define a forma operatória e a forma predicativa. O conhecimento na forma operatória permite aos sujeitos agir em situação, é o saber-fazer. E o conhecimento na forma predicativa, permite reconhecer, compreender e falar sobre os objetos e suas propriedades usados na ação, é o saber-explicar. Quanto mais o sujeito conseguir manifestar essas formas na resolução de uma situação, mais domínio terá do campo conceitual.

Nesse sentido, a organização do pensamento e a manifestação das ideias são comumente, auxiliados por diversos recursos e suportes tecnológicos. Por muitos anos, tais recursos baseavam-se, exclusivamente, na oralidade, na escrita manuscrita e, posteriormente, na escrita impressa, associados a recursos e instrumentos manipuláveis, como, por exemplo, tabuadas e ábaco para a aprendizagem da Matemática. Hoje, com o advento das TDICs, outras possibilidades para organizar, raciocinar, manifestar e comunicar ideias abrem-se à sociedade (LEVY, 2011) e, consequentemente, à educação.

Vive-se na cibercultura, que, segundo Lemos (2003, p. 12), pode ser entendida como “a forma sociocultural que emerge da relação simbiótica entre a sociedade, a cultura e as novas tecnologias”. E, dentre todas estas novas tecnologias, os computadores pessoais portáteis, *tablets* e *smartphones*, vêm ganhando uma importância cada vez maior na realização de atividades cotidianas e profissionais das pessoas. Especificamente no Brasil, pesquisas apontam o aumento progressivo do uso de dispositivos e internet nos domicílios e nas escolas (TIC DOMICÍLIO, 2016; TIC EDUCAÇÃO, 2016).

Além disso, a inclusão das TDICs nos currículos escolares, como parte integrante do desenvolvimento das disciplinas obrigatórias, é um tema que tem aparecido com frequência nas diretrizes curriculares mais recentes. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz, como uma das suas competências gerais para os três níveis de ensino,

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Diante desse cenário, há uma cultura digital vigente, e o ambiente escolar reflete os desafios e as contradições dessa realidade. As TDICs estão presentes na vida das pessoas dentro e fora da escola, ainda que de forma não universal, e há uma preocupação dos documentos oficiais em potencializar seus usos de forma a garantir uma educação de qualidade. No entanto, é preciso pensar no uso que se faz dessa tecnologia a fim de contribuir com os processos didáticos e pedagógicos.

Para Demo (2008, 2017), as TDICs podem oferecer alguma mudança significativa nas escolas se contribuírem numa virada, não apenas tecnológica, mas pedagógica. Isso significa considerar que a mudança não está na sua presença na sala de aula, mas, sobretudo, no uso que se faz dela para a aprendizagem dos estudantes. Do contrário, segundo o autor, seriam apenas enfeites e bijuterias em aulas que oferecem apenas transmissão de conteúdo.

No final dos anos de 1990, quando os primeiros computadores estavam sendo instalados nas escolas brasileiras, Valente (1998) já considerava a necessidade de pensar no uso do computador a partir de outra perspectiva metodológica e pedagógica. Segundo ele,

> existem diferentes maneiras de usar o computador na educação. Uma maneira é informatizando os métodos tradicionais de instrução. Do ponto de vista pedagógico, esse seria o paradigma instrucionista. No entanto, o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento. Neste caso, o conhecimento não é passado para o aluno. O aluno não é mais instruído, ensinado, mas é o construtor do seu próprio conhecimento. Esse é o paradigma construcionista onde a ênfase está na aprendizagem ao invés de estar no ensino; na construção do conhecimento e não na instrução (VALENTE, 1998, p. 30).

É possível perceber, quase 30 anos depois, que esse tema permanece em pauta, pois ainda não há uma incorporação efetiva das TDICs no sentido do aproveitamento de seu potencial no desenvolvimento criativo e crítico dos estudantes (PIMENTEL, 2017). Ainda, segundo Mello e Moraes (2017), muitas vezes, a forma como esses aparatos são utilizados acaba por reproduzir práticas educacionais já existentes.

Considero, assim, o interesse em abordar o tema das TDICs na pesquisa com base em pressupostos teóricos que consideram as diferentes formas de aprendizagem dos estudantes, seus diferentes estilos, que levam em conta sua autoria e criatividade (BARROS, 2017). Também, acredito ser importante desenvolver uma estratégia que envolva o conteúdo das Funções Afim, os objetivos didáticos, um ambiente de programação e que privilegie a manifestação das ideias, das representações, das compreensões dos estudantes para, então, proporcionar a construção de novos conhecimentos.

Dentre as diversas possibilidades de *softwares* e aplicativos educacionais disponíveis para o tratamento do conteúdo das Funções Afim, apresento a programação de computadores como um recurso tecnológico que possibilita a ação de “ensinar” o computador a fazer algo, seja um desenho, um cálculo, o movimento de um objeto na tela do computador ou outra coisa. Para “ensinar”, é necessário dispor de conhecimentos sobre a ferramenta computacional como também sobre o conteúdo envolvido. Com isso, o estudante é levado a elaborar seus planos para ensinar o computador a criar hipóteses e testá-las.

Conforme Papert (1985, 2008), programar permite a construção de micromundos, onde a criança pode criar e recriar objetos e movimentos, aplicando seus conhecimentos tanto cotidianos como científicos. Se ela deseja programar o desenho de um quadrado, por exemplo, precisará por em ação conhecimentos reais sobre a figura geométrica, como os ângulos internos do quadrado, e sobre os movimentos necessários para cursor do *software* realizar o desenho. Na tela do computador, a criança passa a ver o que ela mesma projetou, o que ela sabe sobre aquilo que fez e se o seu programa desenhou um quadrado perfeito ou não. Isso possibilita reformular suas ideias até conseguir alcançar seu objetivo.

O processo sequencial, utilizado na elaboração de algoritmos, permite que a criança, ao testar suas hipóteses sobre a realização de um procedimento na forma de linguagem de programação, confronte imediatamente os resultados a partir do *feedback*. Este retorno imediato na tela do computador permite a reflexão sobre a ação e, se necessário, a reformulação das hipóteses iniciais para testá-las novamente. É um processo em espiral em que se pode perceber, nas representações nos códigos, as descrições do pensamento e os diversos conhecimentos em ação.

Também, proporciona o desenvolvimento do pensamento computacional. Para Wing (2006) e Brennan e Resnick (2012), o pensamento computacional é uma forma pela qual as pessoas resolvem problemas, usando o computador a seu serviço. Trata-se de aplicar competências relacionadas à abstração e à decomposição de problemas de forma a buscar a solução usando recursos computacionais e estratégias algorítmicas. É reformular um problema aparentemente difícil pela redução, incorporação, transformação ou simulação. É pensar recursivamente a partir de um sequenciamento. É elaborar o processamento paralelo de diferentes instruções. É a habilidade de tomar decisões a partir de certas condições. É armazenar, recuperar, atualizar dados e interpretar.

A partir destas características específicas dos ambientes de programação, já juntamente com o estabelecimento de uma estratégia didática envolvendo as Funções Afim, vejo uma grande possibilidade de manifestação das elaborações conceituais dos estudantes, quando noções são postas em ação, testadas e reformuladas. Neste sentido, torna-se imprescindível conhecer o que outros estudos que abordam as temáticas apresentadas aqui trazem de resultados e de possibilidades. Assim, no tópico seguinte, apresento um mapeamento das produções em teses e dissertações para, em seguida, estabelecer o problema e os objetivos dessa pesquisa.

2.2 O estado do conhecimento

Para a realização de uma pesquisa acadêmica, é essencial conhecer o que tem sido produzido sobre a temática estudada, a fim de avançar na área e não incorrer em investigações que não são importantes para o campo científico, ou até mesmo que já foram realizadas. Segundo Romanowski e Ens (2006, p.41),

> esses estudos são justificados por possibilitarem uma visão geral do que vem sendo produzido na área e uma ordenação que permite aos interessados perceberem a evolução das pesquisas na área, bem como suas características e foco, além de identificar as lacunas ainda existentes.

Tais estudos são denominados “estado da arte” e têm origem nos Estados Unidos no final do século XIX, com o propósito de descrever a condição atual ou o nível alcançado por um tema específico (PUENTES; AQUINO; FAQUIN, 2005). No Brasil, este tipo de investigação surge recentemente e, segundo Romanowski e Ens (2006), o termo “estado da arte” está vinculado a estudos que abrangem uma área específica do conhecimento e em todos os diferentes meios de publicações existentes. É um estudo que se caracteriza por ser descritivo e analítico, com o intuito de revelar múltiplos enfoques, perspectivas e contradições dos trabalhos.

Realizar um estudo do tipo “estado da arte” pressupõe, portanto, analisar toda uma gama de dissertações, teses, artigos de periódicos, artigos de congressos, seminários e eventos da área. No entanto, uma outra denominação vem sendo utilizada para pesquisas que delimitam o estudo a apenas uma forma de publicação, por exemplo, pesquisas que analisam uma certa temática em teses e dissertações produzidas no Brasil em determinado intervalo de anos. A estas pesquisas tem-se chamado de “estado do conhecimento” (ROMANOWSKI; ENS, 2006).

Ambos os casos, “estado da arte” ou “estado do conhecimento”, possuem como objetivo principal a análise da produção realizada para, então, compreender como o tema está sendo tratado, quais das tendências teóricas estão envolvidas e quais as vertentes metodológicas foram utilizadas, gerando, assim, mais conhecimento na área. Neste sentido, muitas pesquisas, principalmente de doutorado, têm realizado o levantamento e análise de trabalhos acadêmicos sobre a temática investigada para reforçar a necessidade e a importância de se pesquisar o tema, para ajudar na constituição do problema de pesquisa e do referencial teórico e metodológico. Ou seja, estudos do tipo “estado do conhecimento” estão sendo realizados como parte integrante de um estudo maior.

Diante disso, realizo um “estado do conhecimento” que procura mapear estudos pregressos de teses e dissertações que abordassem a TCC como referencial teórico, associada ao conteúdo matemático de Funções e que envolvessem o recurso tecnológico da programação de computadores. Este estudo justifica-se pela contribuição na justificação da tese, bem como nas escolhas metodológicas tomadas.

Quero, portanto, conhecer o que tem sido pesquisado sobre a temática, quantos trabalhos já foram realizados no âmbito do imbricamento destes temas, qual o problema de investigação, a abordagem teórica e metodológica, os resultados e as possíveis lacunas apresentadas por eles. Tal esforço exploratório justifica-se no fato de que “[...] é necessário saber com segurança aquilo que disseram sobre o mesmo assunto outros estudiosos, mas em que é preciso sobretudo ‘descobrir’ qualquer coisa que os outros ainda não tenham dito” (ECO, 2007, p.28).

Este estudo foi realizado coletivamente[5] e demandou um extenso e profundo levantamento de informações das teses e dissertações a partir da escolha dos descritores a serem buscados, das plataformas digitais a serem utilizadas e do recorte de tempo estabelecido. Caracteriza-se por ser descritivo e analítico visando fornecer informações quantitativas e qualitativas dos trabalhos para, então, contribuir com as delimitações e escolhas teórico-metodológicas feitas na tese de doutorado e em trabalhos futuros.

Este levantamento teve início em meados de 2015, com buscas em repositórios brasileiros, como o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[6] e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[7], do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), sendo ampliado mais recentemente com repositórios internacionais de teses e dissertações em língua portuguesa, como o Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (RCAAP)[8] e a Biblioteca do Conhecimento Online (b-on)[9].

As buscas foram realizadas com os descritores “teoria dos campos conceituais” e

[5]O estudo foi realizado com o auxílio de bolsistas de iniciação científica do Grupo de Pesquisa em Cultura Digital na Educação (GEPID), da Universidade de Passo Fundo.
[6] Disponível em: <http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/> Acesso em: 31 dez. 2017.
[7] Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/> Acesso em: 21 mar. 2017.
[8] Disponível em: <https://www.rcaap.pt/> Acesso em: 31 dez. 2017.
[9] Disponível em: <http://www.b-on.pt/> Acesso em: 31 dez. 2017.

"Vergnaud", primeiramente num intervalo de dez anos, de 2006 a 2015, e depois sendo ampliada com a inclusão de 2016. Escolhi utilizar os dois descritores citados porque, ao realizar as duas buscas separadamente, verifiquei que alguns trabalhos se repetiam e outros não. Isto significa que alguns trabalhos fazem referência à teoria usando sua denominação completa e outros pelo nome de seu autor. Para organizar melhor os achados, inseri todas as informações encontradas em uma planilha eletrônica e desconsiderei os dados repetidos.

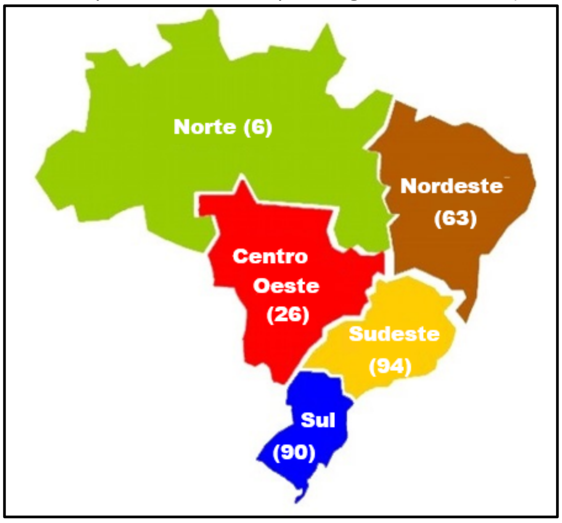
Os estudos com base teórica na TCC têm sido desenvolvidos em diferentes áreas do conhecimento, no entanto, interessa-nos pesquisas que se preocupam com o ensino e com a aprendizagem de conhecimentos da matemática e que envolvam informática educativa. Neste sentido, no caso das buscas no site da Capes, procurei refinar os resultados, a partir das áreas de avaliação "educação", "ensino", "ensino de ciências e matemática", "interdisciplinar" e "psicologia".

Como o objetivo era conhecer os trabalhos que utilizaram a TCC, mas que também abordassem o conteúdo matemático de Funções e que utilizassem o recurso tecnológico da programação de computadores, foi preciso classificar os resultados inseridos na planilha eletrônica segundo estes dois critérios: conteúdo matemático e recurso tecnológico. No entanto, foram ampliados estes itens de classificação, já que as plataformas pesquisadas forneciam alguns dados dos trabalhos.

A partir disso, organizei colunas com os seguintes critérios: link do resumo, tipo de trabalho (dissertação ou tese), área do conhecimento (Matemática, Física, Química, etc.), conteúdo específico da área do conhecimento (Funções, Frações, Cinemática, etc.), recurso tecnológico, ano, universidade e região do país. Depois de preenchidas tais informações na planilha, foram feitos filtros de modo a examinar quantitativamente as produções e, por fim, examinar qualitativamente o único trabalho encontrado que vai ao encontro da temática da tese. No exame qualitativo, portanto, realizei a leitura do trabalho a fim de conhecer o que e como foi produzido e a que conclusões (se) chegou.

Neste levantamento de teses e dissertações sobre a TCC, foram encontrados 283 trabalhos a partir da busca pelos descritores nas plataformas já citadas. Tais trabalhos advêm de Instituições de Ensino Superior (IES) de Portugal e do Brasil, sendo este último o país que reúne a maioria dos trabalhos. Em países africados de Língua Portuguesa não foram encontrados trabalhos. Os 279 trabalhos realizados no Brasil advêm de todas as regiões do país, concentrando a maioria, respectivamente, no sudeste, sul e nordeste, conforme está representado da Figura 2.1. Os quatro trabalhos referentes a Portugal provêm de IES das regiões do Norte, do Centro e de Lisboa, conforme a Figura 2.2.

Figura 2.1 - Distribuição do número de teses e dissertações defendidas entre 2006 e 2016 que envolvem a Teoria dos Campos Conceituais, por Regiões do Brasil (n = 279)



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 2.2 - Distribuição do número de teses e dissertações defendidas entre 2006 e 2016 que envolvem a Teoria dos Campos Conceituais, por Regiões de Portugal (n = 4)

Fonte: Elaborado pela autora.

De modo geral, estas produções que envolvem a TCC partem de inquietações advindas do ensino e da aprendizagem de conteúdos de certos componentes curriculares das instituições escolares. Referente a isso, dos 283 trabalhos, a maioria é sobre conteúdos de Matemática (223), seguido de Física (46) e Química (9). Os demais são da área da Biologia, Ciências, Geografia e Interdisciplinar. A visível predominância da Matemática deve-se, provavelmente, pela origem da TCC ser da Didática da Matemática francesa. No entanto, vem encontrando espaço nos estudos sobre os demais componentes curriculares.

Também, foram verificados que 57 publicações eram de pesquisas de doutorado e 226 de mestrado. Deste último, 154 de mestrado acadêmico e 72 de mestrado profissional. A predominância de dissertações de mestrado, provavelmente, deve-se pela existência de mais cursos de mestrado em relação aos de doutorado e, também, indica a presença de um maior número de estudos exploratórios sobre o tema e que, portanto, há ainda muito espaço para aprofundamentos[10]. No Quadro 2.1, é possível visualizar a distribuição dos trabalhos por componente curricular e por nível de pós-graduação.

Quadro 2.1 - Distribuição do número de teses e dissertações defendidas entre 2006 e 2016 que envolvem a Teoria dos Campos Conceituais, por componente curricular e nível de pós-graduação (n = 266)

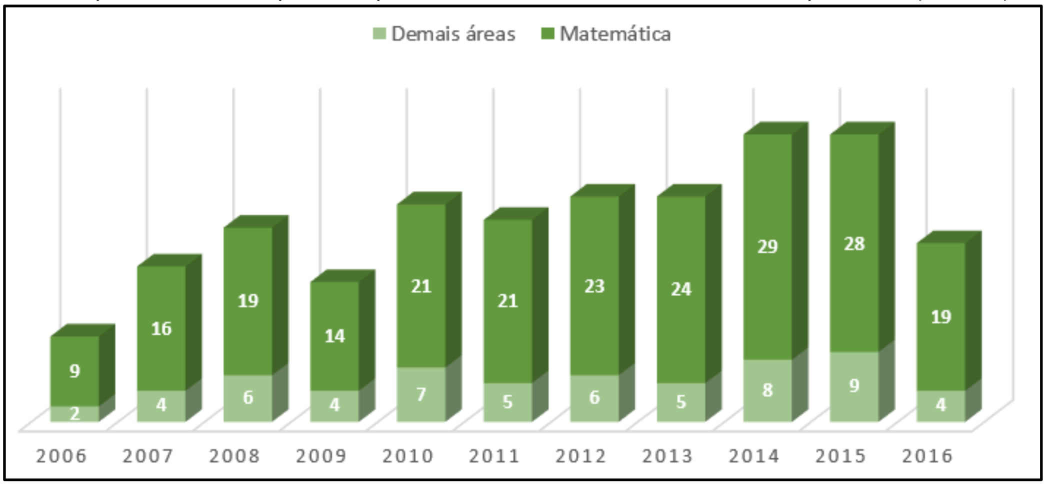
	Componentes Curriculares abordados nos trabalhos							
Nível de pós-graduação	Matemática	Física	Química	Biologia	Geografia	Ciências	Interdisciplinar	**Total**
Doutorado	40	13	2	1	0	1	0	**57**
Mestrados Acadêmicos	136	10	5	1	1	0	1	**154**
Mestrados Profissionais	47	23	2	0	0	0	0	**72**
Total	223	46	9	2	1	1	1	**283**

Fonte: Elaborado pela autora.

É interessante perceber, também, como se dá a evolução desses trabalhos ao longo dos 11 anos investigados e a relação da Matemática com os outros componentes curriculares. Conforme pode ser observado no Gráfico 2.1, há um considerável aumento das produções, e o envolvimento da Matemática acompanha esta evolução. Isso pode ser justificado por Gérard Vergnaud situar-se entre as referências teóricas contemporâneas mais relevantes para todos aqueles que desejam aprofundar seus estudos sobre desenvolvimento cognitivo, aprendizagem e didática escolar. Também, o autor "[...] tem sido, ao longo dos últimos trinta anos, referência intelectual de forte presença no Brasil, tendo em vista o número de pesquisadores brasileiros que formou [...]" (FALCÃO, 2009, p.9).

[10] Essa observação também foi constatada por Bragagnolo (2016) em seu estudo sobre o estado do conhecimento sobre "interação verbal entre professoras e crianças". Nesse sentido, o Brasil carece de mais estudos aprofundados originados de teses de doutorado.

Gráfico 2.1 - Distribuição do número de teses e dissertações defendidas entre 2006 e 2016 que envolvem a Teoria dos Campos Conceituais, por ano que envolvem Matemática e outros componentes (n = 283)



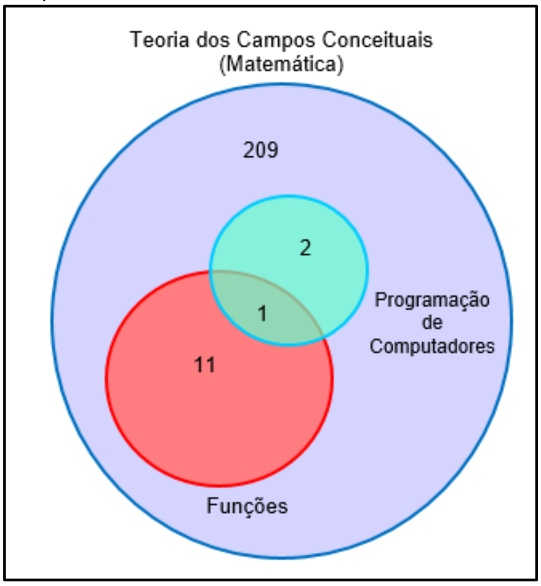
Fonte: Elaborado pela autora.

São diversos os conteúdos curriculares e os níveis de ensino abordados nos trabalhos, mas, para se chegar aos trabalhos que mais se aproximam da temática da tese, os dados da planilha foram filtrados segundo o componente Matemática e também segundo o conteúdo Funções. Dentre os 223 trabalhos, 12 tratam de Funções na Educação Básica e os demais conteúdos abarcam temas desde operações e resolução de problemas do campo aditivo e multiplicativo nas Séries Iniciais até equações diferenciais e a formação de professores de Matemática no Ensino Superior, passando por conteúdos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. É interessante perceber que, dentre estes 12 trabalhos sobre Funções, dois deles focaram no desenvolvimento do raciocínio funcional no 5º ano do EF, a partir do desenvolvimento de ideias básicas e intuitivas sobre o tema. Isso surpreende, tendo em vista que o trabalho deste conteúdo é iniciado, geralmente, no final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio.

Filtrando apenas a coluna dos recursos tecnológicos na planilha, dos 223 trabalhos que apareceram, 30 apresentaram a utilização de algum tipo de tecnologia digital, que, em geral, constituem-se *softwares* com fins educacionais, objetos de aprendizagem *on-line*, plataformas para cursos a distância, aplicativos de redes sociais e sites em geral. Destes 30 trabalhos, apenas três utilizaram a programação de computadores.

Ao realizar dois filtros ao mesmo tempo na planilha, “Funções” e “Recursos tecnológicos”, chegou-se ao número de seis trabalhos. Isto é, das 223 produções sobre a TCC com o componente Matemática, apenas seis tratam do tema de Funções e associam algum tipo de tecnologia digital em suas pesquisas. Destes seis, apenas um trabalho, a dissertação de mestrado de Ventorini (2015), utiliza a Programação de Computadores como recurso tecnológico. A Figura 2.3 apresenta um diagrama de conjuntos relacionando os três temas (TCC, Funções e programação de computadores), e a região central representa a interseção entre eles. A seguir, faço uma análise qualitativa da única dissertação encontrada que apresenta os três temas.

Figura 2.3 - Distribuição do número de teses e dissertações defendidas entre 2006 e 2016 que envolvem a Teoria dos Campos Conceituais, Funções e Programação de Computadores num diagrama de conjuntos (n = 223)



Fonte: Os autores[11]

Conhecer o que foi pesquisado por Ventorini (2015), a forma como procedeu e seus resultados foi de grande contribuição para o desenvolvimento de minha pesquisa de doutorado, pois uma tese precisa apresentar uma contribuição relevante para a área e, acima de tudo, precisa dizer algo que ainda não foi dito. Segundo Eco (2007), quem escreve deve aproveitar a experiência que adquiriu com escritos anteriores e produzir algo novo que outros estudiosos não deveriam jamais ignorar. É preciso, assim, conhecer para avançar. Para tanto, analisei a dissertação sob quatro aspectos, os quais apresento de forma sucinta nesse subcapítulo: o problema de pesquisa e os objetivos, abordagem teórica, a metodologia e os resultados.

Na sua dissertação de mestrado, intitulada *Construção de relações funcionais através do software Scratch*, Ventorini (2015, p. 20) propõe-se a investigar "Como a utilização do

[11] A confecção desta imagem contou com a ajuda do bolsista de Iniciação Científica da UPF Ângelo Dalzotto.

software de programação Scratch, através da criação de objetos de aprendizagem[12], pode contribuir na construção das relações funcionais?" Seu objetivo principal foi "investigar as potencialidades do *software* a partir de um conteúdo matemático" (VENTORINI, 2015, p. 32), definindo ser o Scratch o seu objeto de investigação e usando o referencial teórico de Gérard Vergnaud e Seymour Papert.

Em suma, por meio da pesquisa empírica, o pesquisador faz sua interpretação sobre os conhecimentos manifestados pelos estudantes durante as atividades de programação, a partir da TCC, identificando seus esquemas de pensamento e alguns conceitos em ação e teoremas em ação. Atinge os objetivos propostos e, como limites do estudo, aponta que o trabalho de observação de um número elevado de estudantes no laboratório de informática, somado ao fato de serem três turmas, causou dificuldades na coleta das informações. Consequentemente, a análise dos esquemas e dos conhecimentos em ação acaba por não ser tão detalhada e aprofundada como poderia.

A partir das contribuições dadas pelo estudo apresentado, é possível pensar sobre dois aspectos a serem trabalhados na tese. O primeiro se refere à possibilidade que um ambiente de programação oferece em relação ao desenvolvimento do conhecimento operatório e predicativo. Isto é, "[...] ao ensinar um computador a 'pensar', a criança embarca numa exploração sobre a maneira como ela própria pensa [...]" (PAPERT, 1985, p. 35). Neste sentido, a tese poderia avançar numa análise sobre como eles compreendem os invariantes operatórios que estão representando nos códigos de programação.

Um segundo aspecto se refere à metodologia de produção dos dados empíricos, pois, se quero investigar as manifestações dos invariantes operatórios no sentido da representação e da compreensão, preciso usar estratégias que permitam observar isso. Assim, seria importante usar métodos de entrevista com poucos estudantes durante a atividade empírica com a programação de computadores de modo a perceber os processos envolvidos na manifestação da forma operatória e predicativa dos conhecimentos.

[12] O autor apresenta uma definição de objeto de aprendizagem como sendo qualquer recurso eletrônico que possa dar suporte à aprendizagem, seja uma imagem, uma página, uma animação ou uma simulação. (VENTORINI, 2005)

2.3 O desenho metodológico

Toda produção de conhecimento, para ser validada e cientificamente aceita, necessita a identificação das bases lógicas e técnicas que possibilitaram sua verificação, ou seja, requer método (GIL, 2008). E, mesmo considerando as experiências de outros pesquisadores do mesmo campo científico, o método é constituído em cada caso específico de pesquisa, sendo criado e recriado a partir dos processos necessários para responder aos questionamentos (PAVIANI, 2009).

Assim, entendo a metodologia de uma pesquisa, tomando as palavras de Minayo (2013, p. 14), "[...] como o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade". Isso, para a autora, inclui a teoria da abordagem (o método), os instrumentos e procedimentos para a operacionalização (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (suas experiências, capacidades e sensibilidades). Assim, busco apresentar a seguir, de forma sucinta, um desenho referente à metodologia empregada nessa investigação, mas é o capítulo 5 que reservo para uma discussão mais detalhada dos métodos escolhidos.

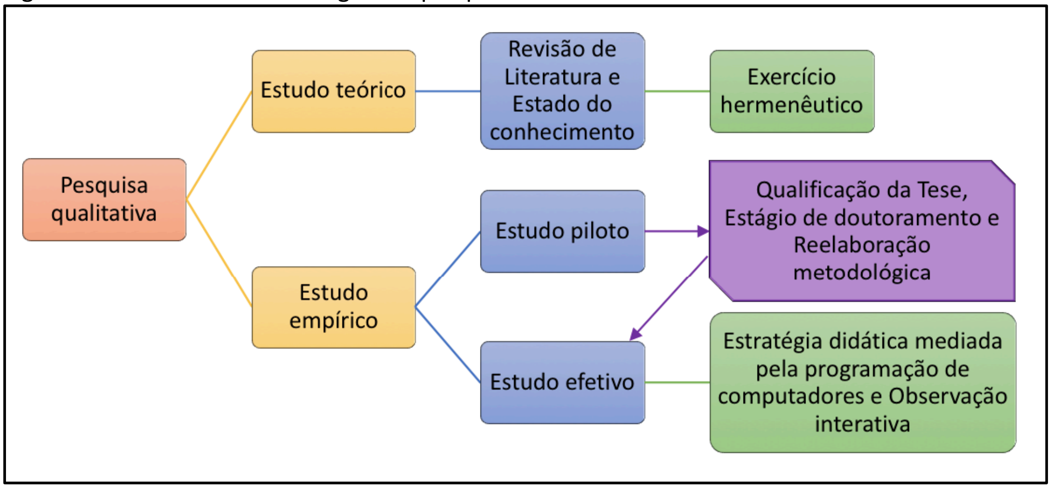
Em relação à teoria de abordagem, ou como Paviani (2009) denomina, modos de conhecer, de explicar, de descrever e de interpretar a realidade, esta tese insere-se numa perspectiva que se preocupa com o universo dos significados e com um nível de realidade que não pode ser quantificada (MINAYO, 2013). Ao assumir a postura epistemológica construtivista de que o conhecimento não está nos sujeitos e nem fora deles, mas é construído nas interações estabelecidas, preocupo-me com o processo, com o como, o porquê e os meios com os quais os sujeitos compreendem o mundo, culminando, portanto, numa pesquisa qualitativa.

Para a construção do objeto de investigação, é importante realizar um trabalho de pesquisa bibliográfica, sobre o qual se buscam as teorias que irão dar sustentação ao referencial, a partir de um exercício hermenêutico (MINAYO, 1996). No entanto, é uma ação que acontece durante todo o processo de investigação, pois, dependendo do que é encontrado no campo, é necessário voltar às teorias. Neste sentido, faço a exposição do meu exercício hermenêutico a partir de toda articulação teórica realizada, principalmente, nos capítulos 3 e 4.

Ainda, uma investigação qualitativa e empírica "[...] prevê idas ao campo antes do trabalho mais intensivo, o que permite fluir na rede de relações e possíveis correções já iniciais dos instrumentos e coleta de dados" (MINAYO, 1996, p. 103). Assim, foi importante a realização de dois trabalhos de campo. O primeiro constituiu-se de um estudo piloto, cujos resultados permitiram uma reorganização metodológica, e o segundo constituiu-se do estudo nomeadamente efetivo, que permitiu, portanto, indicar possíveis respostas ao problema.

As reelaborações metodológicas para o estudo de campo efetivo, o qual trato com mais riqueza de detalhes no capítulo 5, foram motivadas, principalmente, pelos resultados do estudo piloto, pelo processo de qualificação da proposta de tese e pelos estudos realizados no estágio de doutoramento[13]. O estudo efetivo foi realizado, portanto, mediante uma estratégia didática sobre Funções usando a programação de computadores e a obtenção dos dados de análise foi produzida por intermédio do método da observação Interativa. A Figura 2.4 reflete o desenho metodológico construído na pesquisa.

Figura 2.4 - Desenho metodológico da pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora.

No próximo capítulo, passo a tratar sobre como compreendo o Campo Conceitual das Funções Afim.

[13] O estágio de doutoramento foi realizado na Universidade Aberta, em Portugal, sob supervisão da Profª. Dr.ª Daniela Melaré Barros, pelo período de 3,5 meses, de 15 de janeiro de 2017 a 30 de abril do mesmo ano.

3 O CAMPO CONCEITUAL DAS FUNÇÕES AFIM

[...] *a apropriação de uma cultura por um indivíduo depende necessariamente de sua própria atividade,* [...] *da ajuda que ele recebe do meio em que está inserido e, portanto, da qualidade das mediações de que ele se beneficia (VERGNAUD, 2009, p. 34).*

Para Vergnaud (2003), o conhecimento se constrói a partir das situações que os sujeitos têm que resolver ao longo de sua vida, dos elementos cognitivos que permitem compreender e interpretar as situações e das representações simbólicas que manifestam a fim de dar conta das situações. A *apropriação* do mundo e da *cultura* faz-se, então, por meio da própria *atividade* do sujeito e de *mediações* vivenciadas.

A escrita do referencial teórico de um trabalho acadêmico, mais precisamente de uma tese, é sempre um desafio, pois exige resguardar o sentido das ideias originais dos autores ao mesmo tempo que apresenta interpretação de quem a faz. Neste capítulo, tenho o desafio de apresentar os principais elementos da teoria desenvolvida por Gérard Vergnaud, seguido de uma reflexão sobre o conteúdo das Funções Afim trabalhado na educação básica brasileira. Por fim, apresento uma possível interpretação sobre o que constitui o Campo Conceitual das Funções Afim.

3.1 Teoria dos Campos Conceituais: um referencial da didática e da psicologia

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria da psicologia cognitiva sobre a conceituação[14], desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador Gérard Vergnaud[15], por volta dos anos de 1970, e se insere no campo da Didática da Matemática francesa. Interessado em como o desenvolvimento cognitivo se dá no contexto escolar, Vergnaud busca em teorias consagradas as bases para desenvolver sua perspectiva. Entre as influências recebidas, o autor destaca os conceitos de mediação e de zona de desenvolvimento proximal, de Vygotski, e os conceitos de equilibração e de esquemas de pensamento, de Piaget. Ao buscar nestes dois

[14] Ou conceitualização. Ambas expressões são traduções da expressão em francês *conceptualisation* ou do inglês *conceptualization*.

[15] Nasceu em 1933 e é professor emérito do Centre National de la Recherche Scientifique da Universidade de Paris VIII. Atualmente segue tendo intensa atividade internacional como orientador e inspirador de trabalhos na área de didática de Matemática.

autores elementos conceituais para elaborar sua teoria, Vergnaud reconhece as diferenças significativas das perspectivas ao mesmo tempo que encontra convergências e declara tomar aquilo que considera relevante de cada um a fim de avançar.

Vergnaud não é um matemático de formação básica. Sua formação inicial é em Filosofia e Psicologia, tendo se aproximado da Matemática quando pesquisou "[...] a maneira a partir da qual é engendrada uma sequência de ações numa situação de resolução de problemas [...]" (VERGNAUD, 2008, p. 56), encontrando no conceito de algoritmo sua resposta. Para tanto, aliou-se a Piaget, na condição de seu orientando de doutorado, na Universidade de Paris, Sorbonne. A partir de então, começa a estudar mais a fundo questões sobre o desenvolvimento cognitivo da Matemática e, associando ao ensino, dá início à TCC.

A TCC não é uma teoria exclusiva da Matemática, embora Vergnaud utilize essencialmente exemplos da Matemática para explicar suas ideias, conforme pode ser visto em suas obras. Em *A criança, a matemática e a realidade*[16], por exemplo, Vergnaud (2014) trata da noção de cálculo relacional envolvendo basicamente Matemática, que vai além das quatro operações, de uma forma talvez não "formal", mas de uma forma "ingênua" sob o ponto de vista de um psicólogo, como o próprio autor afirma no livro.

Neste sentido, esta teoria constitui-se um referencial interessante aos propósitos desta Tese, tanto por envolver o caráter cognitivo do conhecimento, sob bases piagetianas e vygotskianas, como o caráter didático, quando considera a tarefa docente um fator importante no desenvolvimento das crianças. O debate didático, portanto, vem enriquecer os conceitos da psicologia cognitiva, uma vez que dá grande valor à ideia da desestabilização, no sentido de que só há aprendizagem se crianças forem desestabilizadas por novas situações.

A TCC considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais, e o domínio de um campo conceitual ocorre respeitando o tempo cognitivo, a experiência, a maturidade e aprendizagem de cada um. Não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos e pode ser que um domínio não se conclua plenamente. Isso porque situações novas surgem ao longo da vida dos sujeitos para serem confrontadas e superadas, tornando mais complexo o campo conceitual (MOREIRA, 2002).

Mas o que constitui um campo conceitual? Segundo Vergnaud (2003, p.30), "[...] campo conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de

---

[16] Publicado em 1981 em francês. Foi traduzido para o português por Maria Tereza Carneiro Soares e publicado no Brasil em 2014.

situações", e estas situações implicam propriedades, relações e representações, ou seja, é um conjunto de problemas, situações, conceitos, propriedades, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros. Para explicar isso, tomo como exemplo os dois campos conceituais que Vergnaud descreve em seus estudos: os campos das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas.

O campo conceitual das estruturas aditivas consiste no conjunto de situações, cujo tratamento implica em uma ou várias adições ou subtrações. O campo das estruturas multiplicativas consiste, de forma semelhante que o anterior, no conjunto das situações, cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações ou divisões. Dentro do campo aditivo, tem-se o conceito de cardinal, de medida, de transformação, de comparação, de composição binária, de inversão, de número natural, de número relativo que não são exclusivos do campo das estruturas aditivas. O conceito de medida, por exemplo, também está presente no campo das estruturas multiplicativas, em situações em que medidas são obtidas por meio de multiplicações ou divisões (VERGNAUD, 2003).

Embora Vergnaud tenha se dedicado aos estudos destes dois campos conceituais citados, eles não são os únicos que existem, a exemplo da

> eletricidade e os esquemas que organizam a actividade do sujeito neste domínio. As situações a compreender e a tratar são diferentes: a iluminação de uma sala, a ligação de uma lâmpada a uma pilha (dois polos, dois fios, existência de corrente), a compreensão do circuito elétrico de uma habitação ou de um automóvel, a análise e a dissociação dos conceitos de intensidade, de tensão, de resistência e de energia para os cálculos de electrocinética, etc (VERGNAUD, 1996, p. 169).

Dessa maneira, penso que é possível falar em Campo Conceitual das Funções Matemáticas dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas, ou seja, um conjunto de situações, cujo tratamento implica no uso de relações de correspondência e dependência entre variáveis, ao mesmo tempo que diversos outros conceitos são envolvidos: proporcionalidade, taxa de variação, taxa fixa, regularidade, generalização, continuidade, entre outros.

Se um campo conceitual é um conjunto de situações que evocam conceitos, qual a definição de conceito nesta perspectiva? Para Vergnaud (1996), um conceito pode ser definido como um trio de conjuntos, que devem ser considerados simultaneamente, a saber:

> S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
> I: conjunto dos invariantes operatórios nos quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);
> R: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, 1996, p. 166).

Assim, Vergnaud (2008) defende que um conceito não deve ser reduzido à sua definição, se há interesse no seu ensino e aprendizagem. A ideia basilar da TCC é que os conceitos só adquirem sentido à criança por meio de situações e problemas que a desafiam, que a desestabilizam. E, na busca pela resolução destas situações, os sujeitos utilizam esquemas de pensamento, invariantes operatórios e representações simbólicas. Há, portanto, no conjunto de situações de um campo conceitual, elementos essenciais que são discutidos a seguir.

3.1.1 Situações

O conceito de situação em Vergnaud (1996) está ligado à ideia de que "[...] os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são função das situações com as quais eles se confrontam [...]" (VERGNAUD, 1996, p. 171). Nesse sentido, é possível considerar dois aspectos: (i) dentro de um campo conceitual, há uma variedade de situações, e as variáveis da situação (elementos que diferenciam uma situação da outra) constituem um conjunto de classes possíveis; (ii) o conhecimento dos alunos é histórico, no sentido de que é formado a partir das situações que se deparam ao longo da vida e que progressivamente dominaram.

De fato, situação na TCC diferencia-se da ideia de situação didática, objeto de estudo da Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (2008), por considerar qualquer situação complexa (didática ou não) que possa ser analisada como uma combinação de tarefas. Por tarefas, Vergnaud (2014) entende que são ações elementares em que uma ação complexa se decompõe, que são conhecidas ou mais simples de serem realizadas. O desafio do sujeito reside, portanto, no agenciamento destas tarefas subalternas a uma situação.

Vergnaud (2014) também defende a necessidade de o professor ter uma compreensão aprofundada sobre o conceito a ser ensinado, suas noções, ordem de complexidade e relações, ter clareza sobre a complexidade das tarefas escolares a serem propostas aos estudantes, bem como compreender como que uma criança aprende e quais dificuldades ela pode encontrar no conceito que está aprendendo. Para o autor,

> toda formação do professor, todo seu esforço, devem procurar lhe dar um maior conhecimento sobre a criança e permitir-lhe ajustar permanentemente as modalidades de sua ação pedagógica [...]esse conhecimento não pode ser um simples conhecimento geral da inteligência e do comportamento da criança. Trata-se de um conhecimento aprofundado do conteúdo a ser ensinado e das relações desse conteúdo com a atividade possível da criança (VERGNAUD, 2014, p. 15).

Para tanto, Vergnaud (2014) propõe uma sistematização de classes de situações e subclasses possíveis de serem propostas em sala de aula, as quais envolvem diferentes noções e complexidades do campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas. Para exemplificar, trago alguns elementos de sua classificação de problemas de tipo multiplicativo, nos quais distingue duas grandes categorias de relações multiplicativas que comportam uma multiplicação ou uma divisão: relações ternárias (produto de medidas) e relações quaternárias (isomorfismos de medidas)[17].

Dentro das relações quaternárias, é possível perceber dois tipos de problemas: os que possuem o valor unitário explícito e os que não possuem. Dentro dos que possuem o valor unitário explícito, é possível ainda classificar em três classes de problemas: a ideia de multiplicação envolvida, a ideia de divisão para encontrar o valor unitário e a ideia de divisão para encontrar a quantidade de unidades. O Quadro 3.1 apresenta essas ideias.

[17] Relações binárias ligam dois elementos entre si, por exemplo, "dez é menor que quinze". Relações ternárias ligam três elementos entre si, por exemplo, "dez é cinco a menos que quinze". Relações quaternárias ligam quatro elementos entre si, por exemplo, "dez está para quinze assim como dois está para três". Nestes exemplos, os elementos são valores numéricos, mas poderíamos usar objetos inertes (caneta, mesa, ...), pessoas (João, Maria, ...), expressões algébricas (x, 3y, ...), conjuntos (habitantes, mamíferos, ...), relações (embaixo, em cima, ...) e etc. Relações para além das quaternárias podem ser reduzidas a composições das relações binárias, ternárias ou quaternárias (VERGNAUD, 2014, p. 23 - 24).

Quadro 3.1 - Classes de situações das relações quaternárias de problemas multiplicativos

Valor unitário explícito	Multiplicação	Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho? Pacotes Iogurtes 1 --------- 4 3 --------- x
	Divisão: busca do valor unitário	Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de água. Quanto custa cada garrafa? Garrafas Reais 1 --------- x 3 --------- 12
	Divisão: busca do valor de unidades	Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de balas a R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar? Pacotes Reais 1 --------- 4 x --------- 12
Valor unitário implícito	Regra de três	Vou comprar 12 garrafas de suco a R$ 19,50 por três garrafas. Quanto vou gastar? Garrafas Reais 3 --------- 19,50 12 --------- x

Fonte: Vergnaud (2014, p. 240).

Dentro de cada classe estabelecida no Quadro anterior, é possível haver subclasses que envolvam tipos diferentes de números e que colocam em evidência exigências conceituais diferentes. Por exemplo, pode-se ter problemas envolvendo números inteiros pequenos, ou números inteiros grandes, ou números decimais inferiores a 1 ou superiores a 1, ou frações, porcentagens, etc.

Além disso, Vergnaud (2014) estabelece duas formas distintas de analisar e estabelecer relações entre os quatro elementos da relação quaternária. A primeira refere-se a uma análise vertical dos elementos, em que se estabelece a noção de operador-escalar, a qual permite passar de uma linha à outra em uma mesma categoria de medidas. No primeiro exemplo do Quadro anterior, a relação estabelecida é de perceber que, para passar de 1 para 3 pacotes, multiplica-se pelo operador-escalar 3, logo, também se multiplica 4 iogurtes por 3 e tem-se a resposta, conforme o Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Análise vertical operador-escalar

Pacotes Iogurtes

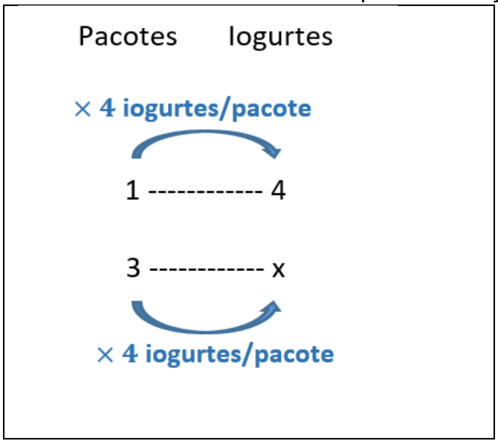
$\times$ **3** 1 ------------ 4 $\times$ **3**

3 ------------ x

Fonte: Vergnaud (2014, p. 243).

De modo equivalente em termos do resultado final, porém com raciocínio distinto, é possível fazer a análise horizontal dos elementos, em que se estabelece a noção operador-função, a qual permite passar de uma coluna à outra, ou seja, estabelece-se a transformação de um tipo de grandeza em outro tipo. Usando ainda o exemplo dos pacotes e iogurtes, o operador-função é, então, **multiplicar 4 iogurtes/pacote**, conforme o Quadro 3.3. Essa ideia permite estabelecer uma relação de correspondência entre pacotes e iogurtes para qualquer valor estabelecido de pacotes, como pode ser visto no Quadro 3.4.

Quadro 3.3 - Análise horizontal operador-função.



Fonte: Vergnaud (2014, p. 244)

Quadro 3.4 – Quadro de correspondência

Pacotes		Iogurtes
x	**f**	**f(x)**
1	→	4
2	→	8
3	→	12
4	→	16
5	→	20
6	→	24
8	→	32
...		...
x	→	4x

Fonte: Vergnaud (2014, p. 241).

A ideia de operador-função é mais complexa do que a ideia de operador-escalar para muitos estudantes e talvez por isso que seu estudo esteja reservado para o final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio. Segundo Vergnaud (2014, p.252), a análise horizontal "[...] situa-se num nível nocional muito elaborado e, aliás, está na raiz das dificuldades encontradas para fazer a criança compreender a noção de função".

O que quero mostrar com esses exemplos e classificações de Vergnaud é que qualquer campo conceitual a ser trabalhado em sala de aula exige do professor o estudo prévio das diferentes situações, classes e subclasses de situações que envolvem o conceito e os diferentes raciocínios necessários para a resolução destas situações, para, então, elaborar os problemas que serão propostos aos estudantes. Nesse sentido, procuro realizar uma sistematização semelhante, mais adiante no item 3.3 desse Capítulo, no que se refere ao meu entendimento sobre as situações do Campo Conceitual das Funções Afim.

3.1.2 Esquemas de Pensamento

Dadas as situações, os alunos utilizarão suas competências para resolvê-las. Nesta busca por estratégias de resolução, os alunos evocam conhecimentos já constituídos em seu repertório, fazendo uma organização da sua conduta. A forma organizada de agir perante uma situação ou classe de situações e as escolhas quanto aos conhecimentos a serem usados, Vergnaud (1996) define como sendo um esquema de pensamento. Para o autor, não é pertinente analisar o funcionamento cognitivo onde não haja o desenvolvimento cognitivo e, para ter desenvolvimento, precisa haver desequilíbrios constantes. Com isso, a TCC pretende resolver este impasse ao analisar o funcionamento cognitivo do sujeito em ação, que aciona seus esquemas relativos à classe de situação.

O conceito de esquema de pensamento foi introduzido por Piaget a fim de compreender as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais do sujeito (MOREIRA, 2002). É uma expressão traduzida do francês *schème* e que não pode ser confundida com *schèma*, que, por sua vez, significa "esquema" no sentido mais comum que se conhece: o de diagrama, de um tipo de representação, muitas vezes pictórica, que sistematiza alguma informação. Com o propósito de diferenciar os significados da palavra "esquema", alguns tradutores utilizam a expressão "esquemas de pensamento" ou "esquema". Para que não haja dúvida, nesse trabalho, a palavra "esquema" será usada única e exclusivamente no sentido piagetiano.

Segundo Moreira (2002), para Piaget, um esquema é uma forma organizada de abordar a realidade (uma ação, um comportamento), a fim de compreendê-la. Há esquemas simples, ligados à ação motora, como, por exemplo, o ato de sucção de um bebê, e há esquemas complexos, ligados à ação cognitiva, como a resolução de um problema matemático. A ideia é que os esquemas complexos são elaborados a partir da organização e da integração de esquemas mais simples.

Ainda na teoria piagetiana, os esquemas de pensamento estão inseridos no processo de equilibração: esforço constante de manutenção do equilíbrio dinâmico entre a mente e o meio. O sujeito, frente a uma nova situação, inicia o processo de assimilação e de acomodação para se adaptar. Segundo Goulart (2010, p.18-19),

> a assimilação é a incorporação de um novo objeto ou ideia ao que já é conhecido, ou seja, ao esquema que a criança já possui. A acomodação, por sua vez, implica na transformação que o organismo sofre para poder lidar com o ambiente. Assim, diante de um objeto novo ou de uma ideia, a criança modifica seus esquemas adquiridos anteriormente, tentando adaptar-se à nova situação.

Para Franchi (2008), Vergnaud toma o conceito de esquema de Piaget e o amplia para além da relação indivíduo-objeto quando assume a relação indivíduo-situação como central. Seu interesse, deslocado dos estudos sobre as estruturas gerais de pensamento de Piaget, volta-se a estudos mais específicos sobre o funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação, na qual leva em consideração as situações e os problemas adequados ao ensino, o repertório cognitivo dos sujeitos e o papel da linguagem e dos símbolos no funcionamento do pensamento.

A elaboração da definição de esquema de pensamento na TCC também passou pela concepção de algoritmo estudada por Vergnaud (2008) em sua tese de doutorado. Nos seus estudos, encontra uma definição que usava a expressão "esquema de pensamento" no mesmo sentido de algoritmo, ou seja, um conjunto fechado de passos para encontrar a solução de um problema. Vergnaud (2017a) amplia esta noção, preocupando-se com outras formas de organizar as ações e as resoluções de tarefas em que não haja um número finito de passos, como a realização de esportes e dança, por exemplo. Considera os gestos importantes e que não há algoritmo para o salto em distância ou para dançar tango. Estas são atividades reguladas, porém não fechadas. Assim, define que todo o algoritmo é um esquema, mas nem todo esquema é um algoritmo. Esquema é mais amplo.

Dessa forma, o autor define esquema como "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações" (VERGNAUD, 1996, p. 157) em que é preciso considerar quatro ingredientes indissociáveis desta organização:

- **Metas e antecipações:** descobrir uma finalidade de sua atividade, os objetivos, projetar possíveis efeitos e criar etapas intermediárias. É o reconhecimento do que pode acontecer;
- **Regras de ação** do tipo "se… então": permitem as sequências de ações, são regras de busca de informações e controle dos resultados da ação;
- **Invariantes operatórios** (conceitos em ação e teoremas em ação): responsáveis pelo reconhecimento (pelos sujeitos) dos elementos da situação e pela apreensão das informações pertinentes para inferir a meta a ser alcançada e as regras de ação adequadas. São os conhecimentos contidos nos esquemas;
- **Inferências:** raciocínios que permitem calcular as regras e as antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda atividade implicada nos três ingredientes precisa de cálculos.

Voltando ao exemplo do tango, Vergnaud (2017a) diz que, ao dançar, os sujeitos agem e tomam informações do seu entorno para, por exemplo, não invadir o espaço das outras pessoas, não tropeçar em seu parceiro e fazer o controle de seus movimentos. No entanto, isso não é suficiente. É preciso compreender se o que está fazendo é adequado à situação. Para tal, precisa dispor de conceitos em ação e teoremas em ação que permitam tratar das informações e que possibilitem fazer inferências.

A seguir, outro exemplo do esquema da enumeração de uma coleção de objetos, produzido por uma criança:

> por mais que varie a forma de contar, por exemplo, copos na mesa, cadeiras da sala, pessoas sentadas de maneira esparsa em um jardim, não deixa de haver uma organização invariante essencial para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elemento da série como o cardinal do conjunto enumerado[...]. Vê-se facilmente que o esquema descrito recorre a atividades perceptivo-motoras, a significantes (as palavras-números) e a construções conceituais, tais como as de correspondência biunívoca entre conjuntos de objetos e subconjuntos de números naturais, a de cardinal e ordinal, e outras (FRANCHI, 2008, p.201-202).

Com este último exemplo, fica mais claro perceber que esquemas estão relacionados a classes de situações, ou seja, é a forma de organização que se repete quando se muda de uma situação a outra dentro de uma mesma classe de situações. Contar copos e contar cadeiras são situações diferentes, dentro de uma mesma classe de situações, da enumeração de objetos, que possuem o mesmo esquema para sua solução. A coordenação dos movimentos dos olhos e dos dedos e a enunciação dos números são, portanto, elementos que formam um conjunto organizado, um conjunto estratégico para resolver o problema de enumeração, que pode ser chamado de esquema.

Outro exemplo em que se percebem esquemas de pensamento é na resolução de uma equação de 1º grau. Para resolver uma equação do tipo $ax + b = c$, um estudante aplica os mesmos procedimentos algébricos que aplicaria para resolver as equações $2x + 1 = 3$ e $3x + 2 = 5$, pois elas são muito parecidas (é possível dizer que fazem parte da mesma classe de situações). O procedimento algébrico generalizado por estes estudantes pode ser descrito da seguinte forma: “conserva-se a igualdade subtraindo ′b′ aos dois lados; conserva-se a igualdade dividindo os dois lados por ′a′ ” (VERGNAUD, 1996, p. 158).

Quando os esquemas que o sujeito utiliza para uma dada situação não são eficazes, há, então, o desencadeamento de diversos outros esquemas, os quais podem entrar em competição e que, para resolver o problema, precisam ser acomodados e reorganizados. Dessa forma, a aprendizagem está associada à construção de novos esquemas que permitem ao sujeito resolver novas e mais complexas situações. Nesta utilização de esquemas para dar conta de classes de situações, conhecimentos são colocados em ação pelo sujeito, conforme foi visto nos exemplos anteriores. Estes conhecimentos que são colocados em ação na situação são denominados “invariantes operatórios”, os quais discuto a seguir.

3.1.3 Invariantes Operatórios

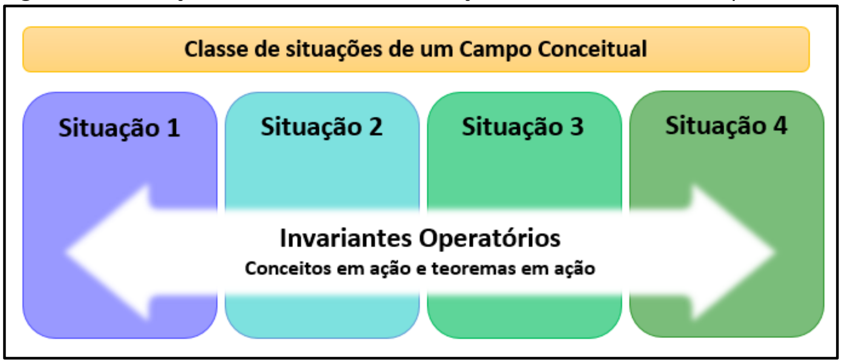
Segundo Vergnaud (2014), Piaget mostrou, em seus trabalhos, o papel da noção do termo invariante na gênese da inteligência do bebê. Nos primeiros meses de vida de uma criança, se um objeto é escondido, deixa de existir para ela. Assim, um dos primeiros elementos invariantes que uma criança constrói está no esquema que manifesta ao conseguir pegar um objeto que está desaparecido atrás ou embaixo de algum outro objeto. Isso se deve à capacidade operatória da criança de reconhecer a “permanência” do objeto.

Deste modo, o tal objeto ao ser transladado, rotacionado, escondido, etc., continuará sendo o objeto. A permanência do objeto pressupõe a invariância deste. A partir desta ideia inicial, a criança avança, ao longo da vida, para noções de invariante de outras categorias, como das relações espaciais, de parentesco, propriedades, relações classificatórias, de equivalências, de ordem, etc. Neste sentido, Vergnaud (2014), assim como fez com a noção de esquema, tomou-a de Piaget e ampliou-a para seu estudo.

No exemplo anterior sobre as equações do 1º grau, foi visto que o mesmo procedimento de cálculo é usado às situações semelhantes àquela. O caráter invariante destes procedimentos (esquemas) repousa na possibilidade de serem aplicados a diferentes situações de uma mesma classe: a classe de situações de equações de 1º grau. Neste sentido, elementos que estão na resolução de uma situação 1 estão também na situação 2, na situação 3 e nas demais situações desta classe, como é o caso do "conserva-se a igualdade subtraindo b aos dois lados". Assim, dentro de uma mesma classe de situações, há elementos invariantes.

Quando estes elementos são usados na situação, de forma intencional ou não intencional, de forma explícita ou não, tornam-se operatórios. E daí vem a denominação invariantes operatórios. Neste sentido, há uma relação estabelecida em que os mesmos invariantes perpassam toda uma classe de situações de determinado campo conceitual. A Figura 3.1 ilustra essas ideias.

Figura 3.1 - Relação de uma classe de situações e seus invariantes operatórios



Fonte: Elaborado pela autora.

Ademais, os invariantes operatórios são constituídos de elementos específicos que darão suporte aos esquemas utilizados na situação. Com isso, Vergnaud (1996) distingue três tipos lógicos, a saber: os teoremas em ação, que são do tipo lógico das proposições; os conceitos em ação, que são do tipo lógico das funções proposicionais; e os objetos de pensamentos, que são do tipo lógico dos argumentos.

Para tanto, busco em Piaget (1976), mais especificamente, em sua obra *Ensaio de Lógica Operatória* e em textos sobre Lógica Formal, o entendimento dos conceitos de lógica acima nomeados. É importante deixar claro que faço uma abordagem básica destes elementos apenas com o objetivo de compreender as tipologias dos invariantes realizadas por Vergnaud (1996).

Neste sentido, por proposição, entende-se um enunciado declarativo, uma premissa ou uma conclusão. As proposições podem ser categóricas, ao estabelecer uma relação entre sujeito e predicado, por exemplo, “a rosa é vermelha”; podem ser hipotéticas ou condicionais, ao estabelecer relações que possuem condições, por exemplo, “hoje é sábado, então amanhã será domingo”; e podem ser disjuntas, cuja conexão entre os elementos apresenta alternativa, por exemplo, “ou é sábado, ou é domingo”. Ainda, proposições podem estar relacionadas entre si, formando raciocínios denominados silogismos. Por exemplo, proposição 1 (premissa): todo homem é mamífero; proposição 2 (premissa): eu sou homem; proposição 3 (conclusão): eu sou mamífero. E, ainda, têm-se proposições falsas, por exemplo, “todas as rosas são vermelhas” (MUNDIN, 2002).

Por função proposicional, Piaget (1976) define uma expressão geral que pode ser transformada em proposição, quando estabelecidos os elementos que a constituem: os objetos (sujeitos) e as propriedades dos objetos (predicados). Isto é,

> uma função proposicional ax é um enunciado nem verdadeiro nem falso, mas suscetível de adquirir valor de verdade ou de falsidade segundo a determinação dos argumentos que substituem o argumento indeterminado (PIAGET, 1976, p. 45).

Por exemplo, na proposição “a rosa é vermelha”, o objeto/sujeito “rosa” pode ser representado pela variável **x** e a propriedade/predicado “é vermelho” por **a**. A expressão **ax,** que se refere a “ter a cor”, é uma função proposicional geral que não é suscetível de ser verdadeira ou falsa, pois não há elementos reais associados. Esses elementos associados são chamados de argumentos. Neste caso, x é um argumento indeterminado e “rosa” um argumento determinado. Isto é, as proposições resultam das funções proposicionais associadas aos argumentos. Assim, quando se substitui **x** por “rosa” e **a** por “é vermelho”, tem-se a proposição “a rosa é vermelha”. Se **x** for substituído por “margarida” e **a** por “é azul”, tem-se outra proposição “a margarida é azul”. A seguir, dois exemplos:

> 1) “Paulo coloca o livro sobre a mesa” pode escrever-se: R_3(Paulo, livro, mesa) proposição que resulta da instanciação dos argumentos da função proposicional R_3(x, y, z), “x coloca y sobre z”, na qual x é uma pessoa, y um pequeno objeto material manipulável e z um suporte possível. (VERGNAUD, 1996, p. 165). [18]

[18]Vergnaud (1996) utiliza a expressão R_3 para representar uma relação entre três argumentos, ou seja, uma relação ternária.

> 2) 4 + 3 = 7 é uma proposição e ela é verdadeira. 4 + 3 = 8 é uma proposição e ela é falsa. 4 + x = 7 não é uma proposição, mas uma função proposicional; ela não é verdadeira nem falsa, é somente pertinente para representar um problema [...]. x + y = z também não é uma proposição. Paradoxo aparente, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ é uma proposição e ela é verdadeira. Entretanto, "x" e "y" não são determinados. É necessário, pois, precisar que esta verdade é condicionada pelo conjunto no qual se tomam valores de "x" e de "y" [...] [neste caso, os números reais R]. Quaisquer que sejam "x" e "y", se pertencerem a R, a expressão é verdadeira (VERGNAUD, 2008, p.50).

Só para esclarecer sobre o segundo exemplo mostrado anteriormente, na expressão x + y = z, os valores x, y e z são desconhecidos e é possível obter uma sentença falsa se os valores forem escolhidos e não obedecerem à operação de adição. Já no produto notável $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, independentemente dos valores tomados para x e y, a igualdade sempre resultará numa resposta verdadeira.

A partir disso, é possível compreender que teoremas em ação, para Vergnaud, são invariantes operatórios de tipo lógico das proposições, no sentido de descreverem uma ideia, uma premissa, uma relação entre objetos (sujeitos) e propriedades (predicados), passíveis de serem verdadeiros e falsos para a situação real dada. Já os conceitos em ação são invariantes operatórios do tipo lógico das funções proposicionais, que não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas "constituem tijolos indispensáveis à construção das proposições" (VERGNAUD, 1996, p. 162). Além disso, considera que

> estes conceitos são raramente explicitados pelos alunos, embora sejam construídos por eles na ação: trata-se de conceitos em acto, ou de categorias em acto [...] A relação entre funções proposicionais e proposições é uma relação dialética: não há proposições sem funções proposicionais nem funções proposicionais sem proposições. Da mesma maneira, os conceitos em acto e os teoremas em acto constroem-se em estreita interação [...]. (VERGNAUD, 1996, p.164).

Isso significa que os conceitos em ação são conceitos já construídos ou em construção pelos sujeitos e que estão sendo colocados em ação. Eles não estão errados ou certos, mas podem não estar sendo bem aplicados àquela situação. Segundo Vergnaud (2009, p. 23), eles podem ter o estatuto de objetos ou de predicados, podendo estabelecer relações entre objetos e predicados. No exemplo da proposição "a rosa é vermelha", o conceito em ação "cor" está sendo usado associado ao objeto "rosa" e ao predicado "é vermelho", que também são conceitos em ação, para, então, formar o teorema em ação. Entre os teoremas em ação, alguns têm o estatuto de proposição verdadeira para a situação específica (local) e outros têm o estatuto de verdadeiros para toda uma classe de situações (universais). A seguir, mais um exemplo: uma criança entre os 8 e 10 anos compreende que

> se uma certa quantidade de objetos vendáveis for multiplicados por 2, por 3, por 4, por 5, por 10, por 100 ou por um número simples, o seu preço será 2, 3, 4, 5, 10, 100 vezes superior. Este conhecimento pode ser expresso através de um teorema-em-acto f(nx) =nf(x) para n inteiro e simples (VERGNAUD, 1996, p.163). [19]

Para ela elaborar este teorema em ação, precisa colocar em ação também os conceitos de cardinal, de conjunto, de adição, de multiplicação e de transformação, associados aos argumentos numéricos. O teorema $f(nx) = nf(x)$, escrito na forma de uma Função Matemática, descreve a ideia de que, ao multiplicar o domínio x (quantidade de objetos) por n (fator a ser multiplicado, que pode ser 2, 3, 4, 5, 10 e 100), isso resultará uma imagem de x também multiplicada por n.

Voltando ao exemplo da resolução de uma equação do 1º grau, é possível supor que, ao realizar equações do tipo $ax + b = c$, a criança tenha criado o seguinte teorema em ação: “sempre que um número trocar de membro, troca de sinal”[20]. Para elaborar este teorema, a criança associou conceitos e argumentos novamente: adições, subtrações e igualdade constituem os conceitos e os valores numéricos atribuídos a “a”, “b” e “c” são os argumentos.

No entanto, há teoremas em ação que se constituem proposições verdadeiras para algumas situações e que, se forem usados em outras situações, falham. Para a equação $x + 2 = 3$, vai funcionar o teorema em ação descrito acima, pois, quando o 2 mudar de membro, trocará de sinal; já para situações do tipo $2x + 3 = 5$, funciona para o número 3 e não funciona para o número 2, pois o 2 não passa com sinal trocado, e sim com sua operação inversa. Logo, o teorema em ação é falso para esta segunda situação. Com isso, percebe-se o caráter local e não universal do teorema em ação, o que constitui a sua principal diferença se comparado aos teoremas matemáticos cientificamente comprovados e aceitos. Um teorema em ação não é, necessariamente, um teorema[21], entretanto, pode ser modificado e evoluir para tal. Ajudar nesta transformação é um dos papéis do ensino.

[19] Teorema-em-ato e teorema em ação são expressões equivalentes.

[20] Só para esclarecer que esse não é o procedimento considerado matematicamente correto. É um procedimento informal, bem comum de ser memorizado pelos estudantes que estão aprendendo a resolver equações.

[21] A palavra “teorema” na Matemática pressupõe uma proposição verdadeira. Por isso, Vergnaud usa a expressão “teorema em ação” para representar as proposições verdadeiras e falsas que os estudantes manifestam no processo de aprendizagem.

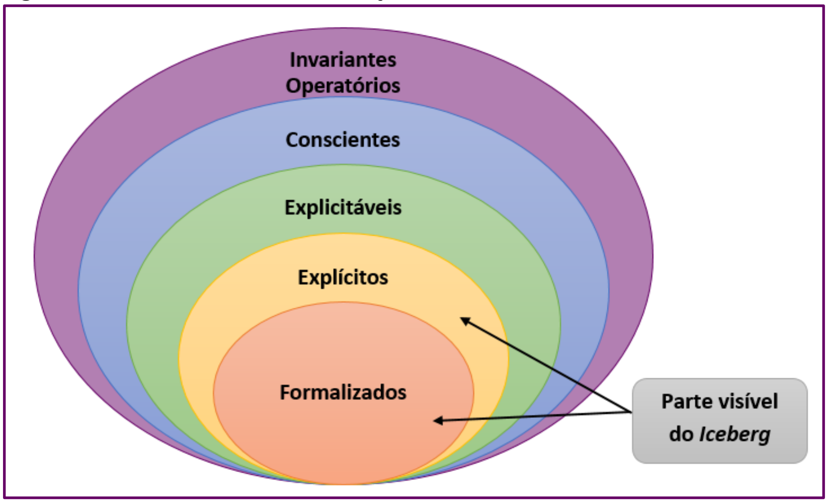
Em outro exemplo, em que crianças precisavam comparar volumes de objetos, Vergnaud (1996, p.160-161) diz que “o primeiro esquema mobilizado foi o da comparação das alturas”, e elas concluíram que "quanto mais alto, maior o volume”. Na situação foi utilizado o conceito de altura e, portanto, é um conceito em ação; a hipótese das crianças, de que quanto mais alto o objeto maior é o seu volume, é um teorema em ação. Este teorema é verdadeiro para as situações em que os objetos possuam a mesma base e falso para situações mais gerais, em que a base não é sempre a mesma, pois daí desconsidera que a área da base do objeto influencia no seu volume. Neste sentido, para a criança reformular e ampliar seu teorema em ação, precisará de outras situações envolvendo volume, altura e base, a fim de compreender a relação de proporcionalidade ali envolvida: o volume é proporcional à altura e à área da base do objeto.

Conforme a discussão feita sobre esquemas e invariantes operatórios, podemos dizer que, a partir de certa situação a ser resolvida, o sujeito precisa dispor de conhecimentos que o habilitam a identificar os objetos, as propriedades e suas relações na dada situação para, então, definir os objetivos, regras de ação e fazer inferências, ou seja, os invariantes operatórios permitem a identificação dos objetos do mundo e os esquemas permitem a organização da atividade. No entanto, nesse processo, os invariantes não estão, necessariamente, explícitos e conscientes.

> Na ciência, conceitos e teoremas são explícitos e pode-se discutir a sua pertinência e a sua verdade. Não é necessariamente o que acontece com os invariantes operatórios. Conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceitualização: sem a parte escondida, constituída pelos invariantes operatórios, esta parte visível nada seria [...]. (VERGNAUD, 1996, p. 165).

Sobre o caminho da conceituação, Vergnaud (2017a) nos apresenta uma sistematização em forma de elipses, conforme a Figura 3.2, que esclarece como se dá a passagem ou transformação de um invariante operatório em conceito científico. Na imagem, a elipse maior em roxo representa os invariantes operatórios de um campo conceitual. A elipse azul representa apenas os invariantes que são conscientes no sujeito. Dentro desta última, temos a elipse verde, que representa os invariantes explicitáveis, ou seja, aqueles com potencial de serem explícitos se houver mediação. A elipse laranja representa, então, uma parte destes invariantes explicitáveis e conscientes que foram explicitados. Por fim, na elipse rosa, apenas alguns destes invariantes explicitados tornam-se conhecimentos formalizados cientificamente. As elipses laranja e rosa representam a parte visível do *iceberg*[22] da conceituação.

Figura 3.2 – Caminho da conceituação



Fonte: Vergnaud (2017a, adaptado).

Portanto, há muito de implícito nos invariantes operatórios (elipse roxa, azul e verde), e um dos papeis do ensino deve ser o de ajudar a tornar o que está implícito em explícito. Passamos agora, então, à discussão do papel que as representações têm na identificação destes invariantes operatórios e na sua transformação.

3.1.4 Representações

A ideia de que "[...] não se aprende sozinho e a estabilidade dos invariantes operatórios é reforçada por sua formulação oral e escrita [...]" (VERGNAUD, 2014, p. 12) é um ponto de vista da TCC que foi influenciado por Vygotsky e Piaget, conforme o próprio autor afirma. Assim, o caráter operatório dos conhecimentos nada seria sem a instrumentalização que as representações dão ao real. Segundo Vergnaud (2014), a representação na TCC

> [...] não se reduz a um sistema simbólico que remete diretamente ao mundo material, os <u>significantes</u> representando então diretamente os <u>objetos</u> materiais. Na verdade, os significantes (símbolos ou signos) representam os <u>significados</u> que são eles próprios de ordem cognitiva e psicológica. O conhecimento consiste ao mesmo tempo de significados e significantes: ele não é formado somente por símbolos, mas

---

[22] A ideia de *iceberg* de Vergnaud (1996, p. 165) é tratada mais adiante.

> também de conceitos e de noções que refletem ao mesmo tempo o mundo material e a atividade do sujeito nesse mundo material (VERGNAUD, 2014, p. 19 – grifo da autora).

A representação, na TCC, é constituída de significados e significantes. Tais termos são tomados da linguística e exprimem ideias distintas, mas que não existem isoladas. Não há significante sem significado e significado sem significante. Assim, significante é a representação física (real ou mental), a qual também é chamada de representação simbólica, e significado é o conceito transmitido pelo significante, ou seja, são os invariantes operatórios que, manifestados, dão o sentido do significante.

Neste sentido, a representação, por meio dos significantes e dos significados, tem o papel de refletir a realidade e de ser usada como instrumento de simulações e cálculos. Isto é, uma ferramenta do pensamento. Uma representação pode estar certa ou errada, vaga ou precisa, explícita ou totalmente implícita; de toda forma, serve como um modelo mental da realidade que está recheada de invariantes operatórios. Assim, Vergnaud (1996) define três funções das representações:

> Ajuda na designação e, portanto, à identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; Ajuda ao raciocínio e à inferência; Ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação (VERGNAUD, 1996, p. 180).

Ao resolver uma situação de troco, por exemplo, uma criança pode usar de diferentes representações que irão auxiliar seu raciocínio e a inferência. Ela precisa, então, conferir o troco que recebeu ao comprar um chocolate de R$ 4,50 quando deu uma nota de R$ 10,00 ao caixa do supermercado. Ela poderá representar seu raciocínio de três formas diferentes, conforme apresenta o Quadro 3.4. Independentemente da representação, os mesmos conceitos são envolvidos.

Quadro 3.4 - Representações para a situação do troco

(i) uma representação descritiva da situação, verbal (explícita) ou mental (implícita)	Pensamento: *o troco é 10 - 4,50 e para calcular ou posso completar os 4,50 até chegar a 10; 4,50 mais 0,50 dá 5 e faltam mais 5 para 10, então, o troco é 5,50*
(ii) uma representação com diagramas, onde constam estados e transformações (explícita ou implícita)	$\boxed{10} \xrightarrow{-4,50} \boxed{x}$ ou $\boxed{4,50} \xrightarrow{+\ x} \boxed{10}$
(iii) uma representação algébrica (explícita ou implícita)	$10 - 4,50 = x \quad ou \quad 4,50 + x = 10 \quad ou\ ainda \quad \begin{array}{r} 10,00 \\ -4,50 \\ \hline 5,50 \end{array}$

Fonte: a autora.

O exemplo mostra que, nos três tipos de representações, conceitos matemáticos estão sendo colocados em ação, como adição e subtração, por exemplo, o que ilustra a indissociabilidade entre significantes e significados. É importante destacar que, quando se fala em representações simbólicas (significantes), vários são os recursos possíveis para tal. Como pode ser percebido no Quadro 3.4, a linguagem verbal ou mental é uma forma de simbolismo. O diagrama pictórico e as expressões algébricas são outras formas. Portanto, o uso de um *software*, no caso da programação de computadores, é ainda outra forma simbólica possível carregada de significantes e significados. Poderíamos ter ainda gráficos, tabelas, quadros, etc. Vários outros são possíveis, desde que representem os conceitos envolvidos e façam sentido para os sujeitos que os usam.

A escrita deste texto, por exemplo, é uma forma de representação simbólica dos invariantes operatórios e dos esquemas que estou desenvolvendo ao ler e ao articular as teorias, ao mesmo tempo que é um recurso que ajuda a pensar sobre. Escrever ajuda a pensar e a organizar as ideias. Nós pensamos a partir de símbolos e invariantes operatórios. Na fala, acontece o mesmo. Quando estamos conversando e discutindo uma ideia com outras pessoas, as palavras ditas são, portanto, além de um instrumento de comunicação e de representação simbólica, um auxílio do pensamento.

Segundo Vergnaud (1996), a função da linguagem como um auxílio do pensamento pode ser percebida quando algumas pessoas, que ainda não possuem a automatização de um procedimento, realizam a tarefa acompanhada de palavras que descrevem o que está sendo feito. Quando estamos aprendendo a andar de bicicleta ou a dirigir um carro, por exemplo, pensamos e até falamos em voz alta as etapas do que precisamos fazer: primeiro pisar no pedal da embreagem com o pé esquerdo, depois engatar a primeira marcha, e assim por diante. Com o tempo e com a automatização, estas representações linguísticas tão detalhadas deixam de ser usadas, mas foram fundamentais para a aprendizagem. Isso mostra como a representação é, também, atividade, e não apenas repertório de significantes e significados (VERGNAUD, 2009).

No ensino da Matemática, não é diferente. As representações simbólicas ajudam e muito na resolução de problemas "[..] quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas [...]" (VERGNAUD, 1996, p. 184). No entanto, há uma supervalorização do simbolismo formal no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, que, segundo a TCC, deve ser revista, pois, para Vergnaud (1996, 2003, 2008), a fonte da conceituação não está no simbolismo simplesmente, mas no sujeito em situação manifestando seus esquemas de pensamento e invariantes operatórios por meio de representações de forma explícita ou implícita.

Por conseguinte, não é possível perceber a verdade ou a pertinência dos invariantes operatórios das crianças se estes estiverem totalmente implícitos e nem é possível identificar tais elementos sem o auxílio de palavras, de gestos e de símbolos. A identificação de invariantes só é possível através das representações simbólicas, sejam escritas, pictóricas, gestuais, orais e, até mesmo, através de blocos de programação. E é nessa identificação que é possível entender o pensamento da criança e verificar a sua compreensão sobre os conhecimentos que manifesta na situação. Portanto, analisar as representações é fundamental para conhecer seu processo de conceituação.

3.1.5 Formas do conhecimento: operatória e predicativa

Conceituar ou conceitualizar, na perspectiva da TCC, significa aceder ao porquê dos esquemas e dos invariantes operatórios com o qual se enfrenta a situação (GROSSI, 2017). Isso requer saber operar com tais esquemas e invariantes ao mesmo tempo que requer saber falar sobre eles. Neste sentido, a conceituação, para Vergnaud (1996, 2017), significa desenvolver duas formas distintas de conhecimento, porém complementares: a forma operatória, que permite agir em situação, que é o saber-fazer; e a forma predicativa, que permite enunciar, falar sobre os objetos e suas propriedades, que é o saber-explicar.

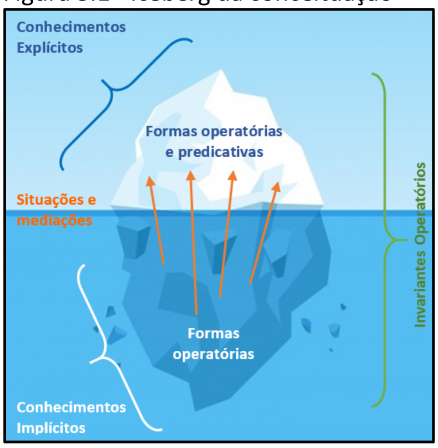
Uma pessoa, por exemplo, executa muito bem uma função, uma tarefa, em seu trabalho, mas, quando precisa comunicar suas ações a um colega que irá auxiliá-lo, pode não

"[...] estar em condições de formular completamente o que considera verdadeiro ou razoável, da mesma forma que as palavras lhe faltam [...]" (VERGNAUD, 2009, p. 18). Ainda, é possível dizer que a forma predicativa não atinge sua forma operatória e, por isso, fracassa em transmitir o seu saber-fazer.

Vergnaud (1996) apresenta a metáfora do *iceberg* da conceituação para explicar as formas com que os invariantes operatórios podem se apresentar na conceituação. Para o autor, conhecimentos explícitos constituem apenas a parte visível do *iceberg* e, na parte escondida, está a maior parte dos conhecimentos, que, por sua vez, são implícitos. No entanto, uma parte não existe sem a outra. Neste sentido, sendo o *iceberg* a representação dos invariantes "operatórios", a operacionalidade dos conhecimentos (forma operatória) está em todo o *iceberg*, desde sua base, onde o "fazer tem prioridade sobre o dizer" (GROSSI, 2017, p.9), até a parte visível e explícita, enquanto o saber-explicar (forma predicativa) só é possível a partir dos conhecimentos que já estão explícitos.

Ademais, acredito que nem todos os conhecimentos explícitos, representados por meio de gestos, ações, linguagens e símbolos, estão na sua forma predicativa. No exemplo que apresentei da pessoa que faz com eficiência seu trabalho, mas não consegue comunicá-lo com a mesma competência, é possível perceber explicitações de seus conhecimentos acompanhando sua atividade, pois na ação há manifestação de conhecimentos, mesmo sem uma elaboração discursiva. Assim, acredito que a forma predicativa é mais do que explicitar, é saber-explicar o que fez e o porquê fez quando atuou em situação. A partir dessas ideias, formulei a Figura 3.1, que representa meu entendimento deste processo de conceituação.

Figura 3.1 - Iceberg da conceituação



Fonte: Elaborado pela autora[23].

[23] A imagem de fundo para a elaboração da Figura foi obtida no Imagens Google.

Com efeito, a conceituação não é uma simples passagem de conhecimentos implícitos a explícitos ou da forma operatória à predicativa. Ela está no movimento, no processo que envolve situações a serem vividas, resolvidas e superadas e mediações, principalmente no âmbito escolar, porque há diferentes níveis de compreensão nos conhecimentos operatórios dos sujeitos em atividade, os quais levam a diferentes níveis de compreensão dos conhecimentos predicativos. Na experiência, no enfrentamento das situações, os níveis de compreensão se complexificam.

Para explicar o raciocínio, um sujeito pode operar com determinados conceitos, ter sucesso e explicar o que fez e como fez. Há, portanto, uma manifestação do saber-fazer e do saber-explicar. Numa próxima situação do mesmo campo conceitual, a operação realizada anteriormente pode não servir e, então, precisará encontrar outros meios de resolver ou reformular as ideias anteriores. A partir disso, haverá também a manifestação do saber-fazer e do saber-explicar com algumas diferenças, porque houve modificações nas operações empregadas e nas suas compreensões sobre o que fez.

No exemplo já discutido, sobre a comparação dos volumes, a estudante explicita em palavras sua formulação “quanto maior a altura, maior o volume”, mesmo que ainda de validade local (para recipientes de mesma base). Se for questionada sobre o porquê das suas ideias, poderá explicar de forma lógica e coerente seus entendimentos. Por mais que seu teorema em ação não esteja universalmente correto, a estudante manifesta conhecimentos operatórios e predicativos. No entanto, no decorrer das situações que enfrentar, seu conhecimento operatório para a comparação dos volumes precisará ser ampliado da mesma forma como suas explicações sobre os objetos, as propriedades e as relações envolvidas. Nisso vemos uma complexificação de seu entendimento do campo conceitual.

Em síntese, há que se considerar os diferentes níveis de complexidade do conhecimento operatório e do predicativo no processo de conceituação. Segundo Muniz (2009, p. 50), o “pensar como eu pensei”, o “tomar consciência dos caminhos e descaminhos que percorreu”, são fundamentais na produção dos esquemas e dos invariantes operatórios. E é essa compreensão conceitual, no movimento da manifestação dos invariantes operatórios do campo conceitual das Funções, que interessa a essa pesquisa.

Neste sentido, considero que a conceituação científica de sujeitos em escolarização se dá mediante a construção de campos conceituais em que cada conceito deste campo passa por um processo de complexificação a partir dos conhecimentos operatórios e predicativos. E isso não acontece do dia para a noite. É um movimento intelectual gradativo, que depende das mediações, dos incentivos que recebe, das situações com as quais se depara e das interações que estabelece. O texto segue com a discussão sobre o conteúdo que constitui o Campo Conceitual estudado na pesquisa.

3.2 Funções Afim

Antes de definir o que entendo por Campo Conceitual das Funções Afim, acredito ser importante tratar do conceito e das definições deste campo científico para esclarecer o que é o objeto matemático em destaque dessa pesquisa. Também, apresentar brevemente como as diretrizes educacionais e os livros didáticos abordam o tema visa contribuir na constituição dos tipos de situações possíveis de serem propostas aos estudantes no desenvolvimento do Campo Conceitual.

3.2.1 O Conceito e definições

O conceito matemático de Função surgiu da necessidade do homem estabelecer relações entre quantidades físicas e matemáticas. Tais relações, representadas por gráficos, fórmulas, dados numéricos ou palavras, expressam o tipo de correspondência e de dependência entre as quantidades variáveis. Segundo Anton, Bivens e Davis (2014a), a definição do conceito foi formalizada por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) em 1673, que usou o termo “função” para indicar a dependência de uma quantidade em relação à outra, introduzindo também os termos “constante”, “variável” e “parâmetro”.

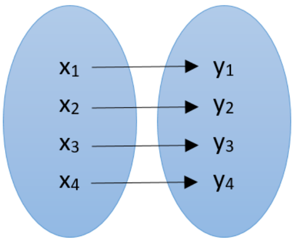
Mais tarde, em 1748, Leohnard Euler (1707 - 1783) concebe a ideia de usar letras do alfabeto para denotar funções, por exemplo, a função f ou a função g e, também, apresenta a ideia da função como um objeto de transformação. Isso significa que a função é uma expressão que associa uma única “saída” y = f(x) a cada “entrada” x. O termo “única” significa exatamente uma, então, uma função não pode produzir duas saídas diferentes com a mesma entrada. No Quadro 3.5, mostro as definições baseadas nas ideias dos dois matemáticos citados e, no Quadro 3.6, faço a representação de três relações estabelecidas entre elementos de dois conjuntos. A partir das definições, percebe-se que as duas primeiras relações f e g podem ser uma Função e a terceira h não, por associar um valor de x a dois valores de y.

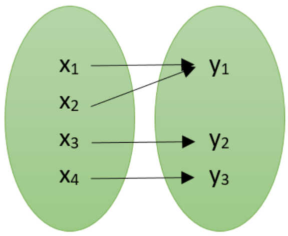
Quadro 3.5 - Definições de Função

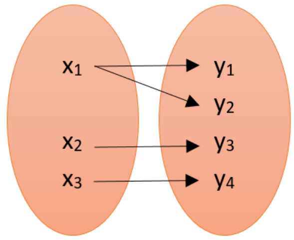
Leibniz	Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y, então, dizemos que ***y é uma função de x***.
Euler	Uma ***função*** f é uma regra que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for denotada por x, então a saída é denotada por f(x) (leia-se “f de x”).

Fonte: Anton; Bivens; Davis (2014, p. 1-2 – grifos da autora).

Quadro 3.6 – Relações entre elementos de dois conjuntos

<table>
<tr><th>Relação f</th><th>Relação g</th><th>Relação h</th></tr>
<tr>
<td>

É uma Função</td>
<td>

É uma Função</td>
<td>

Não é uma Função</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

As Funções Afim, por sua vez, constituem um tipo específico de Função e podem ser definidas da seguinte forma: “uma função $f: R \to R$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in R$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$” (LIMA et al, 2002, p. 87). O coeficiente b é o valor que a função assume quando x = 0, ou seja, f(0) = b, sendo, às vezes, chamado de valor inicial da função f ou taxa fixa. Já o coeficiente a representa a variação constante do y em relação ao x. Numa função f(x) = 2x + 3, por exemplo, significa que a cada 1 unidade de aumento em x produz um aumento de 2 unidades em y. Essa ideia pode ser generalizada conforme segue: dados $x,\ x + h \in R$, sendo $h \neq 0$ o acréscimo (ou decréscimo) em x, o número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos $x,\ x + h$ (LIMA et al, 2002). O Quadro 3.7 apresenta os cálculos do exemplo citado.

Quadro 3.7 - Cálculos que mostram a taxa de variação

	x	Cálculo	$f(x)$		
+1	1	$f(1) = 2 * 1 + 3 = 5$	5	+2	$f(x) = \mathbf{2}x + 3$
	2	$f(2) = 2 * 2 + 3 = 7$	7		$\Delta x = 1 \rightarrow \Delta f(x) = \mathbf{2}$
	3	$f(3) = 2 * 3 + 3 = 9$	9		
	4	$f(2) = 2 * 4 + 3 = 11$	11		

Fonte: Elaborado pela autora.

Além disso, as Funções Afim são caracterizadas por representarem uma correspondência biunívoca (bijeção), na qual é possível definir como: a Função $f: A \rightarrow B$ é bijetora quando, para todo elemento $y \in B$, pode-se encontrar um único elemento $x \in A$, ou quando todo elemento $y \in B$ é imagem de apenas um elemento de $x \in A$ (DANTE, 2014). Seria essa representação da relação f (azul) do Quadro 3.6 anterior, em que para cada x tem-se apenas um y e para cada y tem-se apenas um x. Usando o mesmo exemplo anterior, o valor de x = 1 corresponde unicamente ao valor de f(x) = 5, da mesma forma que o valor de f(x) = 5 corresponde unicamente ao valor de x = 1.

A esse tipo de correspondência pode-se, ainda, associar a ideia de “ida” e “volta”. Como “ida” considero a relação de estabelecer o valor de f(x) dado o valor de x: $1 \rightarrow 5; 2 \rightarrow 7; 3 \rightarrow 9; 4 \rightarrow 11, etc$. E como “volta” ou reversibilidade, considero a ideia contrária: $5 \rightarrow 1; 7 \rightarrow 2; 9 \rightarrow 3; 11 \rightarrow 4, etc.$, em que as operações empregadas nos cálculos são inversas, conforme mostra o exemplo do Quadro 3.8.

Quadro 3.8 - Exemplo das ideias de "ida" e "volta" na correspondência biunívoca

Para a $f(x) = 2x + 3$, temos	
Ideia da "ida"	Ideia da "volta" -> reversibilidade
Qual o valor de f(6)? $$f(6) = 2 * 6 + 3$$ $$f(6) = 15$$	Qual o valor de x quando f(x) = 15? $$15 = 2x + 3$$ $$15 - 3 = 2x$$ $$\frac{12}{2} = x$$ $$x = 6$$
1º) Multiplicação 2º) Adição	1º) Subtração 2º) Divisão

Fonte: Elaborado pela autora.

É possível, ainda, realizar uma discussão mais completa e profunda sobre esse conteúdo matemático. No entanto, para o que proponho na pesquisa, tais conceitos e propriedades parecem suficientes. A seguir, discuto os aspectos relacionados ao ensino.

3.2.2 Aspectos relacionados ao ensino das Funções

O conceito das Funções, por compor a organização curricular da escolarização básica, torna-se um relevante tema de discussão, bem como o debate sobre sua abordagem didática e sobre sua aprendizagem. Os PCNs+EM (BRASIL, 2002) consideram que esse é um dos conteúdos mais importantes enquanto linguagem para descrever fenômenos da vida cotidiana e propõem que a ênfase deve ser dada ao ensino da noção do conceito, suas propriedades, representações gráficas, analíticas e aplicações nas diversas áreas em detrimento do excesso de formalizações. Dessa forma,

> [...] o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas (BRASIL, 2002, p. 121).

As novas orientações propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC – BRASIL, 2018)[24] no que concerne à etapa do Ensino Médio, sem especificar a importância ou as formas de abordagem dos conteúdos escolares, de uma forma geral, abordam a organização do currículo por competências e habilidades ou por unidades temáticas e habilidades, cujo foco deve ser a construção de uma visão integrada da Matemática, tendo como referência a realidade e a vida cotidiana dos estudantes. Sobre as habilidades a serem desenvolvidas em relação às Funções Afim, vejo a presença mais significativa do uso de TDICs como meio para as representações dos objetos matemáticos comparado com o que os PCN+EM tratam. No Quadro 3.9, é possível perceber como a BNCC apresenta o desenvolvimento do conteúdo e as indicações do uso de tecnologias, o que parece contemplar os principais conceitos, propriedades e representações relacionadas às Funções Afim.

[24] Na presente data (setembro de 2018) a BNCC Ensino Médio encontra-se em sua versão provisória que foi reprovada pelo Conselho Superior de Educação e continua em processo de análise.

Quadro 3.9 - Habilidades da Unidade Temática Funções Polinomiais de 1º grau

(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Brasil (2018, p. 525, 528, 531, 533)

É interessante também observar nos livros didáticos[25] como se dá a organização e o desenvolvimento do conteúdo, pois são os principais recursos utilizados pelo professor na sua prática docente, seja na sala de aula ou nos momentos de estudo e de planejamento. Neles constam os principais conceitos científicos que foram historicamente eleitos e sistematizados para serem desenvolvidos na Educação Básica. Além disso, muitas vezes, servem como guia no ensino, revelando as escolhas conceituais, metodológicas e organizacionais do professor ou da escola, o que leva à seleção das atividades para desenvolver um campo conceitual.

O ensino das Funções Matemáticas é, geralmente, amplo, longo e organizado a partir de seus diferentes tipos, seguindo uma sequência lógica de trabalho em sala de aula da mais simples a mais complexa. Os tipos trabalhados na escola, geralmente na 1ª série do EM, são: Função Afim (Função Polinomial de 1º grau), Função Quadrática (Função Polinomial de 2º grau), Função Trigonométrica, Função Exponencial, Função Logarítmica, Função Inversa e Função Composta.

Nas atividades propostas, os livros tendem a mostrar, primeiramente, a formalização do conceito, das propriedades e das relações para depois apresentar exercícios de fixação e algumas problematizações com situações diversas e aplicadas a diferentes contextos. Os contextos usados para as Funções Afim, além dos da própria Matemática, são ligados à Economia (no sentido de situações de venda, custo de produção, lucro, etc.), contextos da Física (velocidade, distância e tempo), da Biologia (crescimento populacional de bactérias), entre outros.

[25] Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr (2002); Lima et al. (2006); Dante (2010, 2014); Iezzi et al. (2013).

Nessas atividades e problemas, certo padrão pode ser observado na constituição dos enunciados e das perguntas. A Função pode vir expressa na forma analítica, na forma gráfica, em tabelas ou de forma descritiva. Se a forma analítica não estiver explícita, geralmente, solicita-se sua modelagem. Se e quando estiver explícita, questionamentos sobre sua variação, sobre seus valores numéricos, sobre suas propriedades e etc. são realizadas.

O que é possível perceber nessa leitura rápida das diretrizes e dos livros didáticos, é que as problematizações iniciais e a relativização da linguagem excessivamente formal, conforme apontam os PCN+EM, devem ser opções didáticas dos professores enquanto elaboradores de suas aulas, em que o livro didático não seja o centralizador de tudo o que é feito em sala de aula, mas seja apenas um apoio, um recurso, uma das formas de trabalhar o conteúdo.

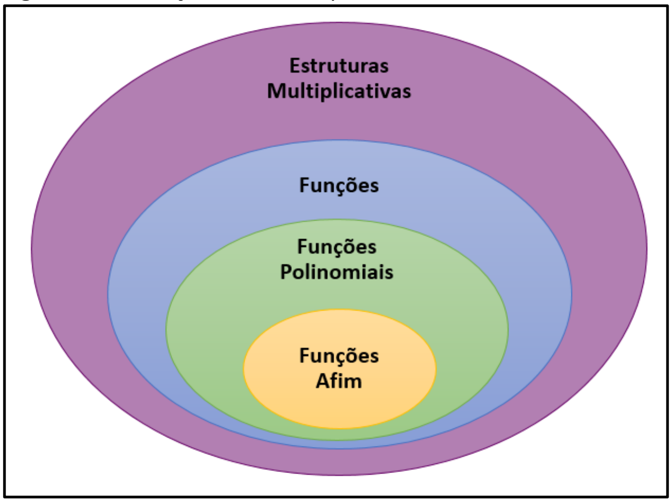
No tópico seguinte, volto a tratar as atividades dos livros didáticos no sentido de realizar uma sistematização das classes de situações para depois elaborar as situações que podem ser trabalhadas com os estudantes no ambiente de programação.

3.3 O Campo Conceitual das Funções Afim

A partir do que foi discutido, um campo conceitual constitui um conjunto de situações cujo domínio exige uma variedade de conceitos (invariantes operatórios), de procedimentos e de representações. Neste sentido, busco delimitar um possível conjunto de situações, cujo tratamento implica, especificamente, no uso de relações de correspondência biunívoca e de taxa de variação constante. Assim, tal conjunto é o que chamo de Campo Conceitual das Funções Afim.

É possível pensar no Campo Conceitual das Funções Afim como parte de um campo maior, o das Funções Polinomiais, que, por sua vez, fazem parte do Campo Conceitual das Funções. Como já dito anteriormente, considero que o Campo das Funções está dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas. Além disso, dentro do Campo das Funções Afim, temos seus diferentes tipos, por exemplo, Função Identidade, Função Constante e Função Linear, que requerem, cada uma, um conjunto de situações específicas. Isso que faço é um exercício de localizar as Funções Afim com o intuito de pensar sobre as situações que dão sentido ao campo. Na Figura 3.2 apresento uma possível representação por conjuntos da relação entre campos conceituais.

Figura 3.2 - Relação entre campos conceituais



Fonte: Elaborado pela autora.

O Campo Conceitual das Funções Afim, além de envolver objetos e propriedades próprios do seu entorno (o próprio campo e os campos ao redor), apresenta possibilidades de estabelecer relações com outros campos conceituais da Matemática, bem como com campos da Física, da Biologia, da Geografia, da Economia, da Sociologia, entre outros, ampliando a esfera de conceitos envolvidos. Isso mostra que os conceitos não pertencem exclusivamente a um único campo conceitual, eles fazem parte de vários outros, como uma rede complexa de conceitos e campos conceituais.

Em sua teoria, Vergnaud (2014) enfatiza a importância da realização de uma análise das noções a serem desenvolvidas pelos estudantes dentro de um campo conceitual, bem como uma análise das situações escolares de naturezas diversas, as quais permitem o desenvolvimento destas noções. Para ele, quanto mais diversificadas forem as situações, mais condições os estudantes terão de compreender o campo conceitual.

Neste sentido, é meu interesse apresentar uma possível sistematização dos diferentes tipos de situações a serem trabalhadas na aula de Matemática, os principais invariantes operatórios e algumas representações que constituem o campo conceitual em questão. Assim, a partir de uma breve consulta nos livros didáticos, consideramos que todos os exercícios, atividades ou problemas envolvem o estabelecimento de uma relação de correspondência biunívoca entre dois tipos diferentes de quantidades (dois conjuntos), cuja generalização pode vir explícita ou não na forma analítica. A explicitação, a qual nos referimos, é quando a relação vem modelada na forma *f(x) = ax + b*, com os coeficientes *a* e *b* bem definidos, é a lei da função na sua forma explícita. A não explicitação é quando a situação não vem modelada, pode vir na forma gráfica, em tabelas, ou apresentar informações descritivas importantes para encontrar os coeficientes. Para esta forma de classificação das situações, estamos nos baseando nos esquemas necessários para resolvê-las. Assim, sistematizamos três tipos de classes de situações das Funções Afim, conforme pode ser observado nos exemplos do Quadro 3.10. As situações apenas informam o contexto do problema e não apresentam perguntas ou estabelecem ordens.

Quadro 3.10 - Exemplos das três classes de situações sobre Funções Afim

Classe A	**Exemplo 1**: Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática s = 3t + 4, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos).	Lei da função explícita
Classe B	**Exemplo 2:** Um parque de diversões cobra R$ 15,00 de entrada e R$ 8,00 para utilizar cada um dos brinquedos. Se usar x brinquedos, deve pagar y reais.	Lei da função não explícita, com informações sobre os coeficientes, ou seja, a taxa de variação e a taxa fixa.
Classe C	**Exemplo 3:** Várias pessoas foram ao cinema assistir *Star Wars: os últimos Jedi* e levaram dinheiro para comprar o ingresso e bombons. Sabe-se que uma delas gastou R$ 21,50 com seu ingresso e um bombom, enquanto outra gastou R$ 23,00 com seu ingresso e dois bombons. Se comer x bombons, deve pagar y reais.	Lei da função não explícita, com informações sobre valores do conjunto de entrada (número de bombons) e do conjunto de saída (valor gasto). Poderia ter uma tabela que representasse esses valores ou um gráfico.

Fonte: Elaborado pela autora.

No exemplo 1, temos o estabelecimento da relação do problema de forma bastante explícita, através da fórmula s = 3t + 4, caracterizando a classe A de situações. No exemplo 2, a modelagem da função não é explícita, mas pode ser obtida através do esquema de estabelecer a relação dos R$ 15,00 da entrada no parque com o valor fixo gasto, ou seja, com o coeficiente *b* da função, e os R$ 8,00, sendo o preço por brinquedo usado, com o coeficiente *a* da função, que será multiplicado pelo x, número de brinquedos usados. Então, podemos obter o modelo y = 8x + 15, caracterizando a classe B de situações.

Já o exemplo 3 envolve outro tipo de raciocínio para modelar a Função, o que nos leva à classe C de situações. Nesta, é possível usar o esquema de estabelecer uma relação de transformação que nem sempre é simples de deduzir à primeira vista: 1 bombom → R$ 21,50; 2 bombons → R$23,00. Para isso, comumente usa-se ferramentas matemáticas para estabelecer tal relação, como sistema de equações, por exemplo. O modelo para esse exemplo é $f(x) = 20 + 1{,}5x$. Assim, os esquemas usados para cada situação são diferentes, portanto, as situações pertencem a classes diferentes. Para as situações pertencerem a mesma classe, o esquema usado na sua realização deve ser o mesmo.

A partir destas três formas diferentes de apresentar as relações de correspondência e dependência da Função Afim, as situações podem ainda envolver diferentes problematizações a respeito dos dados fornecidos. A isto chamaremos de subclasses. Podemos ter subclasses de situações a partir das questões sobre: (i) elaborar o modelo algébrico caso este não esteja explícito; (ii) encontrar valores numéricos da variável dependente a partir de valores da variável independente; (iii) encontrar valores numéricos da variável independente a partir de valores dados à variável dependente, estabelecendo a ideia da reversibilidade; (iv) aplicar propriedades da Função Afim como crescimento e decrescimento, taxas de variação, sinais da função, translações, rotações, domínio e imagem, entre outros; (v) manifestar outros tipos de representações além da algébrica, como diagramas, tabelas e gráficos.

Neste sentido, as situações, para serem utilizadas com os estudantes na aula, podem ser elaboradas realizando a integração de cada uma das três classes do Quadro 3.10, com as subclasses citadas anteriormente, além de estarem inseridas em contextos diversos. No Quadro 3.11, apresento um exemplo de situação classificada de acordo com as classes e subclasses, explicitando as representações simbólicas (significantes) para suas resoluções e as noções necessárias de serem postas em ação (significados) para a resolução. Informo que esse tipo de exercício de análise sobre as noções e representações foi realizado com várias situações diferentes, mas apresento apenas uma como exemplo.

Quadro 3.11 - Exemplos de situações a partir das classes e subclasses

<table>
<tr><th colspan="2">SITUAÇÃO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Várias pessoas foram o cinema assistir Star Wars: os últimos Jedi e levaram dinheiro para comprar o ingresso e bebidas. Sabe-se que uma delas gastou R$ 21,50 com seu ingresso e um bombom, enquanto outra gastou R$ 23,00 com seu ingresso e dois bombons.
a) Calcule o valor de cada bombom e o preço do ingresso do cinema e estabeleça a lei desta função, sabendo que a relação é do tipo f(x) = ax + b.
b) Outra pessoa que comprar o ingresso e mais três bombons pagará quanto?
c) A cada aumento de um bombom comprado representa quantos reais a mais pagos?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Classificação das situações: Classe C
Subclasses: i – elaboração do modelo algébrico; ii – encontrar valor numérico de y dado o x; e iv – propriedades.</td></tr>
<tr><td>Possíveis resoluções:</td><td>Noções necessárias para resolver a situação</td></tr>
<tr><td>a) Sistema de equações:
$\begin{cases} 21{,}5 = a + b \\ 23 = 2a + b \end{cases} \rightarrow b = 21{,}5 - a$
$23 = 2a + 21{,}5 - a$
$2{,}3 - 21{,}5 = a$
$a = 1{,}5 \quad e \quad b = 20$
Ingresso do cinema é R$ 20,00 e o preço do bombom é R$ 5,00. A lei da função é f(x) = 1,5x + 20.

d) f(3) = 1,5*3+20 = 24,50

c) f(4) = 1,5*4+20 = 26,00
A cada bombom comprado o valor final pago aumenta R$ 1,50.</td><td>- A quantidade de bombons é a variável x;
- O valor pago por tudo é a variável y;
- Y depende de x;
- R$21,50 e R$23,00 são valores da variável y;
- 1 e 2 bombons são valores da variável x;
- Um bombom corresponde a R$21,50, 2 bombons a R$23,00;
- Sistemas de equações permitem encontrar o preço por bombom e o preço do ingresso do cinema;
- O preço do bombom é o coeficiente a da Função afim;
- O preço do ingresso é o coeficiente b da Função Afim;
- Três bombons correspondem a R$24,50;
- O 1,5 é a variação constante da função.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

Quando um estudante está resolvendo atividades como essa, ele demonstra seus invariantes operatórios, geralmente, na forma escrita ou verbal com frases e afirmações que representam seus teoremas em ação e conceitos em ação. São nessas representações explícitas que conseguimos perceber como eles estão operacionalizando os invariantes operatórios, ou seja, como estão seus conhecimentos operatórios. Por exemplo, se um estudante faz a afirmação “a quantidade de copos de refrigerante que eu tomar vai determinar o preço final pago”, posso dizer que é um teorema em ação, pois é uma proposição passível de ser verdadeira ou falsa. O número de copos de refrigerante e o valor final pago tornam-se variáveis e a relação estabelecida entre elas é de correspondência biunívoca e de dependência. Assim, os três conceitos matemáticos, variáveis, correspondência biunívoca e dependência, são os conceitos em ação manifestados que formam o teorema em ação.

Pela observação das representações, é possível inferir sobre as capacidades operatórias desse estudante. No entanto, para saber sobre sua compreensão em relação às noções que está operando, é preciso perguntar para ele. É preciso que ele manifeste os conhecimentos predicativos. Será por meio de suas explicações que professores e pesquisadores terão condições de conhecer mais sobre seus conhecimentos operatórios e predicativos.

A partir do que foi apresentado anteriormente em relação ao conceito de Função Afim e o que foi levantado sobre as noções associadas às situações a partir dos livros didáticos, procurei categorizar tais noções em quatro principais invariantes operatórios necessários para a construção do conceito de Função Afim. Isso se mostra indispensável para essa pesquisa, que visa investigar as manifestações das representações e das compreensões destes elementos pelos estudantes, pois nos permite ter clareza do que olhar nas mobilizações conceituais deles durante a ação de resolver um problema.

No entanto, tais invariantes categorizados são do tipo conceitos em ação, pois não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos na situação, podendo ser úteis ou não para sua resolução e, fundamentalmente, são os conceitos que dão sustentação aos teoremas em ação elaborados pelos estudantes. No Quadro 3.12, apresento os quatro invariantes que constituem as categorias de análise da pesquisa, os quais já foram tratados no capítulo 3.2.1. Nas observações do Quadro, apenas retomo algumas ideias.

Quadro 3.12 - Invariantes Operatórios da pesquisa

Invariante Operatório	Observações
IO1 – Variável	Representação simbólica para grandezas que variam de acordo com a situação. Possibilitam a generalização da relação estabelecida entre as grandezas.
IO2 – Taxa de Variação	Seja a Função $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$. Dados x, $x + h \in R$, sendo $h \neq 0$ o acréscimo (ou decréscimo) em x, o número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos x, $x + h$ (LIMA et al, 2002).
IO3 – Taxa Fixa	Seja a Função $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$. O coeficiente b é o valor que a função assume quando x = 0, ou seja, f(0) = b, sendo, às vezes, chamado de valor inicial da função f ou taxa fixa (LIMA et al, 2002).
IO4 – Correspondência Biunívoca	A Função $f: A \rightarrow B$ é bijetora quando, para todo elemento $y \in B$, pode-se encontrar um único elemento $x \in A$, ou quando todo elemento $y \in B$ é imagem de apenas um elemento de $x \in A$ (DANTE, 2014).

Fonte: Elaborado pela autora.

Por fim, é relevante observar que, se a situação proposta for muito difícil para um estudante, significa que não possui elementos cognitivos suficientes para serem mobilizados. Por outro lado, se a atividade for muito fácil, não constitui um desafio e, portanto, não possibilita a reformulação das noções prévias e nem a construção de novas. Assim, nenhuma dessas possibilidades é do interesse desse estudo. Para a pesquisa, é pertinente que as situações causem mobilizações do que já sabem ao mesmo tempo que os desafie a procurar por soluções que eles ainda não conheçam.

Nesse terceiro capítulo, foi possível expor meu exercício de compreensão sobre a TCC e constituir o Campo Conceitual das Funções Afim, no que se refere às situações a serem vivenciadas e resolvidas pelos estudantes, aos invariantes operatórios relacionados a estas situações e suas possíveis representações. No próximo capítulo, apresento minha proposta de elaboração de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores a partir de referenciais teóricos da Informática Educativa e da Didática.

4 PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES NA CONSTITUIÇÃO DE UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA

Embora a tecnologia desempenhe um papel essencial na realização de minha visão sobre o futuro da educação, meu foco central não é a máquina, mas a mente e, particularmente, a forma em que movimentos intelectuais e culturais se auto definem e crescem (PAPERT, 1985, p. 23).

Envolver um recurso tecnológico digital em uma pesquisa em Educação, mais do que ter conhecimento técnico da ferramenta, exige entender e assumir uma perspectiva teórico-metodológica que ajude a pensar sobre o uso da tecnologia. Assim, o que deve interessar à pesquisa não é a *máquina* em si, mas as apropriações e os desenvolvimentos cognitivos que se dá na *mente* dos sujeitos por meio dela.

Para tanto, organizo o capítulo em cinco tópicos: (i) primeiro, trato sobre o que é a programação de computadores no sentido técnico do termo; (ii) apresento a perspectiva da Teoria Construcionista de Seymour Papert (1985, 2008) sobre o uso da programação de computadores na Educação; (iii) faço uma aproximação teórica entre Vergnaud e Papert, na qual constituo a Espiral da Conceituação; (iv) anuncio o ambiente de programação Scratch como escolha metodológica dessa pesquisa; por fim, (v) discuto o que considero uma estratégia didática e uma proposta possível para a pesquisa empírica.

4.1 Compreendendo a programação de computadores

Segundo Brod (2013, p.16), “programar é expressar, na forma de um conjunto limitado de instruções, o que será executado por algum tipo de máquina”. É ensinar a máquina a fazer algo, é criar um programa, um *software*. Para comunicar ideias à máquina, é preciso dois elementos básicos: algoritmos e linguagem de programação**.**

De forma geral, algoritmo é um conjunto de regras bem definidas num número finito de passos que estabelece o caminho para a solução de algum problema ou para a execução de alguma tarefa. Em toda tarefa do cotidiano existe um algoritmo, independentemente de estar relacionada ou não com computadores. Com isso, podemos dizer que uma receita de bolo, o procedimento para dirigir um carro, a fórmula para encontrar a área de uma circunferência e as regras para se desenhar um quadrado são algoritmos. Tais regras precisam ser claras e eficientes, seguindo uma lógica.

Nessa direção, para implementar um algoritmo, é preciso uma linguagem de programação. Segundo Souza et al. (2014, p.3),

> o estudo de algoritmo e de lógica de programação é essencial no contexto do processo de criação de um *software*. Ele está diretamente relacionado com a etapa de projeto de um *software* em que, mesmo sem saber qual será a linguagem de programação a ser utilizada, se especifica completamente o *software* a ponto de na implementação ser possível traduzir diretamente essas especificações em linhas de código em alguma linguagem de programação como Pascal, C, Java e outras.

Uma linguagem de programação, portanto, traduz as informações de um algoritmo, dadas pelo programador, para uma linguagem que a máquina entenda (linguagem binária). É uma forma de comunicação entre usuário e computador que segue uma estrutura (sintaxe) com significado interpretável (semântica), é um conjunto finito de palavras, comandos e instruções que descrevem uma tarefa (EGYPTO, 2004). E, "quando as ações de um algoritmo obedecem à sintaxe de uma linguagem de programação, passamos a chamá-lo de programa" (VILLAS; VILLASBOAS, 1988, p. 34).

Juntamente com o desenvolvimento das linguagens de programação, surgem *softwares* aplicativos específicos para servirem como ferramentas de desenvolvimento de outros *softwares* ou aplicações, ou, também, podemos chamar de ambientes de programação. Esses ambientes, nos quais o usuário programa a partir de uma linguagem ou várias linguagens, começam a ser muito utilizados para fins educacionais nos cursos de Ciência da Computação, Informática e Engenharia de *Software*. Estudantes desses cursos passaram a aprender a programar por meio de ambientes de programação.

São vários os ambientes de programação disponíveis para *download* na *web*. Entre eles destacamos três criados para a Educação: o SuperLogo, com linguagem Logo, o Alice e o Scratch, com linguagens em bloco. Para exemplificar o que estamos discutindo sobre algoritmos, linguagens de programação e ambientes de programação, especificamos um algoritmo para calcular e exibir na tela a área de um retângulo de base *b* e altura *h*, em que os valores de *b* e *h* são fornecidos pelo usuário. Mostraremos tal tarefa sob dois aspectos: o algoritmo informal no Quadro 4.1 e o algoritmo em linguagem de blocos no ambiente Scratch na Figura 4.1.

Quadro 4.1 - Algoritmo informal para calcular a área de um retângulo

Algoritmo informal para calcular a área de um retângulo

Início

1. *Pedir para o usuário digitar os valores de b e h*
2. *Calcular a área A usando a fórmula A = b*h*
3. *Exibir o valor de A*

Fim

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.1 - Programa para calcular a área de um retângulo a partir da digitação da base e altura, em linguagem de blocos no Scratch

Fonte: Elaborado pela autora.

Por fim, falar em programação de computadores requer delimitar em qual sentido estamos usando o termo. Neste tópico, tratamos da programação como um processo técnico cujo objetivo está no resultado final. Porém, em nossa perspectiva, avançamos no que se refere a um processo mecânico quando nos aliamos a ideias que consideram o ato de programar uma atividade criativa, reflexiva e com potencial de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo. Meu interesse é, portanto, pedagógico, focado no processo, e não somente no resultado final.

4.2 Programação de Computadores na Educação

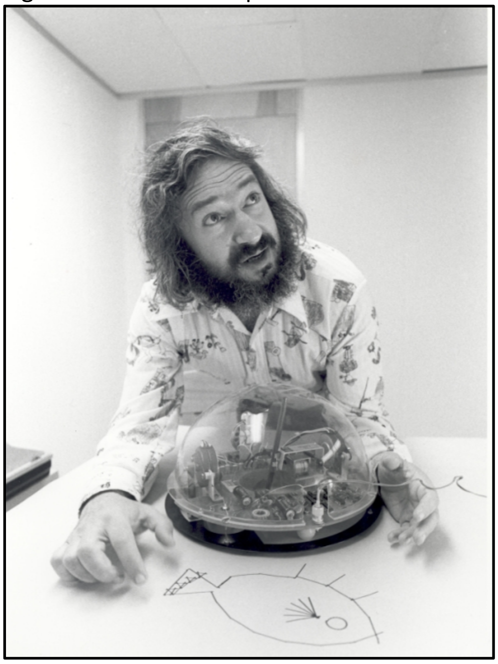
Com o desenvolvimento do microcomputador pessoal, ideias e projetos sobre seu uso como uma ferramenta pedagógica começam a surgir, principalmente de Seymour Papert[26]. A partir de sua formação em Filosofia e Matemática e das influências recebidas por Piaget, com quem trabalhou em Genebra de 1960 a 1964, Papert começa a pensar sobre o que as crianças poderiam estar aprendendo com os computadores e como a utilização destes mudaria a forma de elas aprenderem. Inicia, assim, seu projeto de programação para crianças em que

> programar significa, nada mais, nada menos, comunicar-se com o computador numa linguagem que tanto ele quanto o homem podem "entender". E aprender línguas é uma das coisas que as crianças fazem bem. Toda criança normal aprende a falar. Por que então não deveria aprender a "falar" com um computador? (PAPERT, 1985, p. 18).

Fundador e pesquisador do laboratório de inteligência artificial do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), onde realizava suas pesquisas, Papert e seus colaboradores, por volta de 1967, criaram uma linguagem de programação destinada às crianças: o Logo. A proposta da linguagem era proporcionar que a criança comandasse um robô ou uma representação de robô na tela do computador. Tal robô lembrava a forma de uma tartaruga, conforme a Figura 4.2, que passou a ser o símbolo da linguagem Logo.

[26] Seymour Papert, nascido em Pretória, na África do Sul, é bacharel em Filosofia e PhD em Matemática pela *Witwater strand University*. Trabalhou com Piaget em Genebra, onde começou a pesquisar sobre "o uso da Matemática para entender como as crianças podem aprender e pensar". Já nos Estados Unidos, foi fundador do laboratório de inteligência artificial do MIT *(Massachusetts Institute of Tecnology)* desenvolvendo uma linguagem de computador para crianças, o Logo, e, posteriormente, a Teoria Construcionista de Aprendizagem (CAMPOS, 2013).

Figura 4.2 - Foto de Papert com um robô tartaruga



Fonte: Imagem da internet[27]

Segundo Campos (2013), os primeiros testes com o Logo ocorreram por volta de 1969 com estudantes de 7º ano de uma escola dos Estados Unidos. Nesses testes, a linguagem apenas possibilitava a realização de processamento de listas, pois não tinha ainda a parte gráfica. Mais adiante, surge a primeira tartaruga gráfica e a primeira tartaruga de chão, mas, com o preço elevado dos dispositivos gráficos em 1970, o Logo passa a ser conhecido por seu uso com as tartarugas de chão. Uma espécie de objeto robótico, a tartaruga de chão obedecia aos comandos dados através da linguagem, movimentando-se e desenhando sobre um papel. Com a popularização dos computadores nos anos seguintes, torna-se mais acessível o uso apenas das tartarugas gráficas.

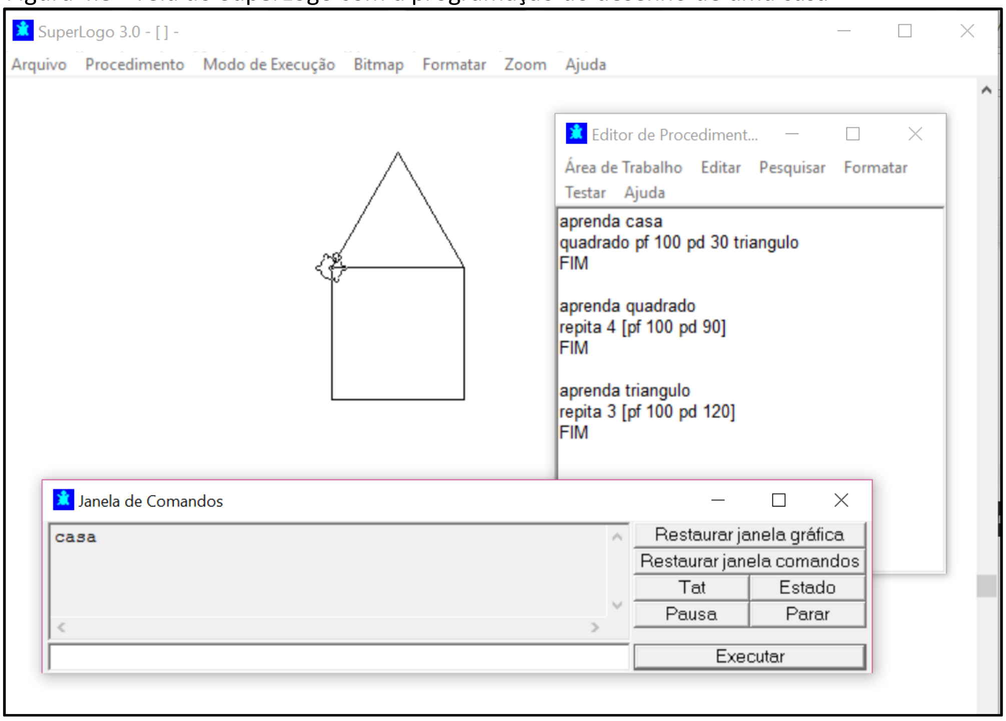
Para movimentar a tartaruga, é preciso escrever comandos como “parafrente 100” (anda 100 passos), “paradireita 90” (gira 90° para a direita). Se quisermos que ela deixe um rastro por onde passou e desenhe na tela, no caso das tartarugas gráficas, podemos mandar que “abaixecaneta”. Estes são os comandos mais simples em que as crianças iniciam suas atividades, mas é possível ensinar novos comandos à tartaruga. As crianças podem criar pequenos algoritmos que executam uma determinada tarefa e associá-los a novos comandos.

[27] Disponível em: <http://www.buddys.com.br/wp-content/uploads/2016/07/Papert-x640.jpg>. Acesso em: 20 set. 2017.

Muitos ambientes de programação foram projetados como suporte da linguagem Logo ao longo destes 50 anos e algumas palavras usadas para denominar os comandos podem ter sofrido variações conforme as versões foram sendo atualizadas. Neste sentido, para exemplificar do que falamos, vamos usar o ambiente SuperLogo3.0[28], desenvolvido pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED), da Universidade de Campinas (UNICAMP), e supor que uma criança queira desenhar uma casa a partir de um quadrado e um triângulo. Ela pode tentar fazer todo o desenho passo a passo ou pode ensinar a tartaruga a desenhar o quadrado primeiro, definindo uma ação para o novo comando "quadrado". Depois para o "triângulo" e, finalmente, para "casa".

Para ensinar a fazer um "quadrado", é preciso digitar na janela de comando "aprenda quadrado". Daí outra janela abrirá para que seja digitado o comando. Também podemos criar, editar e excluir os novos comandos usando a ferramenta "procedimentos". No SuperLogo, é possível digitar abreviações do tipo "pf" ao invés de "parafrente". A Figura 4.3 mostra o layout do SuperLogo com o desenho da casa, a janela de comandos e o editor de procedimentos. Assim, é possível perceber que, ao digitar o comando "casa", o ambiente executa todas as ações que foram associadas para "casa".

Figura 4.3 - Tela do SuperLogo com a programação do desenho de uma casa



Fonte: Elaborado pela autora.

[28] Mais informações em: <http://projetologo.webs.com>. Acesso em: 23 abr. 2017.

É possível perceber a linguagem Logo como um estilo de geometria computacional que permite uma primeira representação da Matemática formal para a criança, mas não permite a realização de cálculos e o retorno de valores numéricos. Na geometria da tartaruga, o elemento ponto não é abstrato e estático como na escola, é representado por uma tartaruga que é dinâmica, tem orientação (se movimenta e está voltada para algum lado) e, neste sentido, pode ser comparada com uma pessoa. Assim, as crianças criam os movimentos para a tartaruga a partir dos conhecimentos que possuem sobre seu próprio corpo que são conhecimentos concretos e informais (o saber-fazer), o que pode vir a ser um ponto de partida para a conexão com a geometria formal (PAPERT, 1985).

São diversos os conhecimentos que as crianças aprendem na atividade com a tartaruga. Papert (1985) os define como conhecimentos matemáticos e conhecimentos matéticos. Para o primeiro tipo, que podemos identificar no exemplo dado da construção da "casa", o autor cita a ideia de ângulo, ângulos internos e externos de polígonos, repetição controlada (por meio de modulações nos programas), operador de mudança de estado, ideia de variável, de taxa de variação, ideia de recursão, etc., ou seja, são conhecimentos de uma área científica específica. Já conhecimento matético consiste na compreensão sobre a aprendizagem de qualquer coisa em qualquer área. Tem a ver com a ação de aprender a aprender, constituindo-se parte fundamental do processo de compreensão dos conceitos. Ao vivenciar a experiência de ensinar ao computador aquilo que ela deseja que ele faça, a criança passa a estar no controle de seu processo de aprendizagem. É ela quem planeja, toma decisões, testa, replaneja e etc. Noesse processo,

> a criança embarca numa exploração sobre a maneira como ela própria pensa. Pensar sobre modos de pensar faz a criança tornar-se um epistemólogo, uma experiência que poucos adultos tiveram (PAPERT, 1985, p.35).

Todas estas concepções de Papert sobre a aprendizagem deram origem à Teoria Construcionista, que, como o próprio autor define, é uma "filosofia educacional" (PAPERT, 2008, p. 134) cuja aprendizagem acontece a partir da descoberta de cada um sobre os conhecimentos específicos de que precisam. Isso não significa ser contra o ensino ou deixar que as crianças caminhem sozinhas, mas defende que "a meta é ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino" (PAPERT, 2008, p. 134). O professor deve ser um orientador do processo.

Ainda, a Teoria Construcionista considera que a aprendizagem será mais significativa quando houver construção pessoal de artefatos como programas de computador, animações ou robôs. A atividade de programação permite ao sujeito enriquecer seus esquemas de significação com novos esquemas de representação lógico matemáticos, linguísticos e estéticos, os quais são considerados elementos essenciais da aprendizagem (LOPES; FAGUNDES, 2006). Segundo Campos (2013, p.83), Papert acredita que "projetar no ambiente externo nosso raciocínio e nossas ideias internas, por meio da construção e do desenvolvimento de algo concreto, é a chave para o aprendizado".

Também, uma atividade de programação permite que a criança teste suas hipóteses sobre a realização de um determinado problema, a partir do confronto imediato entre o procedimento descrito e o *feedback* dado pelo *software*. Este retorno imediato permite a reflexão sobre a ação e, se necessário, a reformulação das hipóteses iniciais, para, então, testá-las novamente. Assim, Papert (1985, p.176) vê o computador ajudando de dois modos:

> em primeiro lugar, o computador permite, ou obriga a criança a externalizar expectativas intuitivas. Quando a intuição é traduzida num programa, ela se torna mais evidente e acessível à reflexão. Em segundo lugar, ideias computacionais podem ser tomadas como materiais para o trabalho de remodelação do conhecimento intuitivo.

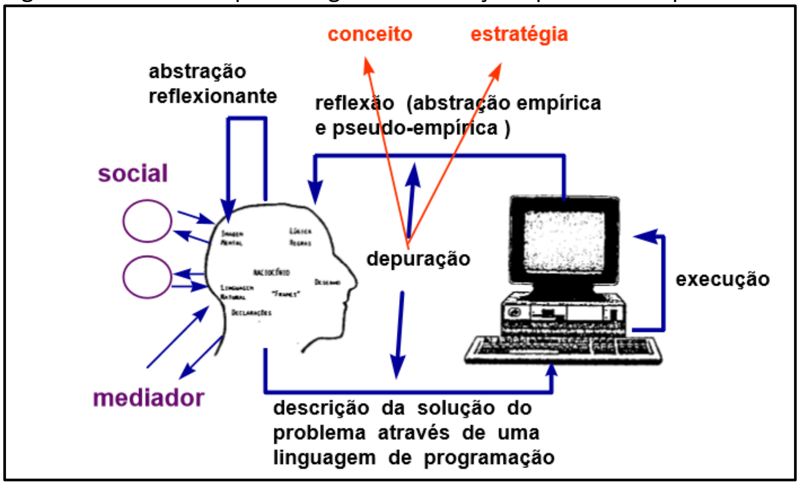
Essa visão apresentada por Papert (1985, 2008), a qual propõe uma nova cultura sobre a aprendizagem associada ao computador, parece não combinar com os sistemas escolares de sua época. Para ele, a forma tradicional de instrução realizada inibe a construção de conhecimento das crianças e o dogmatismo escolástico, que tudo atribui à arte de ensinar, precisaria dar lugar a ideias piagetianas de que a aprendizagem pode acontecer sem haver, necessariamente, uma intencionalidade didática. Ainda, o autor reflete sobre a possibilidade de um mundo onde as escolas tradicionais fossem substituídas por espaços bem elaborados para que as crianças pudessem aprender.

Por conseguinte, Papert (2008) afirma que as tecnologias têm sido inseridas nos processos educativos geralmente de forma utilitária, e não como ferramenta para aprender. A tecnologia surge, mas as metodologias continuam as mesmas, pois acabam servindo para reforçar métodos educacionais que foram criados quando não existiam computadores. Neste sentido, a programação de computadores sinaliza uma metodologia diferente de trabalho em sala de aula. O professor possibilita uma maior autonomia para o estudante, que, por sua vez, empreende muito mais esforço e envolvimento do que faria na aula convencional.

A teoria de Papert ganha o mundo quando seus estudos com a linguagem Logo começam a surtir resultados positivos. Segundo Campos (2013), as ideias construcionistas de que o computador pode servir como uma ferramenta de aprendizagem, e não uma máquina de instrução, são disseminadas no Brasil a partir da visita de Papert em 1975. Em 1976, surgem os primeiros trabalhos com o LOGO com filhos de professores da UNICAMP, dando origem ao NIED e, posteriormente, na década de 1980, tais estudos se ampliam com o grupo de pesquisa Laboratório de Estudos Cognitivos (LEC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Neste novo contexto de iniciação da Informática na Educação brasileira, Valente (2002) traz uma importante contribuição para o entendimento sobre o papel do computador no processo de aprendizagem. Segundo o autor, o computador tem seu início na Educação como meio para o aprendiz[29] representar seu conhecimento, explicitando seu raciocínio. No entanto, mais adiante se percebeu que o papel do computador era mais do que uma simples representação. O raciocínio executado poderia ser usado para melhorar a representação inicial do seu conhecimento. Assim, surge a ideia de ciclo de aprendizagem na interação aprendiz-computador, conforme a Figura 4.4.

Figura 4.4 - Ciclo de aprendizagem na interação aprendiz-computador



Fonte: Valente (2005, p. 54).

Para elaborar este ciclo, Valente (1999, 2002, 2005) baseou-se nas Teorias de Piaget e de Papert. Assim, quando o aprendiz usa um ambiente de programação de computadores, precisa dar ordens ao computador descrevendo códigos. Como o computador não adiciona

[29] Valente (1999, 2002) refere-se às pessoas que lidam com o ambiente de programação como "aprendizes".

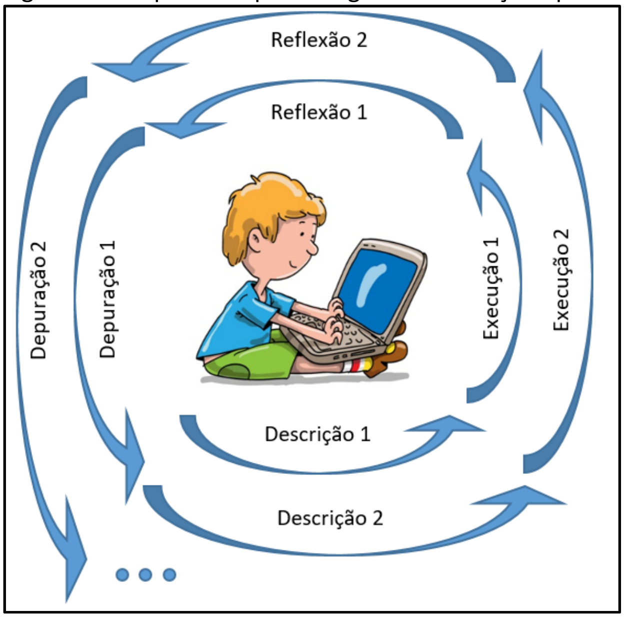
informações novas ao programa escrito, se houver qualquer engano na escrita, será produto do próprio aprendiz, e a resposta obtida de forma imediata após a execução poderá ser confrontada com as ideias originais, iniciando um processo de reflexão e de compreensão sobre suas hipóteses iniciais.

Segundo Valente (2002), a reflexão pode levar o aprendiz a realizar três níveis de abstração: (i) abstração empírica, quando o aprendiz extrai informações do objeto criado na programação, como, por exemplo, cor, textura, forma física, etc.; (ii) abstração pseudo-empírica, quando o aprendiz deduz que o resultado do programa não é, por exemplo, a figura geométrica que queria ter feito; (iii) abstração reflexionante, quando utiliza as informações das abstrações anteriores e projeta e reorganiza para níveis superiores do pensamento.

Após cada reflexão, o aprendiz depura seu programa para melhor se adaptar às características que evidenciou estarem equivocadas. Nesse processo, pode haver várias vezes descrições, execuções, reflexões e depurações, formando diversas versões do mesmo programa. Isso caracteriza o processo do ciclo.

Porém, a partir do conceito de Piaget sobre o aspecto majorante do conhecimento, Valente (2002) passa a entender que, a cada nova descrição realizada após um desequilíbrio (causado pela tarefa que não foi resolvida ainda), há a aquisição de elementos novos ao processo, os quais buscam o equilíbrio do sistema. Portanto, a ideia de ciclo fechado não seria adequada. “Esse constante aprimoramento do pensamento e as equilibrações majorantes são mais bem representadas por intermédio de espirais em vez de ciclos” (VALENTE, 2002, p. 28), conforme pode ser observado na Figura 4.5.

Figura 4.5 - Espiral de aprendizagem na interação aprendiz-computador



Fonte: Adaptado de Valente (2002, p.30).

A espiral é iniciada quando o aprendiz elabora um programa, que chamaremos de P1, e faz sua descrição 1. Esta primeira etapa envolve compreensões iniciais sobre o problema e sobre os conhecimentos que possui para resolvê-lo. Após a descrição 1, temos a execução 1 de P1, que nos leva a um primeiro resultado, o R1. Este resultado, por sua vez, é usado como objeto de reflexão 1. Após a reflexão 1, é possível haver a deputação 1 a fim de corrigir algum erro em P1. A depuração 1 gera o P2. A versão P2 incorpora novas informações ou informações reformuladas e inicia um outro nível da espiral. Teremos a descrição 2, depois a execução 2, que gerará um R2 usado na reflexão 2 e, se necessário, realiza-se uma deputação 2 para gerar um P3. E, assim, sucessivamente. Valente (2002) ainda destaca que as ações descrição, execução, reflexão e depuração,

> embora [...] estejam sendo apresentadas de modo independente e sequencial, na prática elas podem ocorrer simultaneamente. Essa separação é feita para compreender o papel de cada uma dessas ações no processo de construção de conhecimento. Por exemplo, durante a execução, à medida que o resultado vai sendo produzido, o aprendiz pode estar refletindo. Portanto, a melhor representação desta espiral poderia ser um re[de]moinho, no qual as ações estão ocorrendo simultaneamente (VALENTE, 2002, p. 30).

Dado o exposto, é possível pensarmos nesse processo da espiral da aprendizagem como propulsora da construção de campos conceituais. Assim, no próximo tópico, discuto a possibilidade de aproximação das teorias.

4.3 Programação de computadores e o processo de conceituação: algumas aproximações

A partir de influências piagetianas, Papert e Vergnaud associam-se à perspectiva da epistemologia genética, na qual o desenvolvimento cognitivo acontece no desequilíbrio constante das estruturas mentais dos sujeitos na interação destes com os objetos. Para Papert, o desequilíbrio se dá no processo de criação dos "micromundos" pela criança com a programação de computadores e, para Vergnaud, acontece na necessidade de resolver as situações na sua vida. Em ambos os casos, por meio de micromundos ou situações, a criança mobiliza-se em busca dos elementos que lhe faltam e, assim, aprende.

Neste sentido, consideramos que a ação de criar um micromundo de Papert se aproxima da situação a ser resolvida pela criança de Vergnaud. No entanto, Vergnaud se diferencia de Papert quando se volta para as situações elaboradas pelos professores com intencionalidades didáticas, pois Papert (2008), apesar de não se colocar contra as atividades dos professores, defende a aprendizagem com o mínimo de ensino, em que a criação das crianças deve ser mais espontânea e livre, no sentido de criar o que quiser.

Em virtude de nossa pesquisa ter relação com conteúdo de Funções Afim, que, por sua vez, constitui-se um conteúdo escolar, temos interesse, portanto, em entender a programação de computadores como um recurso tecnológico para ser usado com fins didáticos. Com isso, nos aproximamos mais da concepção de Vergnaud sobre a atividade escolar, na qual o professor tem um papel fundamental na orientação e na mediação do processo pedagógico.

Também, Vergnaud avança no sentido de valorizar as fontes de referência que o professor tem sobre as situações que pretende introduzir em aula. Tal referência pressupõe uma categorização prévia, no planejamento das aulas, em que o professor analisa os esquemas de pensamento e os invariantes operatórios aos quais os estudantes devem recorrer para resolver determinadas atividades. Isso fará com que sua atividade didática tenha uma referência de aonde quer que os alunos cheguem e onde eles estão. Assim, consegue identificar as lacunas conceituais de forma mais clara e propor novas situações didáticas.

Na espiral de aprendizagem proposta por Valente (2002), quando os estudantes fazem a "descrição" de suas ideias iniciais e hipotéticas por meio dos algoritmos, eles estão organizando sua conduta (objetivo, sequenciamento, identificação das ferramentas do *software* e propriedades) por meio dos esquemas de pensamento. Nesta descrição, empregam diversos conhecimentos (espaço, forma, tempo, ordem etc.). Tais conhecimentos estão concretizados, pois, segundo a Teoria Construcionista, geram uma ação do objeto computacional (Papert se refere à tartaruga) e, segundo a TCC, são os conhecimentos em ação (invariantes operatórios - conceitos e teoremas em ação) dos estudantes.

Ao mesmo tempo, nesta descrição das hipóteses, há, muitas vezes, (ainda mais se tratando de pessoas com espontaneidade) a exteriorização verbal ou gestual, que explicita se o estudante acha a tarefa fácil ou difícil ou se não sabe como fazer. Desse modo, os estudantes estão representando seus esquemas e os invariantes operatórios contidos neles. Com isso, é importante considerar que, para saber o que os estudantes sabem, a análise destas representações deve estar associada a estas duas fontes: código escrito e exteriorização verbal e gestual.

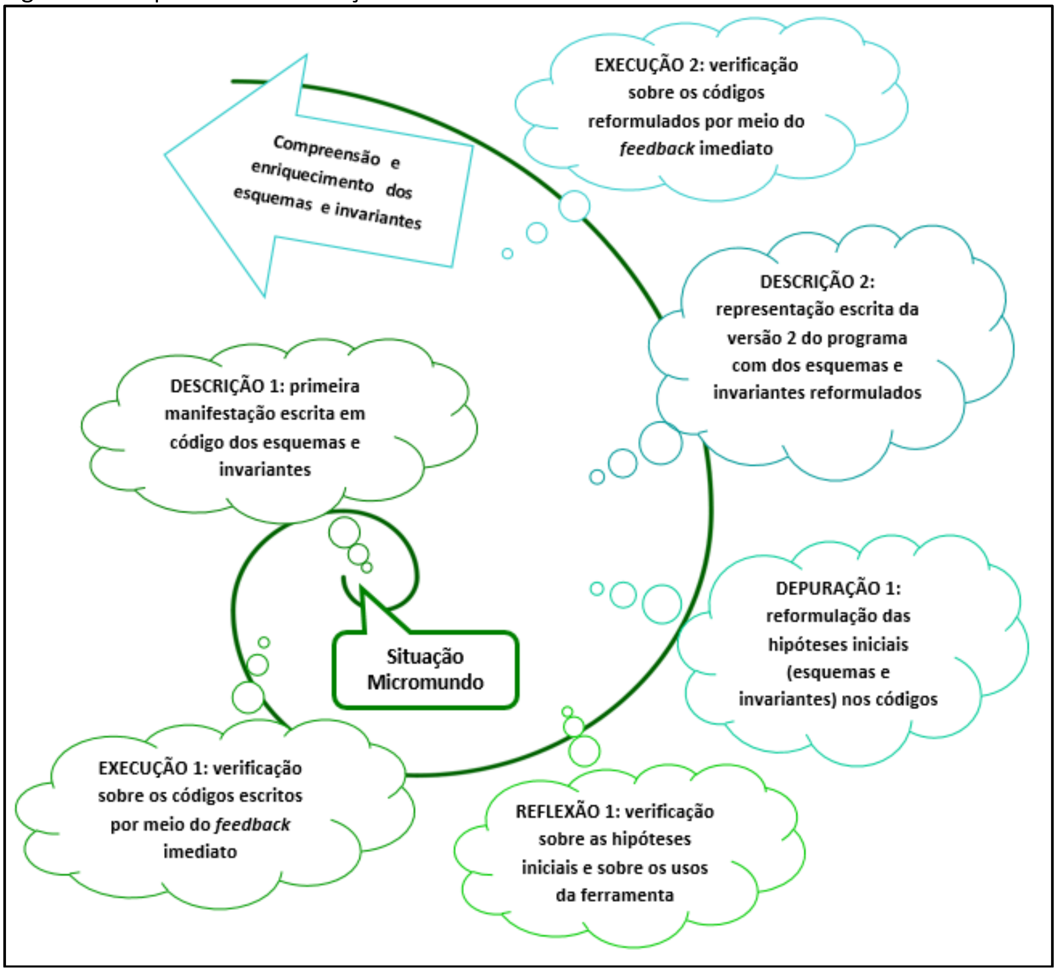
Ainda, quando o estudante olha para o resultado de sua programação após uma primeira execução na tela do computador, invariavelmente, é levado a conferir se o resultado foi satisfatório ou não. Se foi satisfatório, devemos atentar para duas possibilidades: a de que os conhecimentos usados para a resolução da tal tarefa estejam na sua forma operatória e predicativa, em que o sujeito consegue organizar e explicar aquilo que sabe; ou a de que seus conhecimentos foram usados corretamente, mas ainda somente numa forma operatória, em que não há uma compreensão efetiva daquilo que faz, ou seja, sabe fazer, mas não sabe explicar o que fez e por que fez.

Por outro lado, se o resultado de seu algoritmo não teve êxito, ele entra no processo descrito pela espiral de aprendizagem, em que, refletindo sobre o pensamento anteriormente usado, depura o algoritmo (limpa, arruma e melhora), descreve novamente, observa a nova execução e reflete. Neste caso, a atividade desequilibrou as estruturas mentais do estudante fazendo com que ele atue novamente sobre suas hipóteses, ajustando e melhorando seus esquemas.

O erro no processo de programação se torna, portanto, um elemento muito importante para a reformulação dos esquemas e a construção de conceitos em ação e teoremas em ação. Ele dá indícios, a princípio, de que os esquemas do estudante foram desequilibrados pela situação proposta e a busca pelo reequilíbrio propicia o desenvolvimento de uma espiral de aprendizagem, a qual denomino **espiral da conceituação**. A Figura 4.6 representa a aproximação teórica que faço. A partir da situação (micromundo) no centro da figura, vão se desenvolvendo os elementos da espiral em níveis de compreensão diferenciados, o que caracteriza o enriquecimento dos esquemas e dos invariantes operatórios.

Dentro desta espiral, conforme discutido, podemos perceber a explicitação realizada a cada pensamento na forma de código de programação. Os invariantes operatórios são representados e testados no *software*. Neste sentido, acredito que tipo de recurso tecnológico traz uma nova perspectiva para os processos de aprendizagem, quando as crianças tendem a manifestar com mais versatilidade seus pensamentos e seus conhecimentos no ambiente de programação.

Figura 4.6 - Espiral da Conceituação



Fonte: Elaborado pela autora.

Sem a intenção de esgotar esta discussão e considerando as pesquisas que membros do GEPID têm desenvolvido sobre o uso da programação de computadores na Educação, como Martins A. (2012), Pazinato (2014), Batistela (2015), Saugo (2016) e Furini (2017), associar a TCC e as ideias da Teoria Construcionista, no que se refere à programação de computadores, contribui na investigação sobre os conceitos em ação e teoremas em ação que os estudantes manifestam e desenvolvem na atividade de programar. No próximo tópico, passamos a tratar do *software* escolhido para a realização desta investigação.

4.4 O ambiente Scratch

A partir dos estudos de Papert sobre a utilização da linguagem de programação Logo na educação, outros ambientes com esse propósito foram desenvolvidos ao longo dos últimos 50 anos, e o interesse pelo tema continua. Assim, durante o desenvolvimento da pesquisa, foi necessária a definição de um ambiente de programação a ser utilizado na investigação empírica. Diante de várias opções, justifico a escolha pelo ambiente Scratch. Os motivos desta escolha e as características do ambiente são tratados nesse tópico.

A partir de dois estudos, um realizado com colegas do GEPID (LESSA et al., 2016) e outro com estudantes bolsistas do IFRS[30], foi possível analisar diferentes ambientes de programação a fim de estabelecer suas características e suas possibilidades para o ensino de Funções. Assim, ao programar uma situação de Funções Afim nos ambientes com linguagens C, C++ (DevC++), Java (NetBeans), Pascal (PascalZin), Logo (SuperLogo) e em blocos (Alice e Scratch)[31], percebemos que todos os ambientes, com exceção do SuperLogo, que não permitiu a realização da modelagem do problema[32], apresentam um ordenamento de comandos semelhantes, ou seja, é necessário inserir um comando para iniciar o programa seguido de um comando que faça uma pergunta ao usuário ou dê uma ordem, para, então, associar a resposta dada a uma variável. Depois, realiza-se o cálculo com este valor fornecido pelo usuário e retorna-se o resultado para o mesmo. A principal diferença entre eles é a linguagem e a sintaxe.

Segundo Marji (2014, p.21), para se programar com as linguagens em texto, que é o caso de C, C++, Java e Pascal, “[...] você deve dar comandos ao computador no que parece ser uma forma enigmática de inglês", possuindo regras próprias de sintaxe, que a princípio são

---

[30] O relatório do estudo pode ser visualizado em <http://bit.ly/EstudoIFRS>.

[31] Ambientes disponíveis em Alice: <https://www.alice.org/>; Scratch: <https://scratch.mit.edu/>; SuperLogo: <http://www.nied.unicamp.br/?q=content/super-logo-30>; NetBeans: <https://netbeans.org/downloads/>; PascalZin: <http://pascalzimbr.blogspot.com.br/p/apresentacao.html>; DevC++: https://dev-c.softonic.com.br/.

[32] A linguagem Logo permite a programação de movimentos da tartaruga na tela, o que possibilita o trabalho com conceitos relacionados à Geometria Plana.

desafiadoras aos estudantes. Para um estudante aprender a programar com tais linguagens, terá que conhecer, antes de tudo, as palavras exatas para cada comando, a forma como estas palavras devem ser organizadas (sintaxe e semântica) e escrevê-las. O esquecimento de um ponto ou um espaço, por exemplo, compromete todo o programa. A autora apresenta a programação da palavra “Hello!” em três linguagens em textos diferentes, conforme consta no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 - Programação da palavra “Hello!” em três linguagens de programação em texto

Na linguagem Python	`print(‘Hello!’)`
Na linguagem C++	`std::cout<< “Olá!” <<std::endl;`
Na linguagem Java	`System.out.print(“Olá!”);`

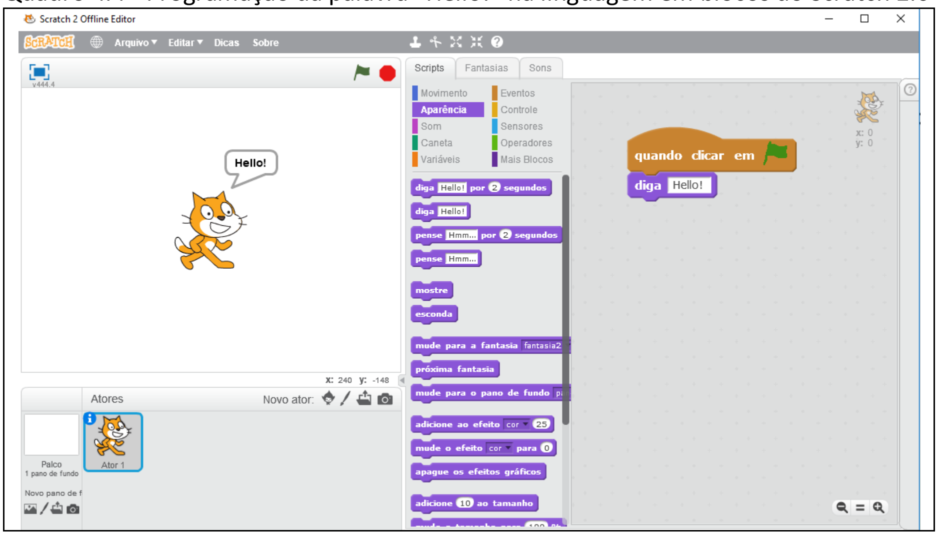
Fonte: Marji (2014, p.23)

Com isso, vejo que a linguagem de programação baseada em blocos avança no sentido da aplicabilidade para a educação em relação às linguagens de programação em texto, uma vez que precisa apenas “arrastar” os comandos (blocos) disponíveis e “montar” a lógica para o algoritmo. O erro de sintaxe é visualmente percebido quando os blocos não podem ser encaixados, como num quebra-cabeças ou no brinquedo LEGO. Assim, o foco do estudante pode estar mais centrado na lógica do algoritmo do que nos comandos a serem usados. Seguindo o mesmo exemplo do Quadro anterior, no Quadro 4.3 e 4.4, mostro como fica a programação de “Hello!” no ambiente Alice 3.2 e Scratch 2.0.

Quadro 4.3 – Programação da palavra “Hello!” na linguagem em blocos do Alice 3.2

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 4.4 - Programação da palavra “Hello!” na linguagem em blocos do Scratch 2.0



Fonte: Elaborado pela autora.

Algumas diferenças percebidas é que no Alice os comandos não foram todos traduzidos para o português e, quando se clica no botão para executar o programa, abre uma janela externa. Além disso, é possível realizar programas em 3D, filmes, animações complexas e bem realistas. No Scratch, todos os comandos estão traduzidos, os blocos estão agrupados por tipo e por cor, facilitando a memorização de onde encontrá-los, a execução acontece na mesma tela, pois possui compilação *just time*, mas as animações são em 2D. Ambos ambientes são interessantes para trabalhar na aula de Matemática, basta delimitar o objetivo que se quer com o ambiente.

Em termos técnicos, seria possível ter optado por qualquer um dos ambientes de linguagem em texto ou blocos para a pesquisa, exceto o SuperLogo, que apresentou limitações para o trabalho com as Funções. Em termos pedagógicos, os dois ambientes de linguagem em blocos são mais interessantes à Educação, conforme já mencionei. Neste sentido, a escolha pelo Scratch em detrimento do Alice justifica-se devido ao meu objetivo com o ambiente ser a modelagem das situações matemáticas que não envolvem, necessariamente, animações complexas e, também, de minha familiaridade com o primeiro, em virtude dos projetos e trabalhos desenvolvidos pelo GEPID[33].

O ambiente de programação Scratch foi lançado em 2007 pelo grupo *Lifelong Kindergarten* no *Media Laboratory* do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), liderado por Mitchel Resnick[34]. A partir de projetos de desenvolvimento de TDICs para envolver as pessoas (especialmente crianças) em experiências de aprendizagens criativas, o grupo cria um ambiente de programação com uma interface colorida, dinâmica e de fácil interação. Segundo Resnik et al. (2009), o principal objetivo do Scratch não é formar programadores profissionais, mas cultivar uma nova geração de pessoas criativas que usam programação para expressar suas ideias. Assim,

> no processo de aprender programação, as pessoas aprendem muitas outras coisas. Eles não estão apenas aprendendo a programar, eles são programando para aprender. Além de aprender ideias matemáticas e computacionais (tais como variáveis e condicionantes), eles também estão aprendendo estratégias para a resolução de problemas, elaboração de projetos e a comunicar ideias. Essas habilidades são úteis não apenas para cientistas da computação, mas para todos, independentemente da idade, interesse ou ocupação (RESNICK, 2009, s/p - Tradução da autora).

Conforme Marques (2009), o termo Scratch provém da técnica de *scratching* utilizada pelos DJs *(disc-jockeys)* do hip-hop, que giram os discos de vinil, dando a sensação de arranhar a música para criar novos sons. Tal palavra foi usada para dar nome ao *software* tendo em vista que oferece a possibilidade de realizar a mistura dos diferentes recursos do ambiente (gráfico, animação, cálculo, texto, música e som) de modo criativo e divertido.

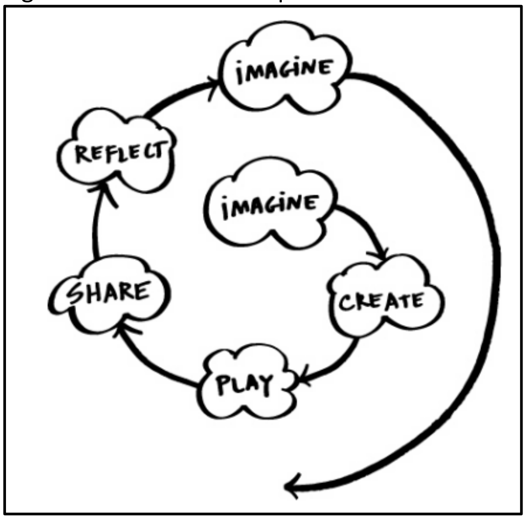
---

[33] Projetos: "Escola de Hackers" e a "Olimpíadas de Programação de Computadores". Dissertações de mestrado: Martins A. (2012), Pazinato (2014), Batistela (2015), Saugo (2016) e Furini (2017). Outros projetos que acompanho: EduScratch do Instituto Politécnico de Setúbal, em Portugal (EDUSCRATCH, 2017).

[34]Fonte disponível em <http://web.media.mit.edu/~mres/>. Acesso em: 22 out. 2017.

Neste sentido, Resnick (2007) propõe um modelo de espiral, inspirado em Papert, que apresenta o processo sequencial de criação do estudante. Tal modelo inicia com “Imagine”, imaginar o que quer fazer, seguido por “Create”, criar o projeto a partir de suas ideias, “Play”, divertir-se com suas criações, “Share”, compartilhar suas ideias com outros e “Reflect”, refletir sobre suas experiências para depois reiniciar o processo, conforme ilustra a Figura 4.7.

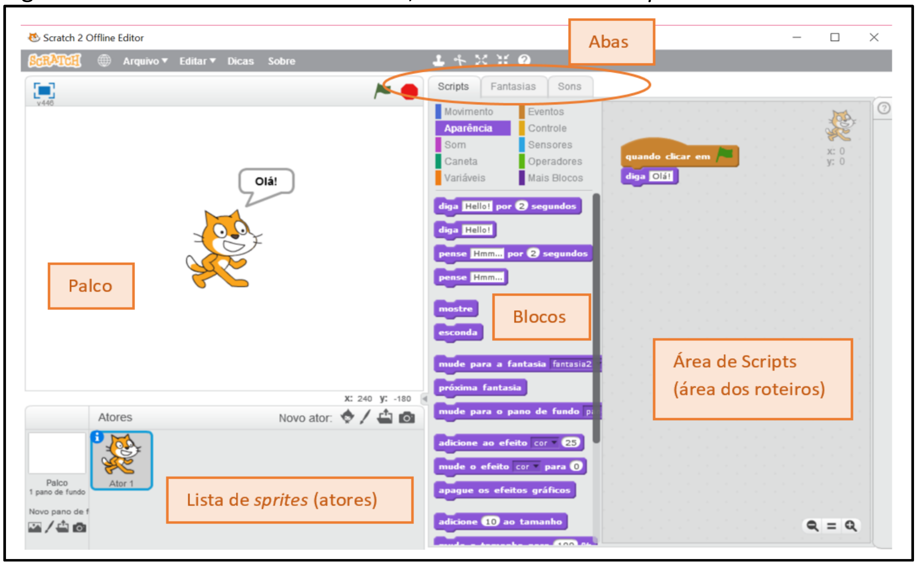
Figura 4.7 - Modelo de Espiral de Resnick



Fonte: Resnick (2007, p. 2).

O Scratch é uma linguagem de programação visual, na qual os comandos são representados por blocos a serem arrastados e encaixados uns nos outros (*building-blocks*) formando empilhamentos verticais ordenados (*stacks*) na implementação dos algoritmos. A Figura 4.8 apresenta a interface do ambiente com três partes: o palco (parte superior esquerda, onde será possível visualizar a execução da programação), a lista de *sprites* (parte inferior esquerda, onde é possível mudar e acrescentar atores ao programa) e a aba *scripts* (os roteiros, à direita), que contém os blocos (de diferentes cores para cada finalidade) e a área de *scripts* (onde serão encaixados os blocos).

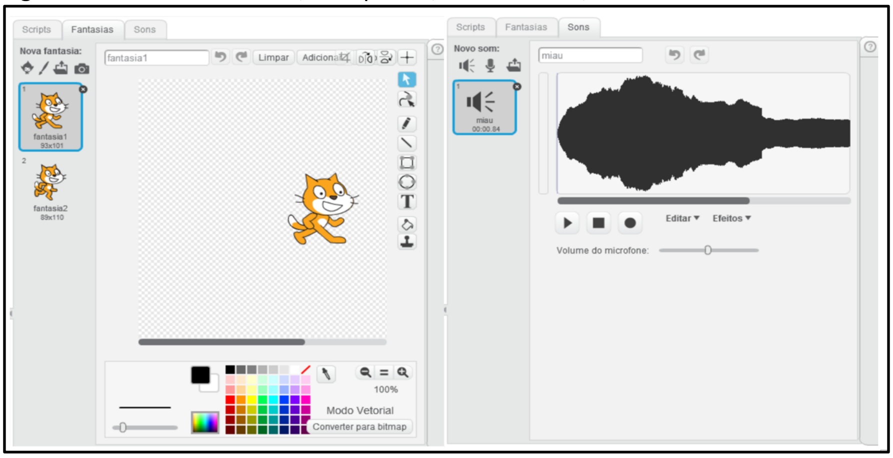
Figura 4.8 - A interface do Scratch 2.0, mostrando a aba *Script*



Fonte: Adaptado de Marji (2014, p.23).

Na aba "Fantasias", é possível modificar algum aspecto do ator. Alguns atores do *software* possuem várias fantasias, o que significa que possuem imagens diferentes de si (posição diferente das pernas, dos braços, etc., que, quando associados por um programa, dão a ideia de movimento ao ator. Podemos também clicar na aba "Sons" e criar ou editar sons que serão inseridos no programa. A Figura 4.9 mostra essas duas abas.

Figura 4.9 - Aba "Fantasias", à esquerda, e aba "Sons", à direita

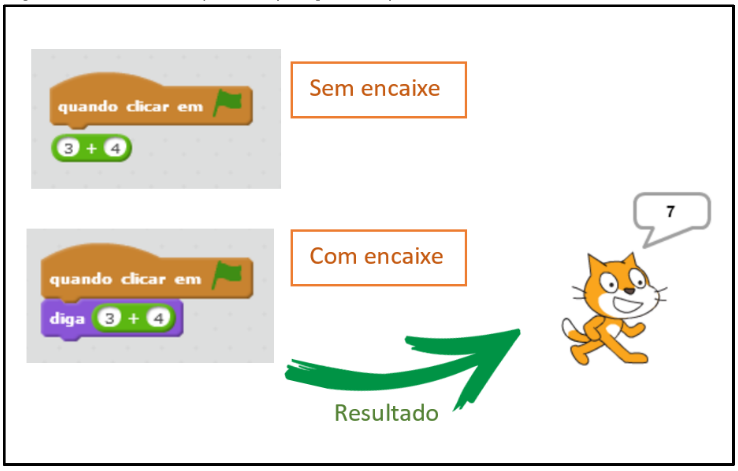


Fonte: Elaborado pela autora.

Quando o encaixe entre dois blocos não é permitido pelo *software* é porque tal junção não faz sentido sintaticamente, evitando os erros deste tipo na programação. Porém, mesmo a programação em Scratch sendo considerada mais acessível se comparada às linguagens de texto, exige também o conhecimento prévio sobre seu funcionamento e as possibilidades que oferece. Saber quando um bloco deve ser encaixado no outro, quais blocos temos à disposição para usar e quais outros recursos existem, necessita de tempo de exploração de suas ferramentas.

Para exemplificar, vamos programar uma simples operação de adição (3 + 4) no Scratch. Para isso, precisaremos de um bloco da aba “Operadores”. Também é necessário um bloco que inicie a programação que buscaremos na aba “Evento”. No entanto, como vemos na Figura 4.10, apenas estes dois blocos não são suficientes para fazer a operação e precisaremos de um bloco que associe os dois e possibilite o encaixe. Usaremos, então, o bloco “diga” da aba “Aparência”, que fará a conexão com o “quando clicar em [bandeira]” com a operação de adição. Vemos, portanto, que a sintaxe do Scratch permite encontrar mais rapidamente a solução para eventuais erros que apareçam.

Figura 4.10 - Exemplo de programa para adicionar dois números



Fonte: Elaborado pela autora.

Diante do exposto, percebemos que a Matemática está intrinsecamente presente na programação em qualquer linguagem. Conceitos como sequência, iteração (*looping*), condicionais, variáveis, lógica booleana, entre outros, são tanto conceitos matemáticos quanto conceitos computacionais. Por fim, é importante ressaltar que o uso do Scratch na pesquisa foi uma opção metodológica para o estudo empírico realizado, mas que não invalida a possibilidade de utilização de outros ambientes (que já existem ou que estão por vir) na investigação das manifestações conceituais sobre Funções Afim.

4.5 Construindo as situações: a contribuição da Teoria dos Estilos de Aprendizagem

As situações sobre Funções Afim mediadas pelo ambiente de programação Scratch foram pensadas com o propósito de constituírem uma estratégia didática, no sentido de servir como instrumento de pesquisa e, também, como base para que professores construam suas próprias propostas, já pensando, portanto, numa contribuição da pesquisa.

Por estratégia didática entendo, a partir de Libâneo (2013), uma organização dos objetivos educacionais e didáticos, do conteúdo a ser ensinado, dos métodos envolvidos na ação de ensinar do professor e na ação de aprender do estudante, e de um aporte teórico. No que se refere à estratégia construída, o objetivo foi propiciar a manifestação de invariantes operatórios do conteúdo das Funções Afim, usando o ambiente de programação Scratch como recurso tecnológico mediador entre o estudante e seus conhecimentos. Os pressupostos teóricos são embasados na Didática da Matemática e na Psicologia Cognitiva proporcionados pela TCC e no uso do computador segundo a Teoria Construcionista.

No estabelecimento dessas situações, ampliamos o conjunto teórico da pesquisa trazendo a Teoria dos Estilos de Aprendizagem como uma referência importante porque embasa as metodologias e as estratégias didático-pedagógicas, com o objetivo de diversificar e de possibilitar caminhos diferenciados, mas com um objetivo final comum de aprendizagem. Ao considerar as diferentes formas como os estudantes estão aprendendo, interagindo e respondendo aos ambientes de aprendizagem, abrem a possibilidade de pensar a didática para desenvolver mais e melhor estas diferentes formas de aprender. Para Barros (2014), os estilos de aprendizagem são definidos como as formas pessoais de processar as informações, os sentimentos e os comportamentos frente às situações de aprendizagem. Alonso, Gallego e Honey (2002) entendem os estilos de aprendizagem como traços cognitivos, afetivos e fisiológicos, e definem quatro tipos: ativo, reflexivo, teórico e pragmático.

De forma sucinta, podemos dizer que pessoas com predominância do estilo ativo entusiasmam-se com tarefas novas, com desafios, com resolução de problemas. Gostam de agir em grupos e, frequentemente, são os protagonistas, os líderes, os dirigentes. Pessoas com o estilo predominantemente reflexivo são grandes observadoras e gostam de analisar alternativas possíveis antes de realizar algo. Geralmente são ponderadas e detalhistas. Pessoas com predominância no estilo teórico geralmente são metódicas, objetivas, perfeccionistas e críticas. Compreendem o mundo pelo estabelecimento de modelos com estruturas lógicas, gostam de analisar e sintetizar. E, por fim, pessoas com o estilo pragmático predominante gostam de experimentar, de ver o resultado prático das ideias, compreendem as coisas por sua aplicabilidade. São realistas e práticas.

Conforme Barros (2009), o objetivo da teoria não é rotular de forma estagnada os indivíduos, mas identificar o estilo de maior predominância na forma de aprender (pois todos temos os quatro estilos, com mais ou menos evidência) e, com isso, direcionar as atividades didáticas no sentido de valorizar o estilo predominante e, ao mesmo tempo, desenvolver os outros estilos. Assim, a intenção é ampliar as capacidades dos sujeitos e suas formas de assimilação dos conteúdos, desenvolvendo todos os estilos de aprendizagem.

Os trabalhos de Nakashima, Barros e Amaral (2009); Barros (2009) e Barros, Alonso e Amaral (2008) trazem ainda uma contribuição importante no que tange às TDICs. Para estes autores, a Teoria dos Estilos de Aprendizagem amplia as possibilidades metodológicas para o desenvolvimento de conteúdos educacionais mediante o uso das tecnologias. Isso significa fazer da tecnologia um potencializador e desenvolvedor de todos os elementos de cada estilo.

Apesar de estar considerando a importância e relevância das ideias dos estilos de aprendizagem, nunca foi objetivo detectar qual o estilo dos sujeitos de pesquisa. Minha intenção no uso da teoria foi de pensar as situações a fim de possibilitar o desenvolvimento de todos os estilos. Isto é, elaborar um instrumento de pesquisa e uma estratégia didática que contemplasse os quatro estilos no sentido de atender ao estilo predominante do estudante e, ao mesmo tempo, desafiá-lo em outros estilos.

Realizar a elaboração das situações didáticas para privilegiar todos os estilos requer pensar em formas de apresentar os problemas matemáticos que possibilitem o desenvolvimento das características de cada um. Conforme Alonso, Gallego e Honey (2002), uma pessoa com estilo ativo pode aprender melhor se é desafiada a fazer algo que nunca fez antes, quando precisa buscar as informações, quando os dados da situação não estão todos explícitos; uma pessoa com estilo reflexivo pode aprender melhor se são exigidos dela a observação, o planejamento da ação, a reflexão antes de agir; uma pessoa com estilo teórico pode aprender melhor se as questões propostas possuem os dados precisos e com finalidades claras, em que consiga estabelecer e modelar as etapas de resolução de forma bem definida; e uma pessoa com o estilo pragmático pode aprender melhor se lhe é proposto fazer algo que tenha uma aplicação prática, que possa experimentar, simular.

Assim, ampliamos nossa categorização sobre as classes de situações feita no Subcapítulo 3.3 para se trabalhar com Funções Afim, incluindo a possibilidade de elaborar situações mais abertas que, em certo sentido, permitem a escolha ou a busca de informações do interesse do estudante viabilizando o trabalho com o estilo ativo, como é o caso das classes D e E. No Quadro 4.6, apresento todas as classes e a ampliação feita.

Quadro 4.5 - Categorização das classes de situações considerando os estilos de aprendizagem

Classes de situações (apresentação dos dados)	Subclasses (questões)
(A) Com expressão algébrica explícita; (B) Sem expressão algébrica explícita, mas com informações sobre os coeficientes da função; (C) Sem expressão algébrica explícita, mas com informações sobre valores de entrada e saída da função: numa tabela, num texto, num gráfico; (D) Informações insuficientes ⇒ busca por dados (E) Sem dados, criar a situação ⇒ usar a criatividade	(i) Modelar a função (ii) Achar y a partir de x (iii) Achar x a partir de y ⇒ reversibilidade (iv) Propriedades (v) Diferentes formas de representações

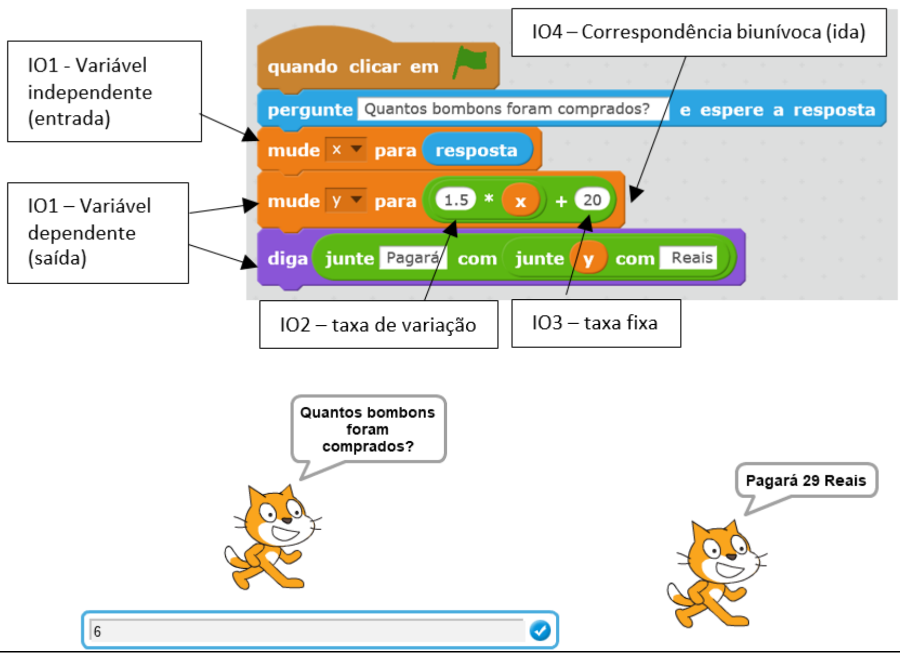
Fonte: Elaborado pela autora.

Neste sentido, considero que a realização de situações conforme as classes estabelecidas juntamente com a programação de computadores tende a viabilizar que todos os estilos de aprendizagem sejam explorados. Quando o estudante precisa resolver alguma situação com a programação, ele poderá criar e inventar algo que nunca fez antes (estilo ativo), planejar suas ações para esta criação (estilo reflexivo), estabelecer a ordem e organização dos passos, das etapas e dos códigos a serem usados (estilo teórico), e concretizar digitalmente suas ideias abstratas num programa ou simulação (estilo pragmático).

Para exemplificar, no Quadro 4.6 apresento a situação que foi analisada no Subcapítulo 3.3 com algumas adaptações para ser desenvolvida com o Scratch. Nela, aponto as classes e subclasses, os estilos, a possível resolução no Scratch e os invariantes operatórios associados.

Quadro 4.6 - Situação adaptada ao Scratch

SITUAÇÃO
Várias pessoas foram ao cinema assistir *Star Wars: os últimos Jedi* e levaram dinheiro para comprar o ingresso e bebidas. Sabe-se que uma delas gastou R$ 21,50 com seu ingresso e um bombom, enquanto outra gastou R$ 23,00 com seu ingresso e dois bombons. Crie um programa no Scratch que ajude a calcular o preço total pago na ida ao cinema a partir do número de bombons comprados. Comprando 6 bombons, quanto deve ser pago?
Classificação das situações: C, (i) e (ii)
Estilos de Aprendizagem: Ativo – permite criar um programa que represente o modelo matemático; Reflexivo – permite elaborar hipóteses e planejamentos de como criar o programa; Teórico – permite agir de forma organizada e por etapas; Pragmático – permite concretizar sua ideia por meio da dinâmica do programa.
Possível resolução:
A modelagem da lei da função pode ser feita por cálculo mental, cálculo manual com sistemas de equações, conforme foi feito no Subcapítulo 3.3 ou, ainda, é possível estabelecer um programa para encontrar os coeficientes de Funções Afim. Isso dependerá de cada estudante.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa situação analisada representa apenas um exemplo de atividade possível de ser proposta na estratégia didática e apresenta apenas uma forma de resolução e, portanto, uma forma de representação dos invariantes operatórios. Assim, dependendo do nível de compreensão e de maturidade que os estudantes possuam do conteúdo e da ferramenta computacional, representações diferentes e variadas poderão aparecer.

É possível considerar que estudantes acostumados com os cálculos manuais das aulas de Matemática usem dessa estratégia para resolver a situação antes de criar o programa, o que é bem provável que aconteça no caso do exemplo dado anteriormente, o qual exige noções um pouco mais sofisticadas para modelar a Função. Sendo assim, é importante considerar que a programação não impede a utilização dos recursos do cálculo mental e do cálculo algébrico manual para a resolução de uma atividade; muito pelo contrário, a programação pode ajudar, inclusive, numa melhor organização das ideias postas no papel.

Por fim, neste tópico pude desenvolver como as situações estão sendo pensadas e elaboradas para essa pesquisa. No próximo capítulo, dos procedimentos metodológicos, apresento com mais detalhes as cinco situações que compõem o instrumento de pesquisa.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO DE CAMPO

[...] o método não é o caminho, mas a caminhada, ou seja, a narrativa do "como", a descrição do que foi feito para tornar descoberto o encoberto (SILVA, 2010, p. 37).

Para o rigor metodológico da pesquisa, mais importante do que nomear o tipo de método usado, é descrever de forma clara e detalhada o percurso trilhado, apresentando os objetivos e as justificativas de cada opção feita (ANDRÉ, 2013). A partir de uma perspectiva de pesquisa qualitativa, em que os dados produzidos não são baseados em valores quantificáveis, realizo um esforço em integrar alguns instrumentos metodológicos, visando uma maior objetividade na produção dos dados para "descobrir" o que estava encoberto.

Neste capítulo, apresento as escolhas metodológicas em quatro tópicos. No primeiro, revelo de forma breve os resultados da experiência com o estudo piloto, apontando o que foi possível repensar metodologicamente. No segundo, faço a caracterização dos sujeitos da pesquisa, explicitando o método e o instrumento de seleção. No terceiro tópico, abordo os métodos e os instrumentos usados no estudo efetivo. Por fim, apresento os métodos de organização dos dados e de análise produzidos no estudo empírico.

5.1 Estudo piloto

O estudo de campo piloto[35], realizado em dezembro de 2016, foi uma experiência rica que contribuiu consideravelmente para o planejamento e a realização do estudo de campo efetivo. Para tanto, realizei uma intervenção didática com dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus* Erechim, os quais cursavam de forma concomitante o Ensino Médio em escola pública, mas analisei os dados de somente um deles.

Nessa intervenção, usei dois instrumentos metodológicos: 1) a aplicação de situações sobre Funções Afim no ambiente de programação Scratch, de forma simultânea aos dois estudantes em uma mesma sala, objetivando proporcionar um ambiente propício para que os

[35] Mais informações em: <http://bit.ly/EstudoPiloto>. Acesso em: 17 jul. 2018.

invariantes operatórios se manifestassem; 2) a realização de perguntas ao longo da aplicação numa aproximação ao método clínico piagetiano (DELVAL, 2002; CARRAHER, 1998), objetivando compreender os processos de representação e de tomada de consciência (PIAGET, 1977, 1978) – conceito que foi substituído por “compreensão” posteriormente – dos estudantes sobre os conceitos matemáticos envolvidos nas situações.

Nesse estudo, foi possível ver, nas representações que manifestavam, os teoremas em ação referentes ao conteúdo das Funções Afim. Porém, a investigação sobre a tomada de consciência ficou prejudicada, pois a técnica usada não foi suficiente para observar isso, ou seja, eu não sabia sobre os conhecimentos prévios que os estudantes traziam, e a aplicação do método clínico não foi adequada.

Mesmo que não tenha sido mantida a ideia de investigar a tomada de consciência, a investigação de compreensões sobre os conceitos também requer conhecer os detalhes das elaborações que os estudantes fazem e como eles explicitam verbalmente suas ideias, ou seja, requer investigar os conhecimentos operatórios e predicativos (VERGNAUD, 1996). Neste sentido, torna-se igualmente importante realizar um diagnóstico para termos um panorama inicial de seus invariantes operatórios.

O trabalho com sujeitos do estágio operatório formal mostrou-se desafiador, pois, segundo Silva (2009), eles manifestam muito seus conhecimentos, suas conceituações e tendem a (re)elaborar suas ideias muito mais rapidamente do que uma criança. Isso requer questionamentos mais direcionados sobre os invariantes manifestados no momento da atividade e, portanto, requer a atenção total do pesquisador sobre suas produções.

Neste sentido, meus questionamentos e intervenções durante a atividade poderiam ter sido melhor realizados e aproveitados, no sentido de captar com mais qualidade o que os estudantes pensavam sobre sua ação. Assim, foi preciso reorganizar o método de entrevista para o estudo efetivo, elaborando um roteiro de orientação para as perguntas que devem ser feitas para extrair o máximo de informações sobre o que eles compreendem dos conhecimentos que põem em ação na atividade de programar.

Além disso, quando optei por trabalhar com dois estudantes ao mesmo tempo, a interação entre eles possibilitou que um influenciasse a resposta do outro e até mesmo seu raciocínio. Isso mostrou ser um limite da escolha feita, tendo em vista que a investigação sobre as elaborações conceituais precisaria ser individualizada, auxiliada apenas pelo ambiente de programação e pelas intervenções com os questionamentos. Com isso, na pesquisa empírica efetiva, optei por investigar os estudantes individualmente.

Outro aspecto considerado foi o número de vinte invariantes operatórios que havia categorizado previamente sobre as Funções Afim. Ter um número elevado de conceitos a serem observados e questionados dificultou minha percepção sobre cada um deles. Com isso, considerei importante diminuir o número de invariantes operatórios e focar nos quatro invariantes que julgo mais significativos na compreensão do conceito de Função Afim, conforme pode ser visto no Subcapítulo 3.3.

A partir destas constatações, foi necessário repensar alguns métodos e buscar, em novas fontes teórico-metodológicas, elementos que ajudassem a constituir um novo estudo empírico.

5.2 Os sujeitos da pesquisa

O estudo empírico aconteceu em maio e junho de 2018 e contou com a participação de três estudantes, Laís (17 anos), Alan (16 anos) e João (16 anos)[36], do terceiro semestre do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus Erechim*, ingressantes em 2017, que cursavam concomitantemente a 2ª série do Ensino Médio em escola pública do município de Erechim/RS. A análise dos resultados das atividades com a estudante Laís, no entanto, revelou que os instrumentos de pesquisa precisavam ainda de ajustes, principalmente no que se referia às perguntas realizadas na observação interativa. Como a aplicação das situações no Scratch com Laís aconteceu antes da realização da pesquisa com os dois meninos, foi possível melhorar os métodos a partir da análise desse material. Diante disso, apresento os instrumentos usados e as análises feitas a partir dos dois estudantes, Alan e João.

As justificativas para a escolha por dois estudantes do Ensino Médio e, ao mesmo tempo, do Curso Técnico em Informática estão listadas a seguir:

- **Estudantes da 2ª série do Ensino Médio:** Para que os estudantes pudessem compreender minimamente as situações de aprendizagem que foram elaboradas,

[36] Os nomes dos estudantes são fictícios.

seria necessário que eles tivessem uma noção do conteúdo de Funções Afim, que reconhecessem algumas notações e que fossem capazes de pensamentos do nível das operações formais, ou seja, que pudessem raciocinar sobre hipóteses e deduções. Neste sentido, estudantes da 2ª série do Ensino Médio tinham mais chances de atender esses critérios, tendo em vista que, a partir dos currículos das escolas públicas, já teriam estudado o conteúdo no ano letivo anterior. Se escolhêssemos estudantes da 1ª série do EM, as chances de não terem estudado ainda as Funções no mês de maio e junho seria mais alta.

- **Estudantes do Curso Técnico em informática no IFRS – *Campus* Erechim:** o trabalho com estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS motiva-se por três fatos: (i) pela pré-disposição que (supostamente) apresentam ao uso de TDICs, tentando evitar o "ruído"[37] que possa ser gerado por estudantes que não estão habituados a usar tecnologia; (ii) por terem cursado disciplinas do Curso sobre lógica de programação e linguagens de programação durante o ano de 2017; (iii) pela minha aproximação com a Instituição e a facilidade de acesso a estes estudantes.

- **Dois sujeitos de pesquisa:** dada a característica da pesquisa em investigar os sujeitos na sua individualidade e considerando a complexidade das elaborações conceituais, uma análise minuciosa das representações e compreensões só seria possível, dentro do tempo que eu dispunha, com um número reduzido de estudantes. Assim, visando contemplar estudantes com níveis diferentes de desempenho matemático[38], mas todos com elementos conceituais suficientes para compreender as situações propostas, optei por selecionar três estudantes. No entanto, conforme já foi dito, acabo por realizar as análises com dois estudantes.

[37] Por "ruído" entendo o fato de estudantes que não estão acostumados a usar tecnologia não conseguirem acompanhar as situações propostas do estudo empírico da pesquisa.

[38] A opção por dois estudantes de níveis diferentes de desempenho matemático foi feita com o intuito de verificar se isso poderia influenciar ou não na manifestação dos invariantes operatórios. Porém, tal variável não teve influência alguma nos resultados.

A seleção dos estudantes passou por um processo que inclui uma ambientação da turma com o Scratch e, posteriormente, a aplicação de um teste de Matemática e de programação. Nos itens a seguir descrevo esse processo.

5.2.1 Ambientação sobre o Scratch com a turma de estudantes

Antes de selecionar os estudantes para o estudo empírico, realizei uma **Ambientação sobre o Scratch** em novembro de 2017 com toda a turma ingressante em 2017 do Curso Técnico em Informática, que objetivou apresentar a programação em blocos do Scratch, suas principais ferramentas e algumas construções que o ambiente possibilita para, posteriormente, fazer a seleção. Também, como eu não ministrava aulas para a turma e eles não me conheciam, a ambientação visou minha aproximação com os estudantes e o estabelecimento de um vínculo de confiança e de legitimidade para a realização da pesquisa. Mesmo que este momento não tenha sido utilizado para produção de dados e análises, julgo importante retratá-lo aqui.

Foram três encontros de ambientação, de duas horas cada, na disciplina de Linguagens de Programação do segundo semestre letivo de 2017 do Curso Técnico já mencionado. Em cada encontro propus atividades de reconhecimento e uso das ferramentas do *software*, desde movimentos simples dos atores até a criação de pequenos jogos. O roteiro do que foi realizado e as atividades propostas, juntamente com suas resoluções, estão no Apêndice 1.

5.2.2 Seleção dos estudantes

Na seleção dos estudantes, apliquei o que chamo de **Teste Diagnóstico** (Apêndice 2) com toda a turma. Tal teste teve dupla função nesta pesquisa. Serviu para a seleção dos estudantes que participaram do estudo efetivo e, também, como instrumento para diagnosticar a existência ou ausência de conhecimentos sobre invariantes operatórios das Funções Afim e possibilitar uma melhor análise sobre suas manifestações no Scratch.

As três situações matemáticas do instrumento foram elaboradas a partir das classificações realizadas no Subcapítulo 3.3, tomando como referência o que é proposto nos livros didáticos analisados, com o objetivo que contemplar as diferentes classes de situações. Além disso, fiz um exercício de pensar sobre os Estilos de Aprendizagem (BARROS, 2009) que cada situação abrange e considerei que tais situações abrangem mais os estilos teórico e reflexivo, pois exigem competências relacionadas à análise e observação (reflexivo), quando precisam interpretar o problema, observar os dados e planejar a estratégia, como também à lógica e objetividade (teórico), quando precisam organizar a execução do que foi planejado. Já competências relacionadas à criação e descobertas (ativo) e, também, à aplicação prática e concreta (pragmático) são mais contempladas na atividade de programação.

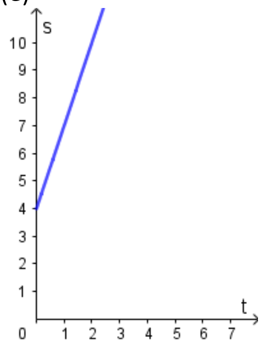
Também, realizei uma sistematização em cada questão sobre os principais invariantes operatórios associados nas resoluções, com o intuito de verificar se as questões realmente contemplam os conceitos que queria analisar e, também, de organizar o material para as análises posteriores. Por fim, a situação sobre programação foi elaborada a partir dos comandos da programação trabalhados na Ambientação e dos comandos que seriam usados nas situações com o Scratch. Nos Quadros 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, apresento as situações de matemática e a atividade de programação elaboradas e a análise que faço de cada uma, segundo as classes de situações e os invariantes operatórios.

Quadro 5.1 - Situação 1 do Teste Diagnóstico (SD1)

(continua)

SITUAÇÃO 1 - DESLOCAMENTO DE UM CORPO	
Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática s = 3t + 4, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos). Responda: a) Qual a posição do corpo no instante 30 segundos? b) Qual o instante em que o corpo atinge a posição de 150 metros? c) Qual a posição inicial do corpo antes de iniciar o movimento? c) Qual é o deslocamento feito para cada instante que passa? Por quê? d) Construa o gráfico desta função.	
Classificação das situações: Classe A, subclasses ii, iii, iv e v.	
Possíveis resoluções:	**Invariantes operatórios associados:**
(a) S(30) = 3*30+4 = 90+4 = 94	IO1, IO4 (ida)
(b) 150 = 3t + 4 → 3t = 150 - 4 → t = 146/3 → t = 48,67 segundos	IO1, IO4(volta)
(c) s(0) = 4 metros	IO1, IO3
(d) A cada instante o corpo se movimenta 3 metros porque: t = 0 → s = 4 t = 1 → s = 7 t = 2 → s = 10	IO1, IO2

(conclusão)

(e) 	IO1, IO2, IO3, IO4(ida)

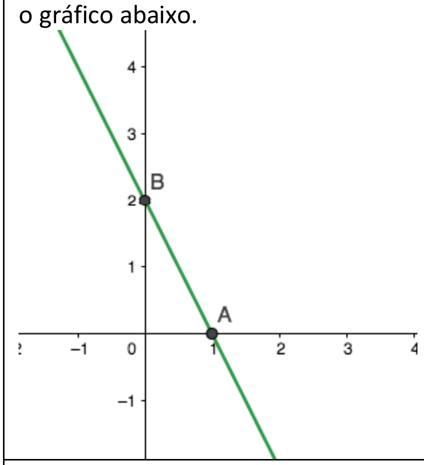
Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.2 - Situação 2 do Teste Diagnóstico (SD2)

SITUAÇÃO 2 - PARQUE DE DIVERSÕES	
Um parque de diversões cobra R$ 15,00 de entrada e R$ 8,00 para utilizar cada um dos brinquedos. a) Estabeleça a Função Afim que relaciona o valor pago e o número de brinquedos usados. b) Se uma pessoa usar 7 brinquedos, pagará quanto? c) Com R$ 100,00 é possível usar quantos brinquedos?	
Classificação das situações: Classe B, subclasses i, ii e iii.	
Possíveis resoluções:	**Invariantes operatórios que podem ser associados**
(a) f(x) = 8x + 15	IO1, IO2, IO3
(b) y = 8*7 + 15 = 56 + 15 = 71 Pagará R$ 71,00	IO1, IO4(ida)
(c) 100 = 8x + 15 → 8x = 85 → x = 10,6 Usará 10 brinquedos	IO1, IO4 (volta)

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.3 - Situação 3 do Teste Diagnóstico

SITUAÇÃO 3 - QUAL A LEI DA FUNÇÃO?	
O gráfico abaixo representa uma Função Afim, R → R, f(x) = ax + b. Estabeleça a lei da função que representa o gráfico abaixo. 	
Classificação da situação: Classe C, subclasse i	
Possível resolução:	**Invariantes operatórios que podem ser associados**
(1, 0) → 0 = 1*a + b → 0 = a + b → a = -b (0, 2) → 2 = 0*a + b → 2 = b Então a = -2 f(x) = -2x + 2	Procedimentos algébricos para encontrar os coeficientes a e b da expressão analítica da Função. IO1, IO2 e IO3.

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.4 – Atividade de Programação do Teste Diagnóstico

ATIVIDADE DE PROGRAMAÇÃO
Crie no Scratch um programa que utilize, no mínimo, os comandos abaixo. Use sua criatividade. • variáveis (laranja) • sensores: pergunte e espere a resposta (azul claro) • operadores (verde claro) • movimentos (azul escuro) • aparência (roxo)

Fonte: Elaborado pela autora.

Na seleção dos estudantes, é importante que eles possuam um bom conhecimento do recurso tecnológico e que possuam conhecimentos suficientes para compreender as situações sobre Funções Afim que serão propostas mais adiante. Neste caso, é preciso “[...] escolher sujeitos que se prevê que terão possibilidades de compreender a tarefa sem resolvê-la imediatamente” (INHELDER; CAPRONA, 1996). A tarefa não pode ser muito fácil a ponto de sua resolução ser automatizada e não se constituir um desafio que possibilite pensar sobre o que está fazendo e nem muito difícil a ponto de não conseguir mobilizar noções por ser algo muito além do que pode compreender.

Neste sentido, após corrigir e pontuar o teste, selecionei três estudantes que foram bem na atividade de programação (pontuação acima de 70% no programa feito), sendo um estudante com desempenho bom em matemática (acima de 80% de acertos) e dois com desempenho regular em matemática (entre 60% e 80% de acertos)[39]. Com a não utilização dos dados referentes à estudante Laís, que apresentou desempenho regular em matemática, a pesquisa contou, então, com o Alan, de desempenho bom, e o João, de desempenho regular.

Após o aceite dos estudantes e de seus responsáveis[40], marcamos as datas dos encontros, que só poderiam acontecer nas sextas-feiras à tarde, pois era o único turno que eles tinham livre. A ordem de realização da atividade empírica foi: Laís, no dia 25 de maio; Alan, no dia 8 de junho; e João, no dia 15 de junho.

Assim, cada encontro foi composto por dois momentos. Primeiramente, tivemos uma conversa sobre as resoluções do estudante no Teste Diagnóstico, a fim de estabelecer o

---

[39] A pontuação para a programação foi feita da seguinte forma: cada um dos cinco comandos solicitados que foram usados valeu 1,5 ponto e a funcionalidade do programa valeu 2,5 pontos, totalizando 10 pontos. A pontuação da matemática foi feita da seguinte forma: cada item da situação 1 e 2 valeu um ponto, portanto, na situação 1, tem-se 5 pontos, na situação 2, três pontos, a situação 3 valeu 2 pontos, totalizando 10 pontos.

[40] O modelo do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais e do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido para os estudantes estão nos Apêndices 3 e 4.

diagnóstico e, posteriormente, propus a realização das situações sobre Funções Afim no Scratch. Descrevo melhor esses momentos nos itens que seguem.

5.3 Estudo efetivo

Esta foi a etapa empírica mais importante desta pesquisa, pois a partir dela foi possível produzir o material de análise. O estudo empírico aconteceu em um encontro de 3h30min com cada estudante, no qual realizei, primeiramente, uma entrevista a partir do Teste Diagnóstico que o estudante já havia feito, a qual chamo de **Entrevista Diagnóstica**, cujo objetivo foi estabelecer um panorama do que ele sabe sobre os conceitos matemáticos. Em seguida, realizei a atividade no ambiente de programação, em que o estudante soluciona as **Situações com o Scratch,** e eu fiz as intervenções sob o método da **Observação Interativa**.

5.3.1 A entrevista diagnóstica

Para estabelecer um diagnóstico sobre as representações e as compreensões de invariantes operatórios das Funções Afim de cada estudante, foi necessário perguntar a eles sobre as estratégias e os conceitos manifestados no Teste Diagnóstico usado na seleção. Neste sentido, após a experiência com a Laís, elaborei um roteiro de orientação para as perguntas a serem feitas a Alan e João no momento da entrevista, no sentido de orientar minha intervenção e não deixar de perguntar nada que pudesse contribuir com a pesquisa. Fiz um **Roteiro Diagnóstico** para cada estudante (Apêndices 5 e 6), tendo em vista os diferentes modos de resoluções que apresentaram, mas, no momento da realização da entrevista, outras questões surgiam e algumas perguntas do roteiro deixavam de ser importantes. A entrevista foi gravada e, posteriormente, transcrita. A transcrição e os cálculos escritos dos estudantes geraram os **Protocolos de Diagnóstico** que fazem parte dos materiais de análise.

5.3.2 Situações com o Scratch

O instrumento denominado **Situações com o Scratch** (Apêndice 7)[41] teve por objetivo proporcionar situações em que o estudante pudesse manifestar seus teoremas em ação relacionados ao Campo Conceitual das Funções Afim através da programação de computadores. Tal instrumento foi elaborado a partir das categorizações feitas no Subcapítulo 3.3, tanto sobre as classes de situações como sobre os invariantes operatórios, assim como fiz no Teste Diagnóstico. No entanto, no processo de elaboração do instrumento, incluí a intenção de contemplar o maior número possível de Estilos de Aprendizagem em cada situação, objetivando criar um instrumento que favoreça o desenvolvimento de todos os Estilos e, portanto, que oportunize o aparecimento de mais teoremas em ação.

Nos Quadros 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, trago uma análise das situações elaboradas com a classificação quanto ao tipo de situação e quanto às possíveis resoluções e aos invariantes operatórios. Em relação aos Estilos de Aprendizagem, considero que as situações contemplam a aplicação e o desenvolvimento dos quatro estilos (cada estilo recebendo maior ou menor ênfase dependendo do estudante) quando possibilitam: (i) a construção de um programa, um produto, um objeto que tenha alguma funcionalidade e que concretize as ideias abstratas – **estilo pragmático**; (ii) a criação de algo novo, a partir das relações e associações entre a matemática e a programação que nunca fez antes, exigindo a busca de novas informações e relações – **estilo ativo**; (iii) a realização de um plano de ação para seu programa, o que fazer e como fazer – **estilo reflexivo**; (iv) a operacionalização do plano, a execução das ideias – **estilo teórico**.

Quadro 5.5 - Situação 1 de Programação (SP1)

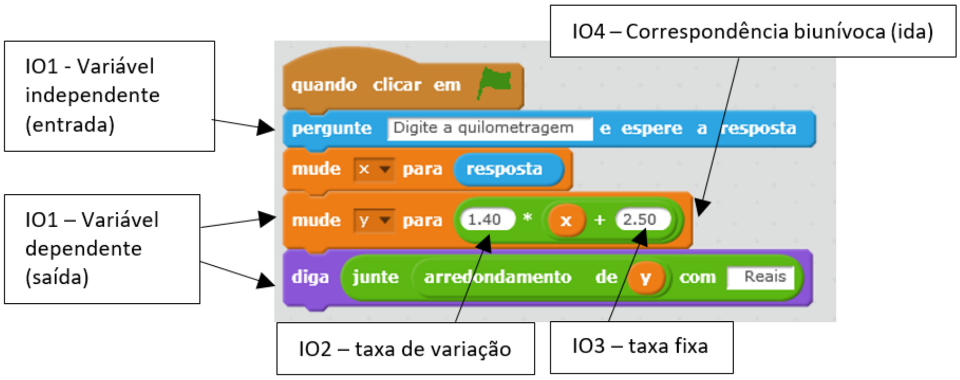
(continua)

SITUAÇÃO 1 - ANDANDO DE TAXI
Numa certa cidade, o cálculo para saber quanto custará uma corrida de taxi é feito a partir da fórmula P = 2,50 + 1,40q, em que q é a quantidade de quilômetros e P é o preço final da corrida. a) Crie um programa no Scratch no qual um usuário qualquer deste programa possa inserir as quilometragens percorridas em suas viagens e obter o valor gasto em cada uma. b) Vamos supor agora que uma pessoa tenha um certo valor em Reais, por exemplo, R$ 80,00 e deseja saber quantos quilômetros ela poderia percorrer nesta cidade. Como o Scratch poderia ajudar estas pessoas que querem saber a quilometragem que poderá ser percorrida a partir do dinheiro que elas possuem?
Classificação das situações: Classe A, subclasses i, ii, iii e iv
Possíveis resoluções no Scratch e os invariantes operatórios associados:

[41] Os arquivos do Scratch como solução das situações estão disponíveis em: <http://bit.ly/ArqSitScratch>. Acesso em: 17 jul. 2018.

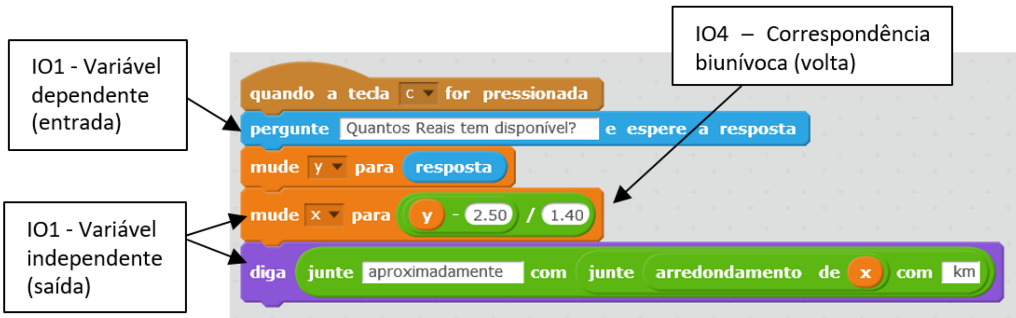
(conclusão)

a)

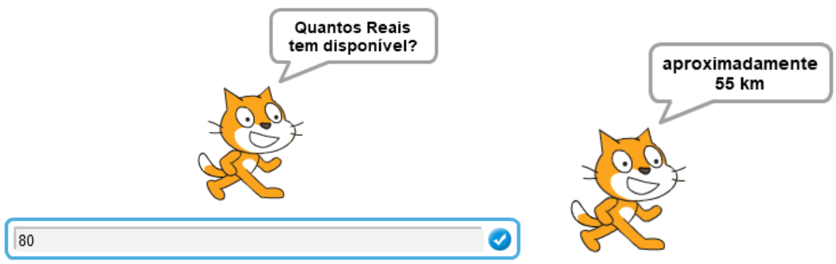


Testando para 50 km:

b)



Testando com R$80,00.



Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.6 - Situação 2 de Programação (SP2)

SITUAÇÃO 2 - SALÁRIO

A remuneração mensal dos funcionários em diversos estabelecimentos comerciais do estado do Rio Grande do Sul é composta de duas partes. Uma parte fixa, referente ao piso regional do comércio (salário base) de R$ 1.150,00, e uma parte variável, que se constitui de 20% do valor total das vendas do mês anterior deste funcionário.

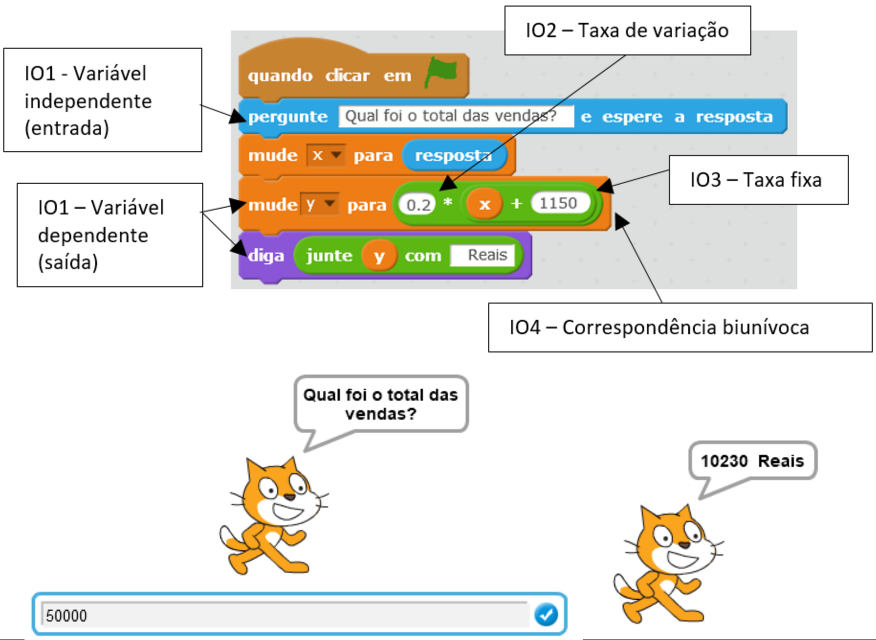
a) Elabore no Scratch um programa para que os funcionários destas lojas possam simular seu salário mensal a partir da inserção do total das suas vendas no mês. Teste para uma venda de R$ 50.000,00 no mês.

b) Um funcionário precisa receber no mês de junho um salário mínimo de R$ 7.500,00 para conseguir pagar suas contas. Dessa forma, quanto precisará ser o seu total de venda no mês anterior? Faça um programa no Scratch que responda a essa pergunta e que possibilite calcular o valor de vendas mensais a partir do salário desejado.

Classificação das situações: Classe B, subclasses i, ii e iii.

Possíveis resoluções no Scratch e os invariantes operatórios associados

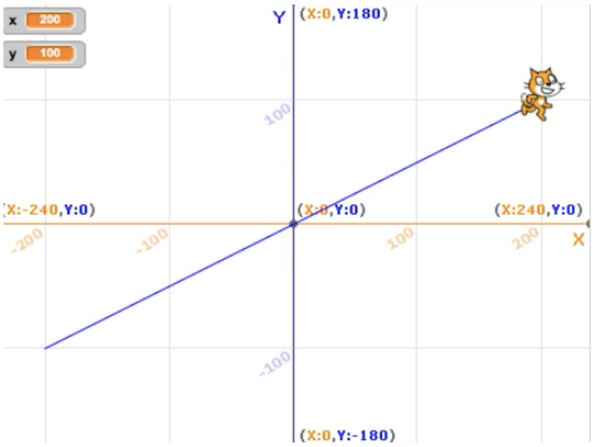
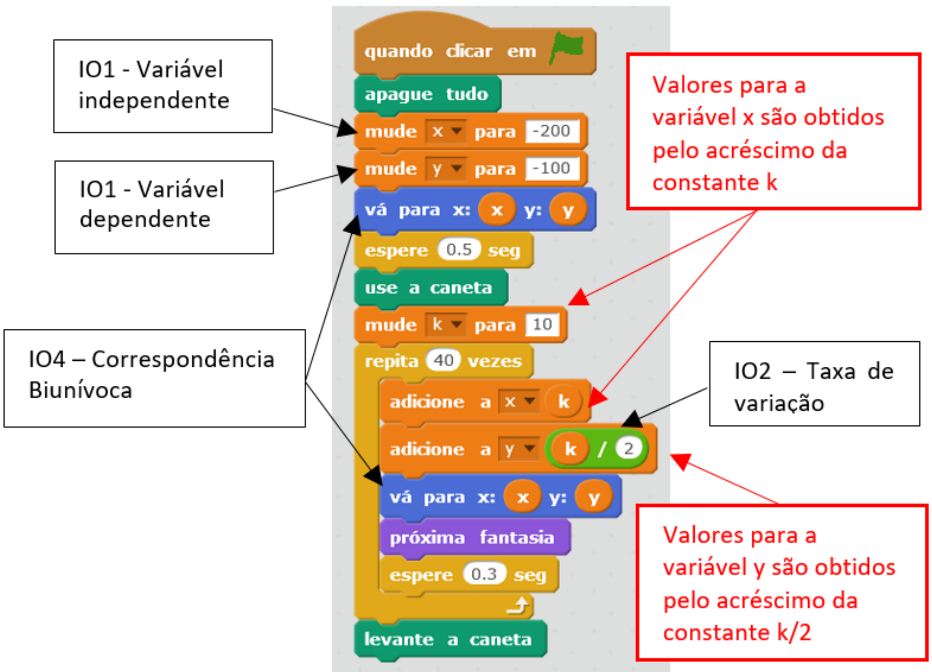
a)



b)

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.7 - Situação 3 de Programação (SP3)

SITUAÇÃO 3 - QUAL É O SEGREDO
A imagem abaixo, produzida no Scratch, representa uma trajetória retilínea que o personagem desenha no plano cartesiano. Visualize a execução do programa no vídeo disponibilizado em <https://goo.gl/z2Ht89> e, a partir disso:  a) Encontre o modelo matemático por trás do movimento. b) Reproduza esta construção no Scratch, considerando as modificações nas variáveis x e y a cada movimento do personagem. Sugestão: inicie em (-200, -100).
Classificação das situações: Classe C, subclasse i
Possíveis resoluções no Scratch e os invariantes operatórios associados
a) $y = ax + b$ $Inserindo\ o\ ponto\ (0,0)\ no\ modelo, temos:\ 0 = 0 * a + b \rightarrow b = 0$ $Inserindo\ o\ ponto\ (200,100) no\ modelo, temos: 100 = 200a + b$ $Resolvendo\ o\ sistema: \begin{cases} b = 0 \\ 200a + b = 100 \end{cases} \rightarrow\ a = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $Resposta: y = 0{,}5x$ Procedimentos algébricos para encontrar os coeficientes a e b da expressão analítica da Função. Envolve o IO1, IO2 e IO3.
b) 

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.8 - Situação 4 de Programação (SP4)

(continua)

SITUAÇÃO 4 - RESTAURANTE

Em certos restaurantes, há duas modalidades de serviços prestados para o almoço:

1 - Buffet Livre: em que é cobrada uma taxa por pessoa, independente do seu consumo.

2 - Buffet a quilo: em que é estipulado um preço por quilograma e o valor cobrado será proporcional ao consumo.

a) Elabore um programa no Scratch que auxilie um usuário a saber quanto custou seu prato de comida, em qualquer restaurante desse tipo, e qual modalidade foi usada.

b) Elabore outro programa no Scratch que nos ajude a descobrir o valor máximo a ser consumido para ser vantajoso o Buffet a Quilo, em qualquer restaurante desse tipo.

Classificação das situações: Classe D, subclasses i, ii e iv

Possíveis resoluções no Scratch e os invariantes operatórios associados

a)

Busca por valores de buffets.

Exemplo:

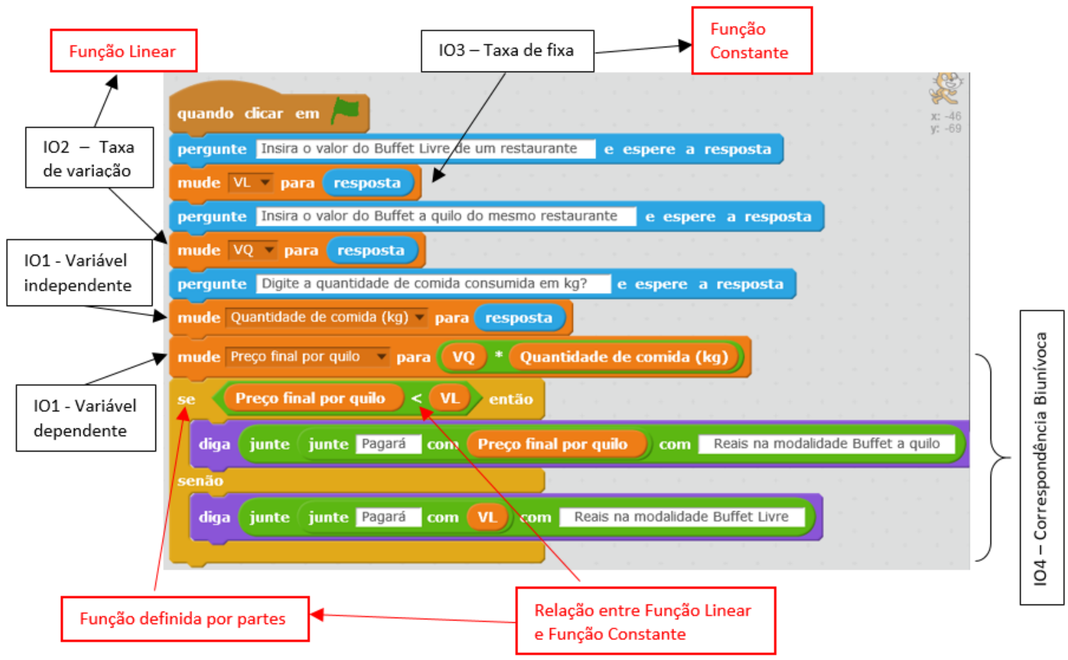
Buffet Livre a R

$ 32,00

Buffet a quilo por R$ 45,90

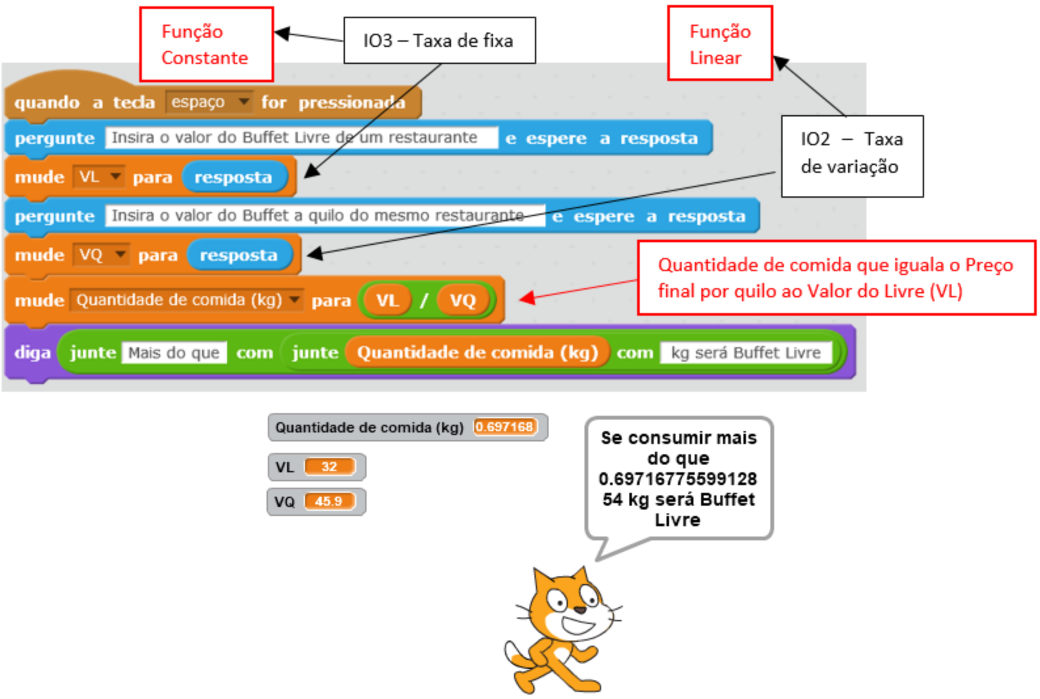
Consumo de 450 g = 0,45 kg

Ideia de que o Buffet Livre constitua uma função constante e o Buffet a Quilo uma Função Afim, cujo preço final dependa da quantidade de comida consumida.



(conclusão)

b)



Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5.9 - Situação 5 de Programação (SP5)

SITUAÇÃO 5 - LIVRE
Crie um programa no Scratch que represente uma situação matemática que envolva as Funções Afim, ou seja, uma situação que estabeleça uma certa relação do tipo f(x) = ax + b entre duas variáveis. Use sua criatividade.
Classificação das situações: E
Invariantes operatórios associados
Espera-se que os quatro invariantes sejam manifestados.

Fonte: a autora.

A aplicação desse instrumento associado à observação interativa, a qual trato em seguida, foi gravada pelo *software Active Presenter*, que produziu um vídeo da tela do computador juntamente com nossas vozes. A conversa gravada foi também transcrita. A transcrição e as imagens das construções no Scratch (geradas por *print screen* da tela com a reprodução do vídeo) deram origem aos **Protocolos do Scratch.**

5.3.3 A observação interativa

Segundo Carraher (1998), a maioria dos fenômenos psicológicos, como as emoções, a aprendizagem, o raciocínio etc., não é diretamente observável, no entanto, tende a refletir-se nas ações dos sujeitos ao lidar com certas situações. Assim, o observável são suas representações externas por meio da linguagem escrita, pictórica e falada. Neste sentido, para percebermos as compreensões que os estudantes têm de suas próprias ideias representadas na atividade de programação, precisamos realizar certas intervenções durante o processo de investigação que permitam acompanhamento do pensamento.

Para estabelecer o método de intervenção nesta pesquisa, nos baseamos nas estratégias de entrevistas que Piaget (1977, 1978) e seus colaboradores (INHELDER; CAPRONA, 1996) desenvolveram em seus trabalhos sobre epistemologia genética, notadamente as diversas modificações realizadas ao longo dos anos em virtude de adaptações às questões de interesse.

Jean Piaget, interessado em conhecer a gênese da inteligência e os níveis estruturais do pensamento humano, desenvolve o seu método clínico como uma forma de entrevista verbal, um interrogatório, com perguntas e contra sugestões, realizadas individualmente, que envolve a elaboração de atividades de experimentação a partir de materiais concretos (MORGADO; PARRAT-DAYAN; 2006). São pesquisas macrogenéticas que, geralmente, envolvem muitos sujeitos, dos diferentes estágios de desenvolvimento. Resumidamente, podemos dizer que a análise do material produzido por este método visa estabelecer o nível operatório do sujeito, por meio da presença ou ausência de elementos, esquemas e condutas específicas de seu estágio.

Já Barbel Inhelder (INHELDER; CELLÉRIER, 1996), a partir do que realizou com Piaget, orienta-se para estudos mais aprofundados do tipo microgenético, numa abordagem funcional. Ela e seus colaboradores tentam entender o sujeito individual e como utiliza suas estruturas cognitivas em face a situações concretas, problemas ou tarefas experimentais a realizar. Fez várias pesquisas, o que possibilitou realizar modificações no método clínico para atender aos diferentes objetivos de suas investigações.

Nos seus estudos sobre as estratégias de resoluções de problemas, segundo Morgado e Parrat-Mayan (2006), a autora e seus colaboradores dirigem a atenção sobre como os sujeitos individuais resolvem os problemas, como alcançam um objetivo. O método clínico utilizado por eles afasta-se, então, do método de questionamento verbal em que é fixado um conjunto de hipóteses e que o investigador orienta o pensamento do sujeito por meio de suas perguntas. Nesta nova abordagem, chamada de **observação interativa**, “[...] as intervenções do observador são controladas de forma a não interferir na compreensão do funcionamento de seus próprios conhecimentos por parte do sujeito” (SAAD-ROBERT, 1996, p. 129). Quando ocorrem, as perguntas não devem direcionar, mas esclarecer para o observador os processos, as condutas, as ações empregadas na atividade de resolução.

Considerando que o objetivo desta pesquisa é investigar as manifestações conceituais no ambiente de programação, ou seja, investigar os invariantes operatórios que estão sendo postos em ação, suas representações e compreensões pelos estudantes, nos aproximamos mais dos estudos de Inhelder e seus colaboradores sobre os aspectos funcionais do conhecimento. Assim, constituímos o método de intervenção com os estudantes durante a atividade empírica, a qual chamamos também de **observação interativa,** com o objetivo de explorar as formas predicativas dos conhecimentos em ação dos estudantes sem pretender, entretanto, influenciar e direcionar os raciocínios. Neste sentido, estabelecemos também um roteiro de orientação, o qual chamo **Roteiro Scratch** (Apêndice 8), que serviu como norte para as perguntas feitas aos estudantes sem, entretanto, pretender engessar a conversa, pois outras perguntas surgiram no decorrer da atividade, assim como algumas previstas não foram feitas.

5.4 Organização e análise dos dados produzidos

A pesquisa realizada com os dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus* Erechim proporcionou a produção de dados empíricos, os quais, acredito, autorizaram-me a responder o problema de pesquisa e atingir os objetivos. A partir dos instrumentos já descritos e dos momentos com os estudantes, foi possível produzir os Protocolos[42] que constituíram o material de análise. No Quadro 5.10, sistematizo a organização metodológica na produção dos dados.

Quadro 5.10 – Organização metodológica da produção dos dados

<table>
<tr><th>Momentos da pesquisa</th><th>Instrumentos de produção dos dados</th><th>Materiais de Análise</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Entrevista Diagnóstica</td><td>Teste Diagnóstico</td><td rowspan="3">Protocolo Diagnóstico Alan
Protocolo Diagnóstico João</td></tr>
<tr><td>Entrevista Diagnóstico</td></tr>
<tr><td>Gravação de áudio</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aplicação das Situações com a Programação de Computadores</td><td>Situações com o Scratch</td><td rowspan="3">Protocolo Scratch Alan
Protocolo Scratch João</td></tr>
<tr><td>Observação interativa</td></tr>
<tr><td>Gravação de vídeo</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

[42] Os protocolos dos dois estudantes estão disponíveis em: <http://bit.ly/ProtPesq>. Acesso em: 17 jul. 2018.

Neste sentido, o método de análise que adoto baseia-se no estudo qualitativo de protocolos individuais, os quais, por sua vez, são compostos de diálogos entre a pesquisadora e o estudante, descrições das condutas e ilustrações das produções realizadas em cada uma das situações que foram propostas. Para a leitura destes protocolos, mantenho junto a mim os referenciais teóricos que me ajudam a enxergar o processo de conceituação, que me auxiliaram na construção do objeto de investigação deste estudo e que fornecem os instrumentos conceituais para efetivar a pesquisa. Assim, munida dos conceitos e das perspectivas de Vergnaud e Papert, adentro no mundo das análises e interpretações.

Então, para cada protocolo, realizei a localização dos quatro invariantes operatórios usando como auxílio as tabelas de análise das situações que se encontram no Subcapítulo 5.4. Em seguida, fiz a sistematização das manifestações dos invariantes operatórios, apontando sua forma operatória e predicativa, tanto no diagnóstico como na atividade com o Scratch, e organizei as informações em tabelas. Na sequência, realizei a interpretação das manifestações e das elaborações conceituais indicando os teoremas em ação associados ao invariante operatório analisado. Por fim, produzo uma reflexão a partir das interpretações realizadas, na qual construo argumentos que possibilitaram a efetivação dos objetivos dessa pesquisa.

Quadro 5.11 - Etapas da análise

Etapas da análise:	
1	Elaboração dos protocolos individuais
2	Localização dos invariantes operatórios nos protocolos
3	Sistematização das manifestações apontando a forma operatória e predicativa
4	Interpretação das manifestações indicando os teoremas em ação
5	Reflexão sobre as interpretações

Fonte: Elaborado pela autora.

A explicitação das escolhas metodológicas apresentadas neste capítulo é finalizada com a certeza de que fazer pesquisa empírica sobre aspectos conceituais em sujeitos cognoscentes é um grande desafio, pois o saber está em constante construção. Acredito, portanto, que o rigor da pesquisa não se encontra apenas nas teorias, métodos e instrumentos selecionados e elaborados, mas igualmente no comprometimento do pesquisador perante seu objeto de pesquisa e da sua habilidade e competência em manifestar por meio da escrita os seus próprios conhecimentos, que também estão sendo construídos.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO: UMA ANÁLISE POSSÍVEL

O pesquisador precisa dialogar com o seu objeto, fazê-lo falar. Para isso, precisa falar com ele (SILVA, 2010, p. 46).

Neste capítulo, apresento minha análise sobre o estudo empírico realizado, buscando nas teorias de base o alicerce necessário para o entendimento da realidade e para fazer o *objeto falar*. Para tanto, organizei esta exposição trazendo as manifestações a partir de cada estudante e de cada invariante operatório, IO1 – variável, IO2 – taxa de variação constante, IO3 – taxa fixa e IO4 – correspondência biunívoca. Neste sentido, faço a exposição de minhas observações sobre o Protocolo Diagnóstico seguido do Protocolo Scratch, apontando as formas operatórias (FO) – o saber-fazer, e as formas predicativas (FP) – o saber-explicar, manifestadas, a fim de estabelecer relações e interpretar os teoremas em ação associados ao invariante analisado.

Para caracterizar as interpretações, apresento por meio de quadros[43] os excertos do diálogo estabelecido (os diálogos completos estão nos Protocolos), bem como os recortes dos programas construídos no ambiente de programação Scratch. As perguntas realizadas aos estudantes seguiram roteiros preestabelecidos, conforme já foi dito, mas que serviram apenas como guias, permitindo modificações ou acréscimos conforme as circunstâncias.

Essa forma de organização pretende trazer mais objetividade na exposição das análises, a fim de não se tornarem excessivamente descritivas. Ainda assim, muitas situações aparecem em mais de uma vez nas discussões, pois tal situação é analisada de forma diferenciada em cada invariante operatório. É também importante ressaltar que os teoremas em ação que foram evidenciados por meio das estratégias, construções e falas dos estudantes são interpretações relacionadas à compreensão que tenho da Matemática, da TCC e do que consegui perceber da experiência. Portanto, não são teoremas formais da matemática, não são os únicos que podem ser interpretados a partir da atividade realizada, tampouco são representações exatas e literais do que os estudantes expressaram.

[43] Nos quadros desse capítulo, as situações estão representadas por siglas. Por exemplo, SP1(a) significa Situação 1, letra (a), realizada na Programação, e SD2(b) significa Situação 2, letra (b), realizada no Diagnóstico.

6.1 Estudante Alan

O estudante Alan apresentou desempenho muito bom no Teste Diagnóstico, tanto nas atividades de Matemática (9 pontos) como na de programação de computadores (8 pontos). A única situação de matemática em que não conseguiu chegar até o resultado correto foi na terceira, no entanto, apresentou a estratégia adequada para sua resolução. Na atividade do Scratch, programou um jogo[44] envolvendo pontuações, uma espécie de *ping pong,* em que uma bola quica nas bordas da tela e o jogador precisa evitar que ela quique na borda inferior (o chão), semelhante a uma atividade realizada na Ambientação. Durante a Entrevista Diagnóstico sobre as atividades de Matemática, conseguiu explicar suas ideias e estratégias de como fez as resoluções.

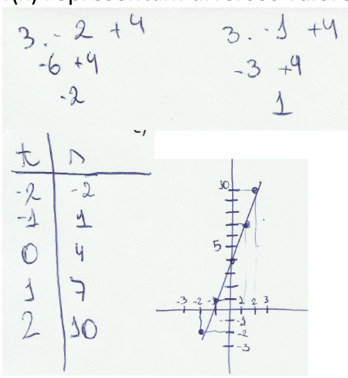
Nas situações sobre Funções Afim no Scratch, seu desempenho também foi muito bom. Fez planejamentos iniciais para quase todas as situações, apresentou programas finais eficientes e soube explicar o que fez. No entanto, na Situação 3 e na Situação 4, letra (b), não apresentou planejamento inicial devido a não ter uma estratégia prévia de como fazer. Para realizar esses programas, precisou mexer primeiro no ambiente Scratch a fim de decidir sobre os comandos a serem usados e testá-los. Nos itens que seguem, estão as análises mais detalhadas sobre as manifestações das representações e compreensões de Alan sobre cada invariante operatório.

6.1.1 Variável (IO1)

<u>No diagnóstico</u>, ideias sobre variável foram manifestadas por Alan nos momentos em que tomou a lei da função como uma fórmula, tratando as letras destas fórmulas como variáveis, sendo possível substituir uma delas por determinados valores numéricos e calcular o valor correspondente da outra. Aqui, manifestou um teorema em ação que interpreto como: **na Função $f(x) = ax + b$, x e $f(x)$ são as variáveis, em que o valor de $f(x)$ depende do valor de x**. No Quadro 6.1, sistematizo as representações de Alan a partir da forma operatória e predicativa do invariante.

[44] O jogo realizado pode ser visto no Protocolo Diagnóstico Alan.

Quadro 6.1 - Manifestação do IO1 no diagnóstico, por Alan

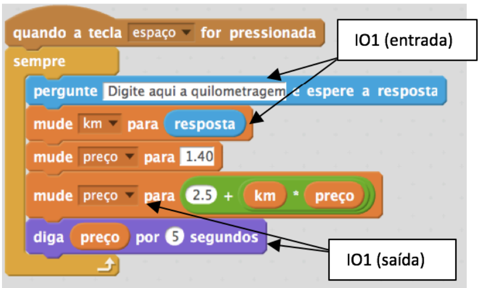
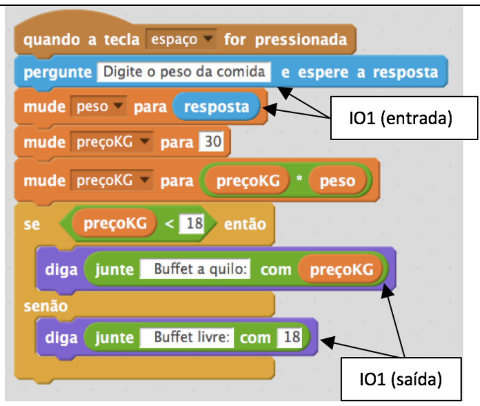
S	FO	FP
SD1(a)	Na função s = 3t + 4 dada, considera que s e t representam diversos valores.	– *V: Quem são as variáveis do teu problema?* – *V: Tu consegues identificar quem é variável dependente e independente?* – *A: Independente é o t, talvez, e o s vai depender do que o t vai ter. Por exemplo, o valor do t influencia no valor do s, já o valor do s não influencia no do t.*
SD2(a)	Associa x e f(x) às grandezas, dinheiro e número de brinquedos da situação, modelando a função f(x) = 8x + 15:	– *A: (...)coloquei o f(x) como sendo os reais gastos e o x como sendo o número de brinquedos.*
SD3(a)	Na função f(x) = ax + b, considera que x e f(x) representam diversos valores.  	– *V: Quem são as variáveis?* – *A: São f(x) e x.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Nas situações propostas <u>no ambiente de programação</u>, Alan manifestou o IO1 sob três aspectos interessantes. O primeiro refere-se às associações entre as variáveis da situação matemática com as variáveis da programação, que apareceram em todas as situações. O segundo aspecto tange à atribuição de valores para a variável de entrada do programa a fim de calcular seu valor correspondente na variável de saída, que apareceu nas execuções dos programas em quatro das cinco situações. O terceiro aspecto compete à associação que Alan fez da taxa de variação constante da Função Afim a uma variável da programação que apareceu quando a constante 1,40 da SP1 e a constante 30 da SP4 são ambas associadas à variável "preço".

No Quadro 6.2, que apresenta as formas operatórias (IO1 sinalizado nos programas) e predicativas de duas das situações resolvidas no Scratch, vejo, por meio dos excertos, que há uma ideia de ampliação do conceito no programa criado para outras situações, ao considerar o 1,40 (da SP1) e o 30 (da SP2) como variáveis. Isso pode indicar que a situação realizada no ambiente de programação possibilitou uma associação diferente do que comumente é realizada em atividades no papel, pois é possível pensar no preço por quilômetro como uma variável, se considerarmos outras situações semelhantes. Outra manifestação interessante foi quando usou o comando “sempre” da programação para permitir a execução deste para diversos valores a serem inseridos. O programa, então, poderia estar generalizando mais ainda a Função dada, que já é uma forma de generalização. Essas reflexões me levam a sintetizar a ideia no seguinte teorema em ação: **na Função f(x) = ax + b, x e f(x) são as variáveis, em que o valor de f(x) depende do valor de x, mas o coeficiente “a” pode ser considerado uma variável se concebermos a Função para outras situações de contexto semelhante, mas com o valor de “a” diferente.**

Quadro 6.2 - Manifestação do IO1 no Scratch, por Alan

<table>
<tr><th>S</th><th>FO</th><th>FP</th></tr>
<tr><td>SD1(a)</td><td>
</td><td>– V: O que é esse 1,40?
– A: Ele é o preço por quilômetro.
– V: E ele é uma variável, matematicamente falando?
– A: Depende, se (o valor de 1,40) for só para aquele táxi ou para a cidade inteira esse preço. Porque, se for para a cidade inteira, é uma constante.
[...]
– V: Por que tu colocaste o “sempre” no programa?
– A: Porque aqui está dizendo as quilometragens e talvez a pessoa queira consultar mais de uma.</td></tr>
<tr><td>SD4(a)</td><td>
</td><td>Obs. Não houve questionamento sobre o 30</td></tr>
</table>

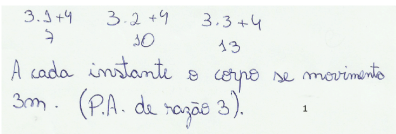
Fonte: Elaborado pela autora.

6.1.2 Taxa de variação constante (IO2)

<u>No diagnóstico</u>, a manifestação da forma operatória e predicativa desse invariante aconteceu a partir de duas noções diferentes e complementares. A primeira, acredito ser uma noção mais pragmática do conceito, é a ideia de que o coeficiente “a” da função multiplica

pela variável dependente. É o que aparece na forma operatória do invariante. No entanto, quando questionado, Alan manifesta na forma predicativa a noção de variação constante, ou seja, o coeficiente “a” representa o quanto varia y a cada unidade de variação de x. Com isso, interpreto que essas duas noções estão presentes na compreensão do estudante e podem ser descritas pelo seguinte teorema em ação: **numa função do tipo f(x) = ax + b, a cada unidade de variação de x, há uma variação constante em f(x) determinado pelo coeficiente “a”.** No Quadro 6.3, apresento a sistematização dessas ideias a partir da operacionalização realizada por Alan e dos excertos da entrevista.

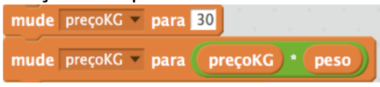
Quadro 6.3 - Manifestação do IO2 no diagnóstico, por Alan

S	FO	FP
SD1(a)	Na função s = 3t + 4 dada, multiplica o 3 por 30.	– *V: Qual é o papel deste 3 da lei da função?* – *A: Ele seria a razão, **no caso a cada segundo ele anda 3 posições...no caso a progressão aritmética**. Que eu aprendi esse ano e ficou fácil de resolver.*
SD1(d)	Substitui o t por 1, 2 e 3 e estabelece uma relação de progressão aritmética entre os valores das respostas do s: 7, 10 e 13.  3.1+4 7 3.2+4 10 3.3+4 13 A cada instante o corpo se movimento 3m. (P.A. de razão 3).	– *V: Como fizeste esta questão?* – *A: Daí usei a equação para resolver isso, no caso, trocava o tempo por 1, depois por 2, e depois por 3. E descobria os valores. E vi que são progressivos. Que não são aleatórios, sabe. E associei com a Progressão Aritmética.*
SD2(a)	Na função modelada f(x) = 8x + 15, posiciona o 8 para multiplicar pelo x.	– *V: Me explica esta resolução.* – *A: (...) e os **8 reais, para cada um dos brinquedos**, ou seja, um número x de brinquedos determinaria o valor da função, no caso, 8 vezes 2 brinquedos mais 15, dá 31.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Nas situações resolvidas <u>no ambiente de programação</u>, também foram manifestadas as duas noções já discutidas no diagnóstico. A noção mais pragmática aparece nos códigos de programação quando Alan usa o comando multiplicação da aba “operações” do Scratch para fazer os cálculos. A noção de variação constante aparece, tal como antes, na forma predicativa a partir das suas falas. Neste sentido, o teorema em ação se manifesta novamente. No Quadro 6.4, apresento recortes dos programas que Alan criou para a SP1, SP2, SP4 e SP5 apenas das partes que correspondem à operação de multiplicação e, também, trago excertos que corroboram com as ideias apresentadas.

Quadro 6.4 - Manifestação do IO2 no Scratch, por Alan

S	FO	FP
SP1(a)	P = 1,40q + 2,50: 	– *V: O que é o 1,40?* – *A: **É o preço pela quilometragem**.* – *V: Para cada quilômetro que passa, quanto se paga na corrida?* – *A: **1,40 a cada quilômetro**.*
SP2(a)	f(x) = 0,2x + 1150: 	– *A: [...] os 20% do total das vendas, que seria **0,2 vezes o preço de vendas**.*
SP4(a)	Preço = 30*peso 	– *V: O que significa os 30?* – *A: é o **peso por quilo**.* – *V: O que ele faz no cálculo?* – *A: Ele multiplica pelo peso da comida que a pessoa comer.*
SP5	Lucro= 75*peças – 1200 	– *A: ...agora para cada peça, o preço de venda de cada uma é... vamos botar 75.*

Fonte: Elaborado pela autora.

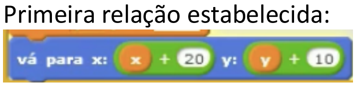
Outro aspecto importante a considerar é sua resolução na SP3 (b), na qual apenas obteve sucesso após várias descrições, execuções, reflexões e depurações do código. Primeiramente, na letra (a), Alan aplicou sua estratégia de modelagem da Função a partir de dois pontos do gráfico, mas cometeu um pequeno erro e encontrou a função y = 0,25x + 0,5 ao invés de y = 0,5x. Na SP3(b), sem usar o modelo gerado na SP3(a), usou uma estratégia inicial de tentar criar um movimento do ator a partir de um ângulo de inclinação com a horizontal. Fez várias tentativas, mas não conseguiu estabelecer a relação do ângulo necessário de inclinação do ator e a trajetória solicitada na questão.

Depois disso, passou a usar outra estratégia e estabeleceu a seguinte relação entre as coordenadas x e y: “quando x anda 20, y anda 10”. Após realizar algumas tentativas e erros com os comandos do Scratch, a fim de fazer o ator andar e marcar suas coordenadas nas variáveis criadas, elabora seu programa final. No término de sua programação, questiono-o sobre a relação deste programa com a função modelada na SP3(a) e ele percebe que há algo errado no seu modelo. Após arrumar o modelo para y = 0,5x, questiono-o novamente sobre a relação e ele manifesta compreender, então, a relação existente entre o coeficiente “a” da função e o movimento das coordenadas do ator do programa no Scratch. O que percebo, portanto, é a operacionalização de duas noções a respeito da Função Afim da SP3, que é a variação constante da f(x) em relação a x dada pelo coeficiente 0,5 e a ideia de proporcionalidade com os valores das coordenadas x e y, tendo em vista ser uma Função Linear.

A ideia da variação foi, portanto, mais uma vez manifestada quando relacionou tais variações com uma P.A, ao dizer “andava 2 e andava 1”, e a ideia de proporcionalidade fica clara na sua resposta à pergunta sobre o que fazer se a função fosse y = x/3, no final da conversa sobre essa situação. Assim, é possível descrever essas ideias a partir do seguinte teorema em ação: **i) na função f(x) = 0,5x, a cada unidade de variação em x, há meia unidade de variação em y e, também, os valores da ordenada são sempre a metade dos valores da abscissa; ii) na função f(x) = x/3, os valores da ordenada são sempre um terço dos valores da abscissa.** No Quadro 6.5, é exposta a forma operatória e predicativa que ilustram o que acabo de mostrar.

Quadro 6.5 - Manifestação do IO2 na SP3 realizada no Scratch, por Alan

(continua)

S	FO	FP
SP3(b)	Primeira relação estabelecida:  Programa final: 	Enquanto assistimos ao vídeo novamente: – *A: o **y vai ser a metade de x**.* – *V: Sempre?* – *A: Sim.* [...] Quando faz sua primeira elaboração no Scratch: – *V: Por que tu mandaste andar x + 20 e y + 10?* – *A: Para ele fazer isso aqui, **para ele sempre adicionar 20 ao x e 10 ao y.*** Depois que termina o programa, pergunto: – *V: A relação que tu estabeleceste foi x anda 20 e y anda 10...* – *A: **Sempre a metade**.* – *V: Ok. O que essa relação tem a ver com a tua função do modelo?* – *A: Isso aqui, porque...(aponta para o 0,5)... pensando bem, não faz sentido.* – *V: O que não faz sentido?* – *A: o x... tem 0,25 e não 0,5...* Alan coloca um x ao lado do 0,5 na função, ficando f(x) = 0,25x + 0,5x. – *V: Tá, tu colocaste o x do lado do 0,50 e isso faz alguma diferença?* – *A: Está sendo a metade.* Revisa os cálculos, acha o erro e arruma a função para f(x) = 0,5x. – *V: Nesta fórmula aí, se eu colocar x igual ao 40, o que vai sair no y?* – *A: 20.* – *V: Por quê?* – *A: Porque aqui é 0,5.*

(conclusão)

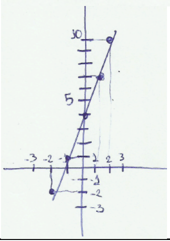
		– *V: E o 0,5 faz o quê?* – *A: Ah... é isso ele deixa pela metade. Como aqui não tá somando nada (não tem o b), fica só esse valor aqui. Se colocar 20 no x, fica y igual a 10. Entendi agora.* Questiono sobre o fato de ele não ter usado a resposta da letra (a) para fazer a letra (b) e ter estabelecido uma relação. – *A: Eu usei as marcações aqui, ele andava 2 e andava 1, conforme a PA.* – *V: Se eu pedisse para fazer o movimento para $y = \frac{1}{3}x$, como tu faria?* – *A: Colocaria x = 21 e y = 7, porque daí ficaria um terço.*

Fonte: Elaborado pela autora.

6.1.3 Taxa fixa (IO3)

No diagnóstico, Alan manifestou o IO3 em todas as situações a partir de interpretações de acordo com o contexto da situação, ou seja, foi considerado "valor inicial", "valor fixo", "o coeficiente b da função" e "corte no eixo y". No Quadro 6.6, mostro partes das resoluções de Alan e excertos extraídos dos protocolos, os quais expressam o IO3 tanto na sua forma operatória como na predicativa. Com isso, percebo dois teoremas em ação associados: **i) a constante 4 da função s = 3t + 4 indica a posição inicial do movimento; ii) a constante 15 do problema é o coeficiente b da função f(x) = ax + b, pois indica o valor fixo de entrada no parque, independentemente de usar brinquedos.**

Quadro 6.6 - Manifestação do IO3 no diagnóstico, por Alan

S	FO	FP
SD1(a)	s = 3.30+4 s = 94	– *V: E o 4, qual é a função deste 4?* – *A: **O 4 é uma constante... qualquer valor de t que tivermos, vai ter o 4 ali para somar**.*
SD1(c) e (e)	s = 3.0 +4 s = 4 	– *V: Me explica o que tu pensaste?* – *A: Olhei para o 4 e vi que ele é uma constante. E pensei que o 3 vezes o 30 está falando a posição, o 4 está ali para somar, ou seja, ..., **se fosse só 3 vezes 30, ele teria começado do zero**. Deduzi isso, daí fiz essa continha básica que coloquei 3 vezes zero, que no caso não andou nada, não usou tempo, e daí achei o 4.*
SD2(a)	Depois de ter modelado a função f(x) = 8x + 15, faço o questionamento.	– *V: Se o 8 não existisse?* – *A: Daí ele só pagaria a entrada e usaria todos os brinquedos.*

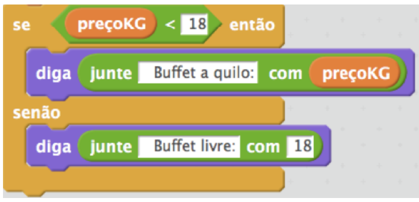
Fonte: Elaborado pela autora.

Nas situações resolvidas no ambiente de programação, o IO3 é manifestado por Alan em quatro das cinco situações, considerando-o como “valor inicial”, “valor fixo” e “coeficiente b da função”. No entanto, ele não chega a criar variáveis no programa para representar esses valores, como fez na discussão anterior sobre o IO2. Isso pode indicar que Alan considera o invariante realmente um valor constante que não faz sentido ser generalizado para outras situações.

É interessante destacar que a SP4 e a SP5 proporcionaram a manifestação de raciocínios um pouco diferentes do que as demais situações proporcionaram ao Alan. Na SP4, temos uma situação em que a função determinada para o buffet livre, independentemente do preço deste buffet, será sempre uma Função Constante, ou seja, uma função do tipo f(x) = b, sendo b o valor do buffet livre, e a função para o buffet a quilo será sempre uma Função Linear, do tipo f(x) = ax, sendo “a” o valor do buffet a quilo. Neste sentido, a elaboração de um programa que compara as duas modalidades e expressa qual delas é mais vantajosa para um usuário a partir da quantidade de comida que for inserida no programa possibilita a aplicação do significado “taxa fixa” ou “constante”, ou seja, qualquer valor inserido acima de determinada quantidade em quilogramas será sempre 18 a resposta.

De forma semelhante, a SP5, que objetivava a criação livre do estudante, possibilitou que Alan trouxesse uma relação não trabalhada no diagnóstico nem nas situações planejadas com o Scratch, que foi a elaboração de um modelo de Função Afim com a taxa fixa negativa a partir dos contextos de lucro, receita e despesa. Isso também possibilitou a aplicação do conceito de forma que não era qualquer valor inserido no programa que o usuário obteria lucro. Com isso, vejo a manifestação dos seguintes teoremas em ação: **i) na função f(x) = 1,40x + 2,50, o 2,50 indica o valor inicial do táxi independentemente da quilometragem percorrida; ii) na função f(x) = 0,2x + 1150, o 1150 indica o salário base do funcionário independentemente de suas vendas no mês; iii) o buffet livre indica uma função constante f(q) = 18, a qual independe da quantidade de comida consumida; iv) na função f(x) = 75x – 1200, o 1200 representa o custo fixo para produzir as peças e deve ser subtraído à receita para obter o lucro.** No Quadro 6.7, mostro suas representações na forma operatória e predicativa a partir dos recortes dos programas elaborados e dos excertos das falas.

Quadro 6.7 - Manifestação do IO3 no Scratch, por Alan

S	FO	FP
SP1(a)		– *V: O que é o 2,50?* – *A:* ***O valor fixo em reais. Ele já vai iniciar tendo que pagar isso****.*
SP2(a)		– *A: Eu adicionei o* ***1150 que são fixos***
SP4(a)		– *V: Se tu fosse fazer um modelo no papel destas relações, como tu faria?* Fez num canto do papel: f(q) = 30*q – *V: O 18 faz parte desta função?* – *A: Não, é outra função.* – *V: Como seria ela?* – *A:* ***Ah, só 18.*** **Escreve: f(q) = 18** – *V: Qual a diferença?* – *A: É que uma depende do peso e a outra não.* – *V: O que acontece em termos de variação [...] se eu comer 100g e usar os dois tipos de Buffet?* – *A:* ***Num vai dar um valor específico para 100g e na outra será sempre 18.***
SP5		– *V: O que significa o -1200?* – *A: É o* ***valor do custo*** *para ligar a máquina.* – *V: E qual é a importância dele na função?* – *A: Ah, se vender tipo um certo número de peças, vamos saber se vai dar positivo ou negativo.*

Fonte: Elaborado pela autora.

6.1.4 Correspondência biunívoca (IO4)

O invariante operatório "correspondência biunívoca" é manifestado no diagnóstico do Alan a partir da noção de "ida", de "volta" (a reversibilidade) e da ideia que só há um valor de "ida" que determina o valor de "volta" (bijeção). Em todas as questões, ele opera com o conceito no sentido de aplicar a estratégia de substituição de uma variável para encontrar a outra correspondente e sua compreensão é explicitada nas falas. Com base nisso, interpreto suas ideias a partir dos teoremas em ação seguintes, que são complementares: **i) numa função do tipo f(x) = ax + b, cada valor numérico de x corresponde sempre a um único valor numérico de y e reciprocamente; ii) para encontrar o valor de x tendo o valor de f(x), faz-se operações inversas às operações feitas quando calcula-se a f(x) a partir de x.** No Quadro 6.8, está organizada a forma operatória e predicativa da manifestação do IO4.

Quadro 6.8 - Manifestação do IO4 no diagnóstico, por Alan

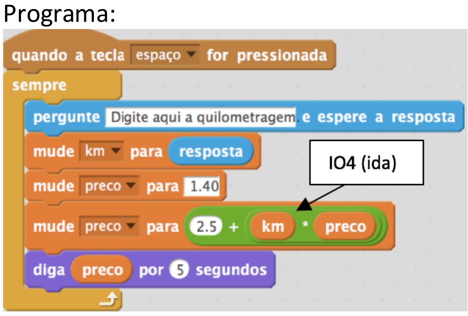
S	FO	FP
SD1(a)	Para achar o deslocamento em 30 segundos, usando a função s = 3t + 4, fez a substituição de t por 30 e achou o valor de 94: $s = 3.30+4$ $s = 94$	– *V: Explica como tu fizeste esta questão, como pensou para fazer a questão?* – *A: Olha, fui testando... peguei a equação do 1º grau* ***e troquei, os 30 segundos no tempo****, daí consegui a resposta. Bem simples aqui, na verdade.* – *V: Que relação tu achas que existe entre o 30 e o 94?* – *A: O 30 são os segundos, ou seja, passou mais ou menos 1 minuto e meio, ..., quando ele fez este movimento de 94 né. No caso,* ***quando ele alcançou 94 deu 1 minuto e meio mais ou menos.*** A ideia de 1 minuto e meio está equivocada, ele multiplicou 3 por 30 e associou o resultado a segundos, no caso, 90 segundos, mas na verdade são metros, ou seja, 90 metros. *[...]* – ***V: Será que nesse caso haveria dois valores na variável t que daria o mesmo valor na variável s?*** – ***A: Só numa de segundo grau, talvez. Mas nessa aqui acho que não****. Só numa de segundo grau que daí tem Bháskara.*
SD1(b)	Para achar o tempo para um deslocamento de 150 metros, fez a substituição de s por 150 e fez o cálculo: $s = 3.t+4$ $150 = 3t+4$ $146 = 3t$ $t = \frac{146}{3}$ $t = 48,66\ s$	– *V: Me explica o que tu fizeste?* – *A: Usei aquela fórmula e troquei a variável s, que é a progressão dele, por 150.* ***Daí eu descobri quanto tempo ele levou para chegar na posição 150.*** – *V: Qual a diferença da letra (a) e da letra (b)?* – *A:* ***Na letra (a) preciso descobrir em que posição ele está. E na letra (b) eu tenho a posição e não tenho o tempo que usou para chegar. Essa é a diferença.***
SD2(b)	Para achar o preço ao usar 7 brinquedos, fez a substituição de x por 7 na função f(x) = 8x + 15: $8.7+15$ $56+15$ R$ 71,00	– *V: Então a relação do 7 com o 71 é...* – *A:* ***O 71 depende do número de brinquedos, que no caso é o 7. O preço depende do número de brinquedos. Como ele usou 7 brinquedos, 8 vezes 7 dá 56 mais os 15, dá 71****.* – *V: Se tivesse usado 2 brinquedos teria um valor especifico?* – *A: Isso.*
SD2(c)	Para achar o número de brinquedos a serem usados com R$ 100,00, fez a substituição de f(x) por 100: $100 = 8x+15$ $85 = 8x$ $x = \frac{85}{8}$ $x = 10,625$ Ele poderá usar 10 brinquedos	– *A: ... eu troquei o x pelo valor. Que no caso, aqui o valor é a f(x), e troquei ele e descobri o 10 (substituiu o f(x) por 100).*

Fonte: Elaborado pela autora.

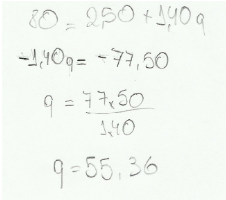
Na programação, o IO4 aparece em todas as programações quando faz associações entre à variável de entrada, cujos valores são dados pelo usuário, a um cálculo específico determinado pela função matemática, que, por sua vez, vai corresponder a uma resposta específica. Então, a cada entrada há uma saída específica. Esta ideia também está por trás do esquema de organização que esboça no papel, quando faz seu plano, em que precisa perguntar para receber uma resposta (variável de entrada), calcular a partir desta resposta e mostrar um resultado (variável de saída). Também há a manifestação do IO4, na SP1(b), quando calculou no papel o valor numérico da variável "q" ao considerar a variável "P" igual a 80 na Função dada, estabelecendo a ordem adequada das operações antes de descrevê-la nos códigos do Scratch. Com isso, vejo a manifestação dos mesmos teoremas em ação descritos anteriormente. No Quadro 6.9, mostro a forma operatória e predicativa do invariante nas SP1 e SP2.

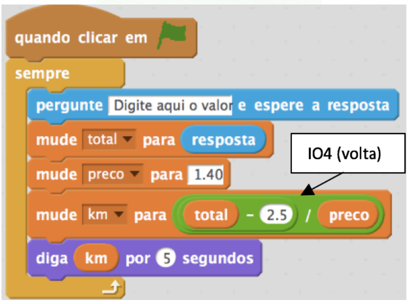
Quadro 6.9 - Manifestação do IO4 no Scratch, por Alan

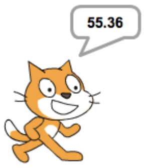
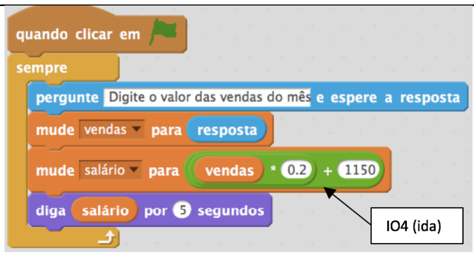
(continua)

S	FO	FP
SP1(a)	Plano de ação: - evento de início - pergunta os Km (variável) - cálculo da função - mostrar resultado. Programa:  Teste para 4 km e dá a resposta R$ 8,10. 	– *A: Eu pensei em fazer o evento de início, no caso a bandeirinha, eu pergunto os quilômetros, com a variável né, a variável nova, daí uso esta função aqui e calculo. E depois mostra o resultado.*

(conclusão)

<table>
<tr>
<td>SP1(b)</td>
<td>Faz um programa no Scratch, mas para confirmar a ordem das operações que deve usar, recorre ao papel.




Teste para 80 km dá R$ 55,36.

</td>
<td>– V: Me explica o que fizeste.
– A: [...] se eu tenho 80 reais, então, 80 é igual a 2,50 mais 1,40 vezes q. Eu quero saber quantos quilômetros eu vou andar, então, vou mudar esse 1,40 para cá e fica negativo, faço o 80 menos o 2,50... dá -77,50, ...q igual a ... posso usar a calculadora do computador?
– V: Sim.
Faz o cálculo e encontra 55,3557
– V: O que dá para dizer sobre a letra (a) e a letra (b)?
A: Elas só são diferentes nas operações, que estão ao contrário. Numa está somando e multiplicando e na outra está subtraindo e dividindo. É ao contrário.</td>
</tr>
<tr>
<td>SP2(a)</td>
<td>

Teste para R$ 50.000,00 de vendas dá R$ 11.150,00 de salário.

</td>
<td>– V: Me explica teu plano.
– A: Primeiro pego o evento, para iniciar, daí ele insere o valor, que aqui seria 50.000, daí ele calcula com essa função aqui e mostra o salário do funcionário.
– V: Será que existe dois valores de venda que dê o mesmo salário? Por exemplo, a venda de 3 mil e de 7 mil dá o mesmo salário?
– A: Nesta função não é possível, por que é por comissão. Se fosse só um valor fixo daí não importaria quantas vendas ela fizesse.</td>
</tr>
<tr>
<td>SP2(b)</td>
<td>

Teste para um salário de R$ 7.500,00 dá R$ 31.750,00 de vendas.

</td>
<td>– V: Qual a diferença básica entre eles?
– A: Acho que num eu preciso descobrir o salário final e no outro o total das vendas para ter determinado salário.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

6.1.5 Percepções gerais sobre as manifestações de Alan

De modo geral, foi possível perceber as manifestações de Alan sobre os quatro invariantes operatórios por meio das representações feitas tanto nos códigos de programação (FO) quanto nas falas (FP). No entanto, foi essa última forma que me permitiu saber sobre sua compreensão do invariante, pois, conforme já discutido, a forma operatória nem sempre vem acompanhada de compreensões explícitas. Neste sentido, é possível afirmar que Alan conseguiu operacionalizar os conceitos na programação de computadores e que compreende o que está fazendo.

Os conhecimentos prévios de Alan, pelo que ele apresentou na Entrevista Diagnóstica, o ajudaram a elaborar os planos, a montar os programas e a organizar os cálculos, principalmente na SP1, SP2 e SP5, em que fez de uma forma direta e com apenas um teste do programa já encontrou a solução final, houve descrição, execução e reflexão, mas não houve o processo de depuração do código. Ele desenvolveu suas resoluções finais a partir de uma primeira execução do programa criado, não havendo o processo de testes para a depuração do código. Isso indica que as situações não foram muito desafiadoras para ele, pois não implicou numa reformulação de ideias prévias.

Na SP3, já comentada, e também na SP4(b), apesar de envolver os mesmos invariantes que Alan já havia manifestado antes, ele não conseguiu realizar um plano prévio para a programação e necessitou realizar vários testes com os comandos até encontrar algo que pudesse ser a solução da situação. Percebo aqui a ação das etapas da espiral da conceituação de forma evidente, pois foram vários momentos de descrição, execução, reflexão e depuração do código. Isso significa que tais situações foram mais desafiadoras e proporcionaram a reformulação das estratégias de ação e das ideias prévias, implicando em novas formas de uso dos invariantes operatórios.

Por fim, é possível concluir que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios de Alan esteve relacionado às etapas da espiral da conceituação de forma significativa dependendo do nível de desafio proporcionado pela situação. Quanto mais desafiadora a situação, mais as etapas da espiral são evidenciadas. Também, que, no processo das etapas da espiral, os invariantes puderam estar, de certa forma, mais visíveis, mais acessíveis à compreensão e, portanto, à reformulação, principalmente na SP3.

6.2 Estudante João

O estudante João apresentou desempenho melhor na atividade de programação de computadores (9 pontos) do que nas atividades de Matemática (6 pontos) do Teste Diagnóstico. Durante a entrevista, entretanto, ele reconheceu os erros cometidos em determinadas situações sobre Funções Afim, explicou onde estava o erro e, inclusive, indicou como deveria ter sido feito. A entrevista propiciou que ele expressasse melhor seus conhecimentos do que o teste escrito, o que me permite concluir que João possui um desempenho de Matemática superior ao que considerei anteriormente. Na atividade do Scratch, programou um jogo[45] envolvendo ganho de pontuações e perda de vidas, também uma espécie de *ping pong* semelhante ao que foi feito na Ambientação, em que uma bola quica nas bordas da tela, e o jogador precisa evitar que ela quique na borda inferior (o chão).

Nas situações sobre Funções Afim no Scratch, seu desempenho foi muito bom. Fez planejamentos iniciais para todas as situações, usando uma linguagem escrita própria de um programador, apresentou programas finais eficientes e soube explicar o que fez. Nos itens que seguem, estão as análises das manifestações das representações e compreensões de João sobre cada invariante operatório.

6.2.1 Variável (IO1)

No diagnóstico, João manifesta a forma operatória de suas ideias sobre o IO1, quando substitui as variáveis das Funções por valores numéricos, e manifesta sua forma predicativa, quando considera que as constantes “a” e “b” da Função Afim também podem ser variáveis, ao pensar em outros problemas semelhantes que envolvam constantes diferentes. Neste sentido, João apresenta uma ideia mais generalizada para as variáveis, o que é ratificado depois em suas resoluções no Scratch, as quais mostrarei em seguida. Outro aspecto é a noção de que uma variável representa um conjunto de números específicos e que, em certos casos, há significativas restrições, como pode ser visto na SD1(e). Nesse sentido, descrevo suas ideias no seguinte teorema em ação: **na Função f(x) = ax + b, x e f(x) são as variáveis, em que o valor de f(x) depende do valor de x, mas os coeficientes “a” e “b” podem ser considerados**

[45] O jogo realizado pode ser visto no Protocolo Diagnóstico João.

variáveis se concebermos a Função para outras situações de contexto semelhante, mas com o valor de "a" e "b" diferentes. No Quadro 6.10, estão a forma operatória e predicativa das manifestações e as resoluções e excertos.

Quadro 6.10 - Manifestação do IO1 no diagnóstico, por João

S	FO	FP
SD1(a)	Na função s = 3t + 4 dada, considera que s, t, 3 e 4 podem ser variáveis. Mas para os cálculos, usa s e t como variáveis.	– *V: Quais são as variáveis do problema?* – *J: **O t de tempo e os valores**.* *[...]* – *V: Então, o t é a variável e **estes valores (constantes) também são variáveis?*** – *J: **Sim, podendo variar em cada problema que se faz**.* – *V: Ah, nesse problema específico, o 3 e o 4 são variáveis?* – *J: Não.* – *V: E o que é o s? É uma variável?* – *J: Sim, porque varia de acordo com o tempo.*
SD1(e)	Faz o gráfico, apontando os eixos coordenados t e s apenas na parte positiva.	– *V: Tem algum valor que não possa ser colocar no lugar do tempo ou do deslocamento?* – *J: **Seriam valores negativos. Porque não existe tempo negativo**.* – *V: Mas é possível trabalhar com deslocamento negativo?* – *J: **Sim a física permite trabalhar com deslocamento negativo**.* – *V: E o que isso significa?* – *J: Que está havendo um retrocesso no movimento.* – *V: E o tempo, pode haver retrocesso temporal?* – *J: Não.* *[...]* – *V: E tu nem pensou em fazer com números negativos no gráfico?* – *J: Não, por causa da fórmula não podia ser negativo.*
SD2(a)	Elabora o modelo f(x) = 8x + 15	– *V: E aqui na situação 2, tu tinhas que modelar, né. Como fizeste?* – *J: Seria para descobrir o valor total pago no parque, que seria o valor da entrada, mais a multiplicação da quantidade de brinquedos usados pelo valor por brinquedo.* – *V: Poderia ser ao contrário, y = 15x + 8?* – *J: Não. Neste caso não.* Perguntei sobre o modelo feito: – *J: Para conseguir descobrir determinado valor, o valor das variáveis tendo já as constantes.*

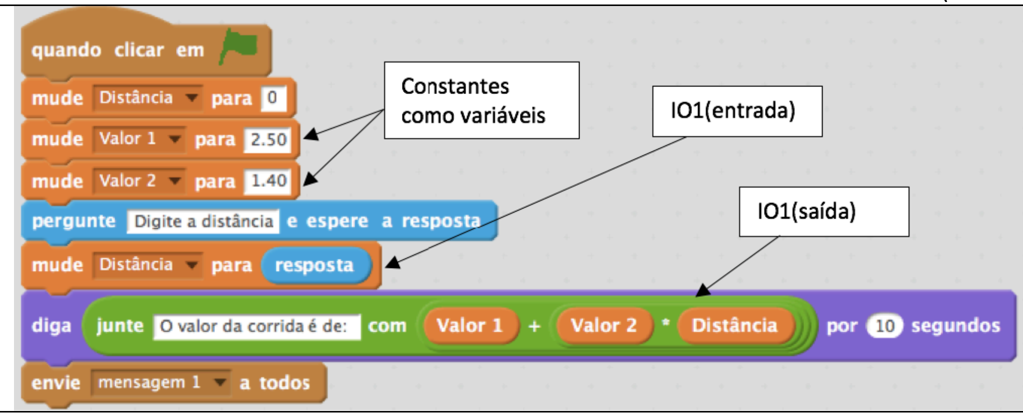
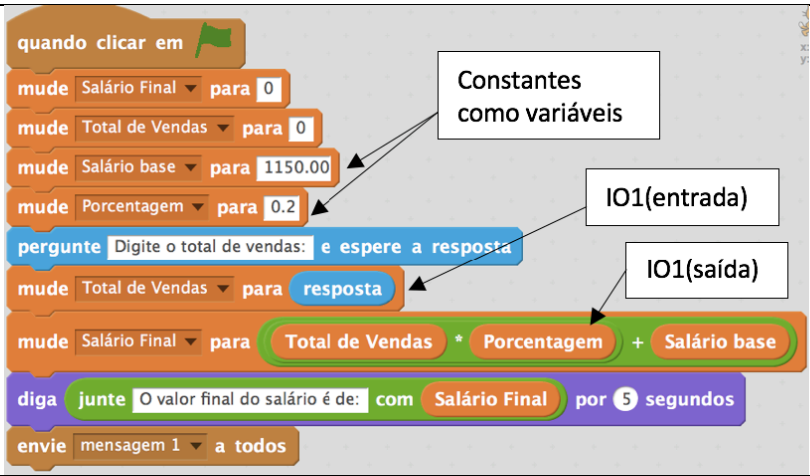
Fonte: Elaborado pela autora.

Nas atividades do <u>ambiente de programação</u>, João manifestou o invariante operatório em todas as situações, começando por seu planejamento. Conforme pode ser visto nos seus Protocolos, João apresenta uma organização prévia muito interessante para cada situação a ser resolvida, o que caracteriza o seu conhecimento sobre programação. Com isso, percebe-se o uso frequente de variáveis para a leitura de valores numéricos pelo programa que não são, necessariamente, variáveis na situação matemática. Neste sentido, João manifesta o IO1 a partir de três aspectos. O primeiro refere-se à associação entre as variáveis da situação e as variáveis da programação. O segundo, à atribuição de valores para a variável de entrada, seguida de sua leitura pelo programa a fim de calcular o valor correspondente de saída. O terceiro aspecto é que João considerou a inserção das constantes “a” e “b” das Funções Afim por meio de variáveis na programação.

No Quadro 6.11, apresento recortes das programações e excertos das falas de duas situações que caracterizam os três aspectos discutidos. Com isso, vejo que o mesmo teorema em ação do diagnóstico é manifestado novamente, só que agora de maneira mais explícita na forma operatória.

Quadro 6.11 - Manifestação do IO1 no Scratch, por João

(continua)

SP1(a)	FO	
	FP	– ***V: ... Vi que criaste uma variável para o 1,40 e 2,50. Por quê?*** – ***J: Na verdade poderia já ter definido como constante, mas para outros programas, caso precise modificar, daí teria de alterar todo o programa por que estaria na linha de código.*** – *V: Ah, entendi, assim fica mais fácil mudar os valores de 1,40 e 2,50. Se eu quisesse fazer um programa mais geral, como poderia fazer?* – *J: Daí eu só altero o valor da km e da bandeirada na variável.* – *V: Daí tu faria pergunta?* *J: Sim...*
SP2(a)	FO	

(conclusão)

SP2(a)	FP	– ***V: Quais são as variáveis?*** – ***J: Seriam o salário final, o total das vendas, a base do salário e a porcentagem pedida****.* – *V: E na situação matemática?* – *J: Seria o total das vendas a variável.* – *V: Só?* – *J: Mais o salário final.* – *V: E esses outros?* – *J: São as constantes.* – ***V: Ok, tu consideras como variável no programa, conforme já explicaste, para dar a ideia de usar o programa para outros valores, é isso?*** – ***J: Sim.***

Fonte: Elaborado pela autora.

6.2.2 Taxa de variação constante (IO2)

No diagnóstico, João manifesta a forma operatória do invariante a partir da noção mais pragmática, já discutida na análise do Alan, em que multiplica o coeficiente “a” pela variável independente. Já na forma predicativa, vemos a noção de variação constante. Na SD1, João compreende que o coeficiente 3 da Função s = 3t + 4 é responsável pelo movimento dado ao corpo, ou seja, a cada instante que passa, a posição do corpo aumenta 3 metros, mas confunde os conceitos de velocidade e aceleração. Na SD2, compreende que o 8 da Função f(x) = 8x + 15 representa a variação nos preços do parque. Com isso, é possível dizer que João manifesta o seguinte teorema em ação: **numa função do tipo f(x) = ax + b, a cada unidade de variação em x, há uma variação constante em f(x) determinado pelo coeficiente “a”.** No Quadro 6.12, apresento excertos que caracterizam essas interpretações.

Quadro 6.12 - Manifestação do IO2 no diagnóstico, por João

(continua)

S	FO	FP
SD1(a)	Substitui os 30 segundos na variável t da Função dada s = 3t + 4. s = 3.30 + 4 s = 94m s = 90 + 4	– ***V: O que significa isso que falaste “o s varia de acordo com o tempo”?*** – ***J: A cada instante o espaço vai ser diferente por causa da aplicação da aceleração.*** *[...]* – *V: Se o 3 não existisse nessa função, o que aconteceria com ela?* – *J: Não haveria movimento de acordo com o tempo. O corpo estaria parado.* – *V: Mas se tivesse o 3 e no quatro tivesse zero?* – *J: Daí teria só o deslocamento pelo tempo.*

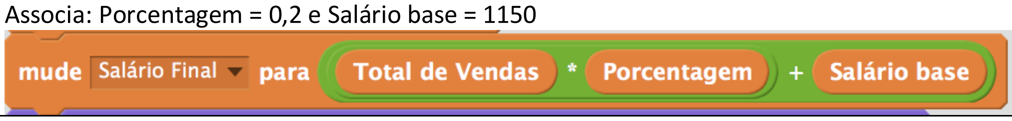
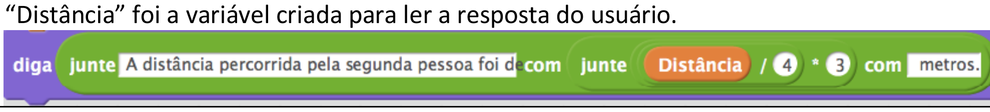
(conclusão)

SD1(d)	Escreve na folha: “3m/s pois a aceleração é 3t”.	– *V: A letra (d), me explica, qual o deslocamento para cada instante que passa, o que fizeste na questão?* – ***J: Seria os 3 m/s. Porque para cada segundo ele aumenta 3 metros, segundo a aceleração que está na fórmula.*** – *V: Tu estás me dizendo que 3m/s é aceleração. Tu lembras lá da Física qual é a unidade de medida da aceleração?* – *J: m/s e a aceleração da gravidade seria m/s².* – *V: E como é a unidade de medida da velocidade?* – *J: Pode ser tanto m/s como km/h.*
SD2(a)	Na função modelada f(x) = 8x + 15, posiciona o 8 para multiplicar pelo x.	– *V: Se o 15 não existisse?* – *J: Seria só o valor por brinquedo.*

Fonte: Elaborado pela autora.

No <u>ambiente de programação</u>, João manifesta as duas noções discutidas anteriormente e o mesmo teorema em ação. A noção mais pragmática é representada nos códigos de programação pelas operações de multiplicação e divisão realizadas com a variável dependente (forma operatória). Já a noção de variação constante surge nas suas explicações (forma predicativa). No Quadro 6.13, apresento as ideias representadas por João sobre a SP1, SP2, SP4 e SP5.

Quadro 6.13 - Manifestação do IO2 no Scratch, por João

SP1(a)	FO	Associa: Valor 1 = 1,40 e Valor 2 = 2,50 
	FP	– *V: Ótimo. A cada um km que passa quanto que eu tenho que pagar a mais?* – *J: **A cada km seria 1,40 reais**.* – *V: Ok. Tentando relacionar com a situação 1 do diagnóstico, daria para dizer que o 1,40 tem a mesma função que o 3? Por quê?* *J: Sim, por causa que no caso só mudando o conceito, que seria a questão da aceleração, **seria um multiplicador da variável recebida**.*
SP2(a)	FO	Associa: Porcentagem = 0,2 e Salário base = 1150 
	FP	– *V: Qual é a diferença entre o 1150 e os 20%?* – *J: A aplicação dele.* – *V: Como assim?* – *J: Um seria um fixo e o outro **uma fração do valor.*** – *V: Um é uma constante fixa e outro é uma constante que multiplica pela variável, é isso?* – *J: Sim.*
SP5	FO	“Distância” foi a variável criada para ler a resposta do usuário. 
	FP	– *V: O que significa o ¾ da tua função?* – *J: O quanto a segunda pessoa correu em relação a primeira.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim como Alan fez na SP3, João também utilizou o teorema em ação nas suas várias descrições, execuções, reflexões e depurações do seu programa. Na SP3(a), que não necessitava o uso do Scratch, mas solicitava a descoberta do modelo matemático do movimento do gato no vídeo, João procura descrever matematicamente a relação entre as variáveis por meio de raciocínio. Tendo em vista que o estudante não havia resolvido a SD3 do diagnóstico (que solicitava a modelagem da lei da função a partir do gráfico) e na entrevista não soube falar sobre a questão, podemos dizer que, no momento da pesquisa, ele não tinha esquemas relacionados a procedimentos formais da Matemática para encontrar a lei da função dados dois de seus pontos.

Neste sentido, sua elaboração da SP3(a) aconteceu mediante a estratégia de estabelecer uma lógica e fazer testes. Primeiramente, percebeu a relação "x anda 10 e y anda 5" e estabeleceu o modelo $y = (x + 10)/2$. Ao testar x = -200 fazendo contas no papel, não encontrou o correspondente y = -100 que ele observou ser o par ordenado de -200 no vídeo. Depois mudou para $y = (x + 10) * 2$ e ao testar x = -200 também não encontrou y = -100. Resolvi intervir. Mostrei o vídeo novamente, fazendo pausas para que visse os valores das coordenadas até que ele chegou à função $y = \frac{x}{2}$. O que vemos, principalmente quando ele escreveu x + 10, é uma tentativa de estabelecer uma relação envolvendo os acréscimos que x e y recebem a cada movimento na tela. Isso indica que ele percebe a variação envolvida na função e que a variação de x influencia na variação de y, mas foi quando percebeu a relação proporcional existente entre as coordenadas dos pontos em que o gato do vídeo passava que conseguiu elaborar o modelo correto. Assim, explicita o seguinte teorema em ação: **se a cada passo em x é dado meio passo em y e a abcissa é o dobro da ordenada nos pontos, então, a Função que descreve o movimento é y = x/2 ou y = 0,5x.**

Na SP3(b), em que precisava elaborar um programa, foi possível ver nos códigos a aplicação na forma operatória dessas ideias de "x anda 10 e y anda 5" quando João: criou as variáveis x e y, inseriu para cada uma os valores das coordenadas iniciais (-200, -100), usou um comando de movimento "vá para..." para que o ator se posicionasse nessas coordenadas no início do movimento e usou o mesmo comando de movimento para que ele adicionasse 10 ao x e 5 ao y dentro de um comando de controle, no caso, "repita até...". Mais adiante, após alguns testes sem sucesso, percebeu que o programa que elaborou não estava mudando o valor contido nas variáveis, assim, inseriu um comando de “muda x para x + 10” e “mude y para y + 5”.

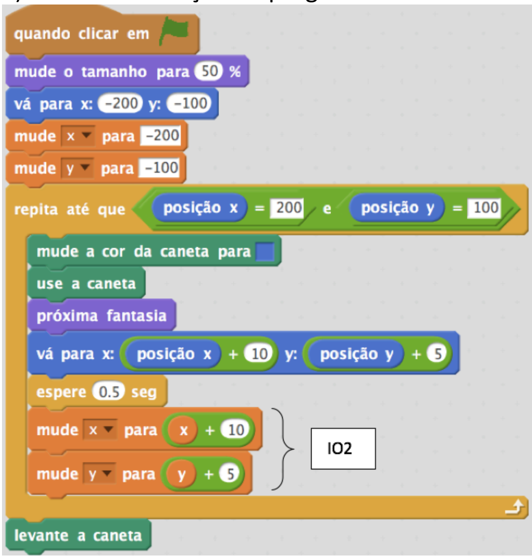
Ao final da atividade, faço um questionamento para João, que não foi feito para Alan, sobre o que aconteceria com a função f(x) = 2x e f(x) = 0,5x + 50. Para o primeiro caso, percebe rapidamente a relação proporcional entre os valores de x e y. Para a segunda, inicialmente João tentou projetar onde a nova função passaria, então, mudou os pontos iniciais do programa e o valor associado à variável y, colocando “y + 25”. Fez o teste e percebeu que não deu certo. Voltou para “y + 5” e viu que deu certo. Assim, percebeu que as duas funções, y = 0,5x e y = 0,5x + 50 possuem a mesma variação constante. No Quadro 6.14, apresento essas ideias de João representadas nos códigos de programação e nas falas, o que nos possibilita interpretar os seguintes teoremas em ação: **i) nas funções f(x) = 0,5x e f(x) = 2x, a relação entre x e y é proporcional ao valor do coeficiente “a”; ii) nas funções y = 0,5x e y = 0,5x + 50, a relação de crescimento entre x e y é a mesma, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta meia unidade.**

Quadro 6.14 - Manifestação do IO2 na SP3(b), por João

(continua)

S	FO	FP
SP3(b)	1) Faz um planejamento: criar variáveis, iniciar em x = -200 e y = -100, repetir o movimento até y = 100, com y + 5 e x + 10. 2) Primeira elaboração do programa:  O gato não sai do lugar.	– *V: Me explica o plano.* – ***J: Criar as variáveis x e y, já atribuo o valor a elas de -200 e -100, e vai fazer uma repetição, y já tendo um valor de -100, até chegar no valor de 100, positivo, sendo que a cada repetição aumenta 5, e o x aumenta 10.*** Depois de fazer a última elaboração do programa, pergunto: – *V: O que tem a ver esse 0,5 do teu modelo matemático com o movimento do gato?* – *J: **Seria a multiplicação do x para resolver o y.*** – *V: A cada variação do x, a cada unidade que o x aumenta, quanto aumenta no y?* – *J: 0,5* *[...]* – *V: **Se eu tivesse um modelo que fosse y = 2x.** O que ia acontecer?* – *J: ...o valor do x ia multiplicar com 2.* – *V: Se iniciasse em x = -50 e y = -100, (aponto na tela com o mouse) o que ele ia fazer?*

(conclusão)

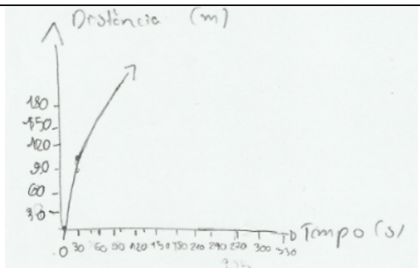
<table>
<tr>
<td></td>
<td>3) Algumas modificações e elaborações intermediárias (tentativas e erros).
4) Última elaboração do programa:

</td>
<td>– J: Ia passar pela origem de novo, daí vai dar um passo no x e o dobro no y e os pontos também ficam o dobro, quer dizer, x vai ser a metade agora.
– V: E se fosse y = 0,5x + 50, usando x = -200 e y = -50. Onde ele vai passar?
– J: Não vai passar mais pela origem.
– V: E será que essa relação do x e do y continua? Ou seja, x aumenta 10 e o outro 5?
– J: Não, acho que tem que mudar.
Ele testa com o mesmo aumento, depois muda para y + 25 e não dá certo. Volta ao y + 5.
– V: O que está acontecendo? Qual a diferença entre essas duas construções (refiro-me a y = 0,5x e y = 0,5x + 50)?
– J: ... Ah, porque a lógica aqui aumenta o mesmo.
– V: Por que aumenta o mesmo? Mudamos a função, tem mais 50, mas a lógica de aumentar 10 e aumentar 5 continua a mesma. Por quê?
– J: Porque os valores são proporcionais ... e esse (50) só é um acréscimo ao valor anterior.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

6.2.3 Taxa fixa (IO3)

No diagnóstico, João manifesta sua ideia da taxa fixa como sendo o “coeficiente b” da função, o “valor inicial do movimento” e, portanto, o ponto no eixo y em que o gráfico deve iniciar (na SD1), e um “valor constante” que não está relacionado à variável independente (na SD2). Essas ideias podem ser interpretadas com os mesmos teoremas em ação apresentados por Alan: **i) a constante 4 da função s = 3t + 4 indica a posição inicial do movimento; ii) a constante 15 do problema é o coeficiente b da função f(x) = ax + b, pois indica o valor fixo de entrada no parque, independentemente de usar brinquedos.** No Quadro 6.15, mostro as resoluções e excertos que expressam a forma operatória e predicativa do IO3.

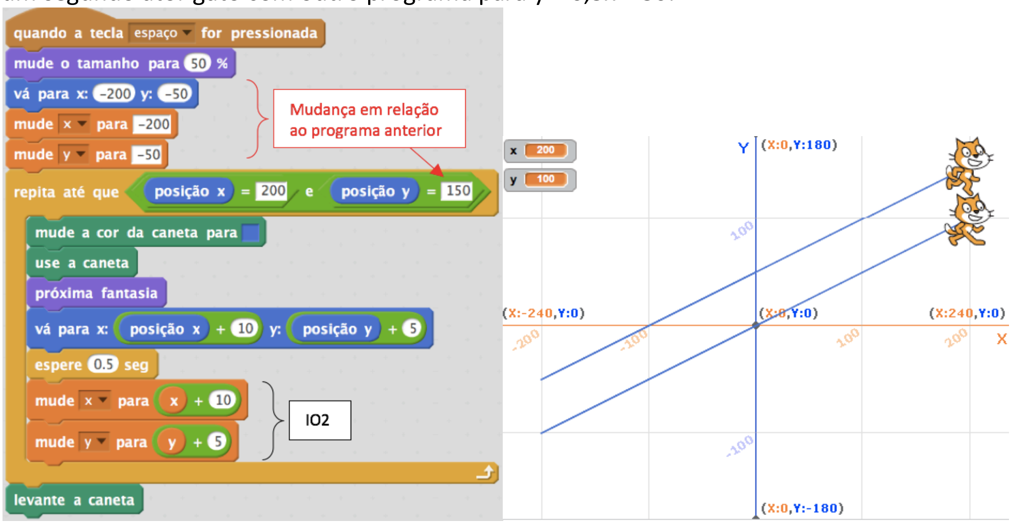
Quadro 6.15 - Manifestação do IO3 no diagnóstico, por João

S	FO	FP
SD1(a)	S = 3.36 + 4 S = 94m S = 96 + 4	– *V: Mas se tivesse o 3 e no quatro tivesse zero?* – *J: Daí teria só o deslocamento pelo tempo.* – *V: E a posição inicial dele seria qual?* – *J: zero.*
SD1(c)	Só apresenta a resposta zero.	– *V: Na letra (c), queria saber por que colocaste zero como resposta.* – *J: Me confundi.* – *V: Por que tu achas isso?* – ***J: Porque o espaço seria 4 e não zero.***
SD1(e)		– *V: E o gráfico começa no zero?* – *J: **Deveria começar no 4.***
SD2(a)	Depois de ter modelado a função f(x) = 8x + 15, faço o questionamento.	– *V: Mas se fosse zero no lugar do 8?* – *J: **Seria somente o valor da entrada.*** – *V: Daí como ia fazer com os brinquedos?* – *J: Não seria pago valor por brinquedo.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Nas situações realizadas no <u>ambiente de programação</u>, João manifesta as mesmas ideias do diagnóstico sobre o IO3 e, ainda, associa a constante “b” a uma variável da programação no SP1, SP2 e SP4 por entender que é possível elaborar um programa que considere outras situações semelhantes, com outros coeficientes. Além disso, a partir da ordem da atividade SP3 e dos questionamentos, foi possível perceber a compreensão de João sobre a diferença entre uma Função Afim com b = 0 e uma função com b ≠ 0. Nesse sentido, identifico os seguintes teoremas em ação: **i) na função f(x) = 1,40x + 2,50, o 2,50 indica o valor inicial; ii) na função f(x) = 0,2x + 1150, o 1150 indica a constante fixa; iii) a taxa do buffet livre não multiplica pela quantidade de comida consumida**. No Quadro 6.16, apresento essas ideias a partir da forma operatória e predicativa que o estudante manifestou.

Quadro 6.16 - Manifestação do IO3 no Scratch, por João

SP1(a)	FO	Associa: Valor 1 = 1,40 e Valor 2 = 2,50 
	FP	– *V: Ok. Tentando relacionar com a situação 1 do diagnóstico [...] o 4 teria a mesma função deste 2,50?* *J: **Sim, são valores iniciais**.*
SP2(a)	FO	Associa: Porcentagem = 0,2 e Salário base = 1150 
	FP	– *V: Qual é a diferença entre o 1150 e os 20%?* – *J: A aplicação dele.* – *V: Como assim?* – *J: **Um seria um fixo** e o outro uma fração do valor.* – *V: Um é uma constante fixa e outro é uma constante que multiplica pela variável, é isso?* – *J: Sim.*
SP3(b)	FO	Quando faço o questionamento sobre a diferença entre y = 0,5x e y = 0,5x + 50, ele organiza um segundo ator gato com outro programa para y = 0,5x + 50: 
	FP	Resposta do questionamento, referente ao + 50 da “nova” função. – *J: ... e esse (50) só é um acréscimo ao valor anterior.*
SP4(a)	FO	Taxa = 17 e Valor por Kg = 32,90 
	FP	– *J: [...] se o **peso vezes o valor por quilo** for maior ou igual a taxa, vai pagar o livre.*

Fonte: Elaborado pela autora.

6.2.4 Correspondência biunívoca (IO4)

João manifesta o invariante operatório “correspondência biunívoca” <u>no diagnóstico</u>, com a ideia de “ida”, de “volta” (reversibilidade) e de bijeção. A operacionalidade do conceito aparece nas estratégias de substituição de uma variável por um valor numérico para encontrar o valor numérico correspondente da outra variável. Assim, manifesta os teoremas em ação: **i)**

numa função do tipo f(x) = ax + b, cada valor numérico de x corresponde sempre um único valor numérico de y e reciprocamente; ii) para encontrar o valor de x tendo o valor de f(x), faz-se operações inversas às operações feitas quando calcula-se a f(x) a partir de x. No Quadro 6.17, apresento a forma operatória e predicativa do invariante a partir da resolução que João apresentou e de suas explicações.

Quadro 6.17 - Manifestação do IO4 no diagnóstico, por João

(continua)

S	FO	FP
SD1(a)	Para achar o deslocamento em 30 segundos, usando a função s = 3t + 4, fez a substituição: $S = 3.30 + 4$ $S = 90 + 4$ $S = 94m$	– *V: Me explica o que fizeste na situação 1.* – *J: Lembrei do que estudei em física sobre deslocamento e apliquei a fórmula do deslocamento basicamente. E consegui resolver ela.* – *V: O que significa aplicar a fórmula?* – *J: Para mim seria substituir os dados das variáveis pelos dados que possuem no problema.* – *V: Qual a relação do 30 com o 94?* – *J: **Que inserindo 30 o resultado é 94**.*
SD1(b)	Para achar o tempo para um deslocamento de 150 metros, fez a substituição: $S = 3t + 4$ $150 = 3t + 4$ $150 - 4 = 3t$ $147 = 3t$ $\frac{147}{3} = t$ $t = 49s$	– *V: Como pensou na letra (b)?* – *J: Igualei o espaço final a 150 que pede, utilizei a fórmula dada, assim consegui descobrir o tempo dele formando uma equação de 1º grau.* – *V: Tu sabes me dizer a diferença da letra (b) para a letra (a)?* – *J: **Na letra (a) dá o tempo e quer descobrir o espaço final. Na letra (b) já dá o espaço final e pede para descobrir o tempo.*** – *V: Seria o contrário?* – *J: É meio que uma razão inversa.*
SD2(a)	$y = 15 + 8x$	– *V: Qual é a variável dependente e a independente?* – *J: A dependente seria o 8x e a independente o y.* – *V: Para eu ter o preço final eu dependo do quê?* – *J: Da quantidade de brinquedos que seriam utilizados no parque.* – *V: Então se o y é o preço final ela é a variável...* – *J: dependente.*

(conclusão)

<table>
<tr><td>SD2(b)</td><td>Para achar o preço ao usar 7 brinquedos, fez a substituição na função f(x) = 8x + 15:

$y = 15 + 8 . x$ $y = 15 + 56$
$y = 15 + 8 . 7$ $y = 71.$</td><td>– V: O que fizeste?
– J: Eu atribui o valor 7 a variável x e multipliquei pelo valor por brinquedo, depois adicionei o valor da entrada e cheguei no resultado final.
– V: Tem alguma restrição de valores para colocar no lugar do x?
– J: Para esse problema só não poderia valores negativos.
– V: E se uma pessoa usar 10 brinquedos
– J: Substituiria o x por 10 ao invés do 7.</td></tr>
<tr><td>SD2(c)</td><td>Para achar o número de brinquedos a serem usados com R$ 100,00, fez a substituição, mas errou na subtração 100 - 15:

$y = 15 + 8x$
Poderá usar 9 brinquedos.
$100 = 15 + 8x$
$75 = 8x$
$\frac{75}{8} = x$
$x = 9,375$</td><td>– V: Como fez essa?
– J: Atribui o valor final de 100 reais a y, deixando apenas uma variável de incógnita que seria a quantidade de brinquedos, transferi o 15 que era o valor de entrada, ficando 75. Depois passei o 8 dividindo chegando ao resultado final que é a quantidade de brinquedos.
– V: Tu achas que teria como, nessa situação, eu inserir dois valores de x e obter um valor de y? Por exemplo, inseri 12 e inseri 15 e deu o mesmo resultado para as duas. Tem como isso acontecer?
– J: Talvez se fosse uma equação do 2º grau.
– V: Por quê?
– J: Porque cada um vai dar um valor distinto.
– V: Posso dizer que cada valor de x é correspondente ao valor de y?
– J: Sim. Nessa função sim.</td></tr>
</table>

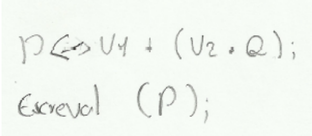
Fonte: Elaborado pela autora.

Na programação, João manifesta as ideias do IO4 de "ida" e "volta" tanto na forma operatória de seus planejamentos e códigos de programação quanto na forma predicativa, de forma mais evidente na SP1 e SP2. Na SP1(b), em que precisava estabelecer a relação reversa da Função Afim "P = 1,4q + 2,5" para encontrar o valor de "q" inserindo o valor de "P", faz o cálculo no papel antes de inseri-lo no Scratch considerando as operações inversas necessárias para o cálculo. Vejo, então, a manifestação dos mesmos teoremas em ação do diagnóstico. O Quadro 6.18 mostra as formas operatórias e predicativas da manifestação do IO4 no Scratch.

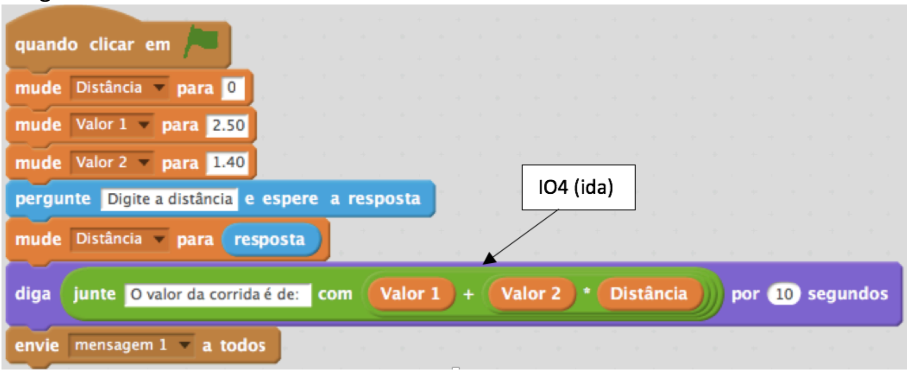
Quadro 6.18 - Manifestação do IO4 no Scratch, por João

(continua)

<table>
<tr><td rowspan="2">SP1(a)</td><td>FO</td><td>
Parte do planejamento:



Programa final:



Teste para distância igual a 10 km.

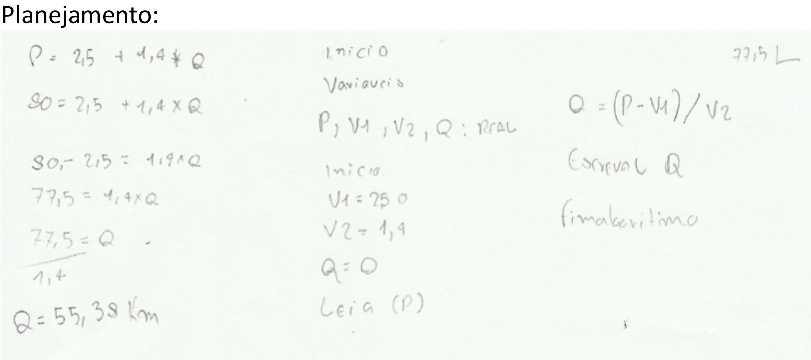
</td></tr>
<tr><td>FP</td><td>

– *J: ... a associação das variáveis e a leitura da incógnita que é o valor da distância percorrida...o valor da fórmula final ... e depois fazendo o cálculo necessário e a exibição do resultado na tela.*

[...]

– ***V: Se eu inserisse 20km ou 40km, os resultados serão diferentes ou poderiam ter valores iguais?***

– ***J: Cada um vai ter o seu valor no resultado final, não tem como dar o mesmo valor.***
</td></tr>
<tr><td>SP1(b)</td><td>FO</td><td>
Planejamento:

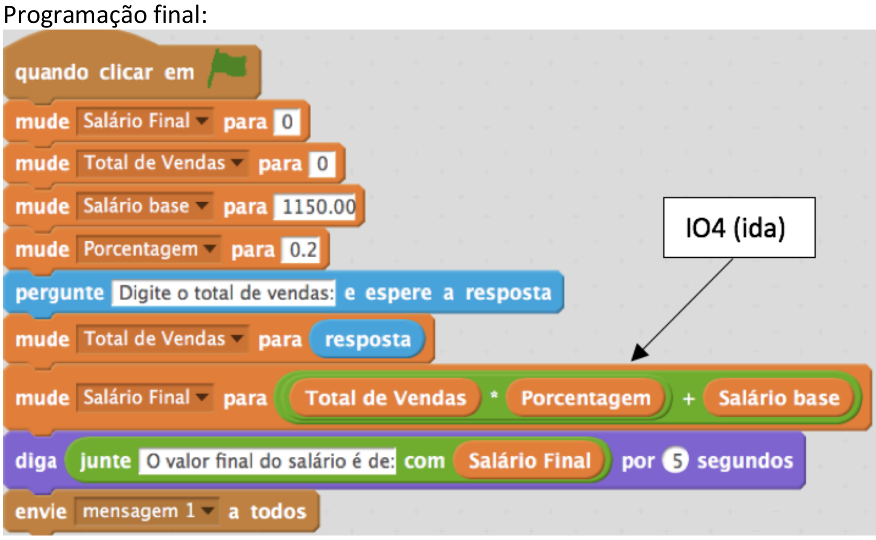


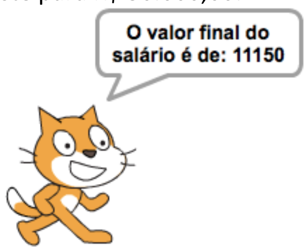
Programa final:

</td></tr>
</table>

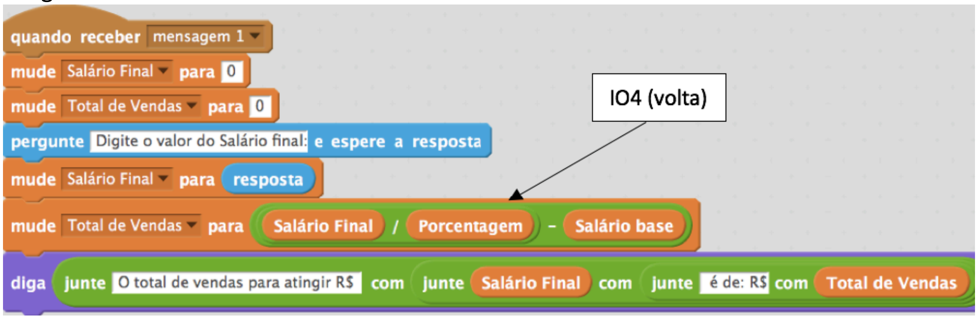
(continuação)

<table>
<tr><td rowspan="2">SP1(b)</td><td>FO</td><td>Teste para R$ 80,00:

</td></tr>
<tr><td>FP</td><td>– J: Aqui seriam as mesmas variáveis com o acréscimo de mais uma. Mas agora ao invés de ser a leitura da distância percorrida, será a leitura do valor que ele tem.
– V: ok.
– J: Daí é feito basicamente uma inversão da operação.
– V: E para isso precisou fazer no papel? Por quê?
– J: Sim, precisei. Para saber a ordem das operações.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SP2(a)</td><td>FO</td><td>Parte do planejamento:
Salário_final <- ((total_vendas * porcentagem) + Salário_base;
Escreval (Salário_final);
fimalgoritimo
Programação final:


Teste para R$ 50.000,00:

</td></tr>
<tr><td>FP</td><td>– V: Como fizeste?
– J: Zerei o salário final e o total de vendas, coloquei os valores dados para o salário base e a porcentagem. Depois ele lê o total das vendas que foi inserido, faz o cálculo e escreve a resposta, o salário final.</td></tr>
</table>

(conclusão)

<table>
<tr><td rowspan="2">SP2(b)</td><td>FO</td><td>Parte do planejamento:
total_vendas ((Salário_final / porcentagem) - salário_base);
Escreva (total_Vendas)
fimalgoritmo
Programa final:


Teste para R$ 7.500,00:

</td></tr>
<tr><td>FP</td><td>– V: Me explica.
– J: Inseri as variáveis, que são as mesmas, atribui o valor do salário base e a porcentagem. Mas nesse caso eu leria o salário final necessário e com isso para poder descobrir o Total das vendas eu faria o salário final dividido pela porcentagem, como na outra ela multiplicou, diminuindo o salário base para saber o total das vendas.
– V: Tu não fizeste cálculo matemático nessa questão, como fizeste na letra (b) da anterior, por quê?
– J: Porque é basicamente o mesmo princípio da questão anterior.
– V: Se não tivesse feito a anterior, teria feito o cálculo no papel?
– J: Sim.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

6.2.5 Percepções gerais sobre as manifestações de João

De modo geral, João manifestou as representações dos quatro invariantes operatórios nas situações com o Scratch, tanto na forma operatória revelada nos códigos de programação quanto na forma predicativa explicitada pelas falas. Seus conhecimentos prévios observados no diagnóstico o ajudaram na elaboração dos planos, na montagem dos códigos e na organização dos cálculos matemáticos de todas as situações. A linguagem usada em seus planos iniciais estava muito próxima das linguagens de programação em texto, evidenciando sua apropriação sobre programação.

Neste sentido, em todas as situações, usou os planos como referência para elaborar os programas. Na SP1, SP2 e SP5, a primeira descrição, execução e reflexão feitas dos programas já foram suficientes para encontrar a solução da situação, indicando que as situações não foram muito desafiadoras. No entanto, na SP3 e SP4, após a primeira descrição, execução e reflexão, foi necessário arrumar o plano inicialmente criado e, portanto, o programa, a fim de readequá-lo, ou seja, foi feita a depuração do código. Nessas duas situações, João manifestou de forma mais evidente as etapas da espiral da conceituação, indicando que essas foram mais desafiadoras e proporcionaram a reformulação das estratégias usadas, implicando também em novos usos dos invariantes operatórios.

Logo, considero que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios de João esteve relacionado às etapas da espiral da conceituação de forma significativa dependendo do nível de desafio proporcionado pela situação. Quanto mais desafiadora a situação, mais as etapas da espiral são evidenciadas. Assim, na programação de computadores, principalmente na SP3, os invariantes puderam estar, de certa forma, mais visíveis, mais acessíveis à compreensão e, portanto, à reformulação.

6.3 Algumas considerações sobre a manifestação dos invariantes operatórios na estratégia didática mediada pela programação de computadores

Neste tópico, trago algumas considerações sobre as análises dos dois estudantes, no sentido de apresentar aspectos interessantes que encontrei nas manifestações dos invariantes operatórios. Isso possibilita explicitar a relevância do estudo feito a fim de indicar a resposta ao problema de investigação que retomo aqui: como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *campus* Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores?

Com base no que foi apresentado anteriormente nas análises de Alan e João, considero que foi possível verificar empiricamente a manifestação das representações e das compreensões dos quatro invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim numa estratégia didática mediada pela programação de computadores a partir da forma operatória, que permitiu as elaborações dos programas, e da forma predicativa, que permitiu falar sobre as construções e as ideias envolvidas.

Nesse sentido, percebo dois aspectos que indicam uma possibilidade diferenciadora e potencializadora para o ensino e a aprendizagem do conteúdo matemático das Funções com o uso da programação de computadores, que trato nos itens 6.3.1 e 6.3.2 que seguem. Ao mesmo tempo, considero um terceiro aspecto, tratado no item 6.3.3, que retomo das discussões teóricas e que acredito ser ratificado com os resultados da pesquisa de campo.

6.3.1 Manifestação de noção mais ampla de variável

Os dois estudantes representaram em seus códigos de programação e nas respostas dadas às perguntas que fiz o uso do invariante operatório IO1 - variáveis numa perspectiva mais ampla do que comumente é tratada nas atividades sobre Funções na escola básica. Isto é, além das variáveis tradicionais x, f(x), tempo (t), deslocamento (s), preço (P), quilômetros (q), entre outras, Alan considerou a constante “a” de algumas Funções como sendo uma variável e João considerou as duas constantes “a e “b” de muitas das situações como sendo variáveis. Isso ocorreu ao projetarem o uso do programa para outras situações semelhantes em que tais constantes poderiam não ser as mesmas.

No caso do estudante Alan, há uma modificação do seu teorema em ação usado no diagnóstico quando faz o programa no Scratch. No diagnóstico, ele afirma sua ideia sobre quem são as variáveis dependente e independente e quem são os coeficientes nas funções das situações, apresentando a ideia tradicional do invariante, conforme pode ser revisto nos Quadros 6.1, 6.3 e 6.6. Quando elabora seu programa, usa o coeficiente “a” da função como uma variável e, na sua explicação sobre esse uso, no caso da SP1(a) com a Função P = 1,40q + 2,50, ratifica a ideia de que o uso de 1,40 como constante ou variável dependerá “se for só para aquele taxi ou para a cidade inteira esse preço. Porque se for para a cidade inteira (o mesmo preço), é uma constante” (excerto do Quadro 6.2). No Quadro 6.19, retomamos os teoremas em ação de Alan no IO1 para mostrar a ampliação da ideia.

Quadro 6.19 - Teoremas em ação do Alan sobre o IO1 – variável.

Teorema em ação no diagnóstico	**Na função f(x) = ax + b, x e f(x) são as variáveis, em que o valor de f(x) depende do valor de x.**
Teorema em ação no Scratch	**Na Função f(x) = ax + b, x e f(x) são as variáveis, em que o valor de f(x) depende do valor de x, mas o coeficiente "a" pode ser considerado uma variável se concebermos a Função para outras situações de contexto semelhante mas com o valor de "a" diferente.**

Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação ao João, a ideia de considerar os coeficientes "a" e, agora, "b" também como variáveis já é manifestada desde o diagnóstico quando o questionamos (ver Quadro 6.10). Já, nas situações com o Scratch, ele manifesta a ideia não apenas nas explicações, mas nos códigos de programação quando associa os coeficientes às variáveis (ver Quadro 6.11). Portanto, não há uma modificação evidente em seu teorema em ação do diagnóstico, mas o que percebemos é a possibilidade de operacionalização desta ideia no Scratch, ou seja, com o ambiente de programação, a noção foi manifestada na forma operatória, foi representada de forma explícita nos códigos de programação, e não apenas na forma predicativa. No Quadro 6.20, mostro o teorema em ação de João sobre o IO1, que é ainda mais amplo do que o de Alan, pois inclui o coeficiente "b".

Quadro 6.20 - Teorema em ação do João sobre o IO1 – variável.

Teorema em ação no Scratch	**Na Função f(x) = ax + b, x e f(x) são as variáveis, em que o valor de f(x) depende do valor de x, mas os coeficientes "a" e "b" podem ser considerados variáveis se concebermos a Função para outras situações de contexto semelhante, mas com o valor de "a" e "b" diferentes.**

Fonte: a autora.

Julgo que estas estratégias manifestadas sobre considerar as constantes como variáveis merece atenção, pois o ambiente de programação possibilitou que os estudantes revelassem concretamente uma nova perspectiva do conceito de variável, mesmo que tal ideia já tivesse sido desenvolvida ou estivesse em desenvolvimento anteriormente à atividade da pesquisa, no caso de João. Essa nova perspectiva do conceito pode ajudá-los na compreensão de outros tipos de Funções, como as Funções de duas ou mais variáveis estudadas no Ensino Superior de cursos que envolvem matemática avançada, em que, a partir dos valores de duas (x, y), três (x, y, z) ou mais variáveis independentes, se determina o valor da variável dependente f(x, y) ou f(x, y, z) (ANTON; BIVEN; DAVIS, 2014a). Ao mesmo tempo, mostra o nível de generalização e de abstração do raciocínio matemático que possuem.

6.3.2 Manifestação da noção de taxa de variação a partir do movimento

A terceira situação proposta nas atividades com o Scratch (SP3) mostrou-se mais desafiadora aos dois estudantes, pois associou movimento, variáveis (IO1) e o conceito de variação constante (IO2), que, provavelmente, nunca tinham sido relacionados dessa forma antes. Isso proporcionou desequilíbrios nos conhecimentos prévios deles, tanto de matemática quanto de programação, levando-os a apostar mais em estratégias de tentativas e erros. Neste sentido, é possível dizer que seus esquemas e teoremas foram testados e reformulados a fim de adaptarem-se à nova situação.

No caso de Alan, num primeiro momento, ele não relaciona seu teorema em ação do diagnóstico, tampouco o modelo equivocado elaborado na SP3(a) – com uso de procedimentos algébricos –, para o planejamento e construção do programa para a SP3(b). Quando não consegue fazer o seu ator andar na direção que precisava por meio do ângulo de inclinação, desiste da estratégia (que não era ruim, porém faltavam-lhe elementos conceituais) e passa a estabelecer a relação de variação entre x e y, ou seja, “x anda 20 e y anda 10”. Com as etapas de descrição, execução, reflexão e depuração, Alan encontra o caminho para fazer o ator andar e descrever a reta conforme o vídeo da situação. No entanto, foram necessárias intervenções no sentido de fazer com que ele relacionasse seu programa com seu modelo matemático equivocado da SP3(a) e que percebesse a relação entre o coeficiente “a” e a variação do y em relação a x no movimento do ator. A partir disso, percebe também a relação proporcional entre os valores das coordenadas x e y. No Quadro 6.21, retomo os teoremas em ação de Alan, no qual podemos ver uma ampliação da noção do conceito incluindo agora a ideia de proporcionalidade. No entanto, consideramos teoremas locais, pois estão centrados na situação específica das Funções $f(x) = 0,5x$ e $f(x) = x/3$. Para ter certeza de uma generalização da ideia, seria preciso ter proposto a realização da tarefa para outros tipos de funções, variando os valores dos coeficientes “a” e “b”.

Quadro 6.21 - Teorema em ação do Alan sobre o IO2 – taxa de variação constante

Teorema em ação no diagnóstico e no Scratch	**Numa função do tipo f(x) = ax + b, a cada unidade de variação de x, há uma variação constante em f(x) determinado pelo coeficiente "a".**
Teoremas em ação na SP3 do Scratch	**Na função f(x) = 0,5x, a cada unidade de variação em x, há meia unidade de variação em y e, também, os valores da ordenada são sempre a metade dos valores da abscissa.**
	Na função f(x) = x/3, os valores da ordenada são sempre um terço dos valores da abscissa.

Fonte: Elaborado pela autora.

No caso da SP3 realizada por João, há também uma diversificação do teorema em ação do diagnóstico, aplicado aos casos específicos discutidos. Primeiramente, o estudante estabelece o modelo da Função por meio da observação à regularidade com que os pontos se modificavam no vídeo e estabelece a relação proporção: f(x) = 0,5x. No entanto, para criar seu programa no SP3(b), também não usa a lei modelada e, assim como Alan, leva em conta a relação de variação "x anda 10 e y anda 5". Depois de tentativas e erros, de descrições, execuções, reflexões e depurações do código, João elabora seu programa. Quando questionado sobre a relação entre o 0,5 da função e o movimento do ator, percebe as duas noções do IO2, quando diz que "seria a multiplicação do x para resolver o y" (extraído do excerto do Quadro 6.14) e que, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta 0,5.

A partir disso, questionei sobre o que aconteceria com as funções f(x) = 2x e f(x) = 0,5x + 50, questionamento esse não planejado, para que pudéssemos ter mais clareza das ideias que ele estava manifestando. Assim, foi possível perceber sua compreensão sobre a proporcionalidade e sobre a variação constante, estabelecer os teoremas em ação e verificar que a situação experimentada com a programação, juntamente com as perguntas, possibilitou a manifestação da ideia da taxa de variação num contexto de movimento. No Quadro 6.22, trago novamente os teoremas em ação do estudante.

Quadro 6.22 - Teoremas em ação de João sobre o IO2 – taxa de variação constante

Teorema em ação no diagnóstico e no Scratch	**Numa função do tipo f(x) = ax + b, a cada unidade de variação de x, há uma variação constante em f(x) determinado pelo coeficiente "a".**
Teorema em ação na SP3 do Scratch	**Se a cada passo em x é dado meio passo em y e a coordenada de x é o dobro da de y nos pontos, então, a Função que descreve o movimento é y = x/2 ou y = 0,5x.**
	Nas funções f(x) = 0,5x e f(x) = 2x, a relação entre y e x é proporcional ao valor do coeficiente "a".
	Nas funções y = 0,5x e y = 0,5x + 50, a relação de crescimento entre x e y é a mesma, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta meia unidade.

Fonte: Elaborado pela autora.

Em síntese, percebo que a aplicação de um teorema em ação prévio numa situação de contexto diferenciado pelo uso da programação não foi automática. Foi preciso um tempo para a realização de testes e conjecturas a fim de estabelecer as novas relações necessárias e perceber que se tratava da mesma ideia manifestada anteriormente sobre a variação constante de y em relação a x. Vergnaud (1996, 2009) se refere à necessidade de propor situações diferentes sobre um mesmo conceito matemático, nas quais o estudante se sinta desafiado o suficiente para, a partir do que sabe, construir ele próprio as novas relações, pois só assim haverá desequilíbrios que possibilitem novas assimilações, acomodações e adaptações. Pelo que pude perceber, a estratégia didática com o Scratch possibilitou isso.

Após a realização dessas análises, identifiquei que diversas variações na elaboração da SP3 poderiam ser propostas a fim de explorar mais ainda o conceito de variação constante e, com isso, talvez seja possível que os estudantes generalizem mais seus teoremas. Poderíamos ampliar as Funções para que tivessem valores dos coeficientes negativos, por exemplo, em que seja possível perceber a variação de decrescimento constante em certos contextos. Também, poderíamos aproveitar o recurso de movimento do ambiente de programação e propor uma situação que foque na relação do ângulo de inclinação do ator e as coordenadas dele, possibilitando uma aplicação da fórmula do coeficiente angular da Geometria Analítica. Portanto, é bem possível que outras relações pudessem, ainda, ser exploradas.

6.3.3 A espiral da conceituação: concretização, dinamização, compreensão e reformulação dos invariantes operatórios

Nas discussões teóricas anteriores, apresentei a perspectiva de Papert (1985, 2008), que considera a programação de computadores um meio para que as crianças externalizem expectativas intuitivas, tornando-as mais evidentes e acessíveis à reflexão. Por meio deste estudo empírico, foi possível perceber as explicitações do pensamento deles por meio dos códigos, das reflexões e conjecturas que surgem na análise do que foi feito no programa e das reformulações de esquemas e teoremas em ação quando necessário. Neste sentido, considero que os invariantes operatórios das Funções Afim foram concretizados, dinamizados, compreendidos e reformulados por meio dos programas realizados.

Por concretização entendo a possibilidade de criar alguma coisa, um objeto, um programa, um micromundo, que sirva para algo, mas que esta criação não está fisicamente ao alcance. Ela existe, só que pertence ao mundo digital proporcionado pelo computador. Por dinamização entendo a possibilidade de criar movimentos e simulações na tela do computador que se utilizem de conceitos matemáticos, bem como a possibilidade de interagirmos com o que é criado.

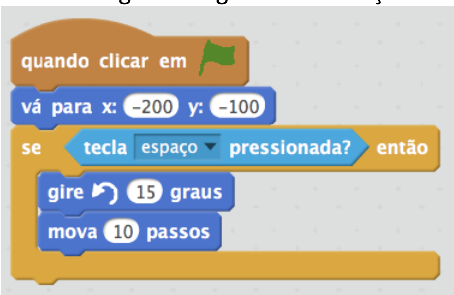
Assim, na etapa de descrição da espiral da conceituação, há a concretização dos invariantes; na etapa da execução, há a dinamização do que foi pensado, com a realização do movimento ou a interação com o usuário por meio de perguntas e respostas; na etapa da reflexão, há a compreensão do que foi feito, se a ideia empregada foi eficaz ou não; e, finalmente, na etapa da depuração, há a reformulação, se for necessário, daquilo que foi percebido na reflexão. Na necessidade de melhorias no uso e na compreensão do conceito, há repetições das etapas da espiral.

Isso foi percebido nos dois estudantes e, como exemplo, cito a realização da SP3(b) por Alan. No Quadro 6.23, mostro quatro programas mais significativos. Nessa situação, o estudante elaborou uma hipótese inicial, no P1, de uso de ângulos de inclinação para fazer o gato andar e descrever o gráfico, executou o programa, percebeu erros, refletiu sobre tais erros e reformulou o programa mais algumas vezes com essa estratégia, até chegar no P2. Com a sucessão de erros usando ângulo de inclinação, mudou a estratégia. Passou a considerar a variação que as coordenadas da posição do gato do vídeo sofriam. Estabeleceu a ideia “x anda 20 e y anda 10” e foi testando comandos a fim de encontrar a melhor descrição.

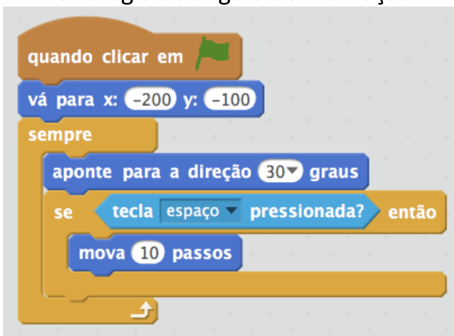
No P3, seu gato deu um passo e voltou à posição inicial (-200, -100). Com isso, percebeu que as variáveis x e y não mudavam, continuavam sendo sempre (-200, -100) e que a soma de 20 e 10 acontecia por apenas um instante. Assim, reformulou algumas vezes até estabelecer uma mudança nas próprias variáveis, no P4, com os comandos "adicione a x: 20" e "adicione a y: 10", chegando ao término da atividade.

Quadro 6.23 – Programas realizados na resolução da SP3(b) por Alan

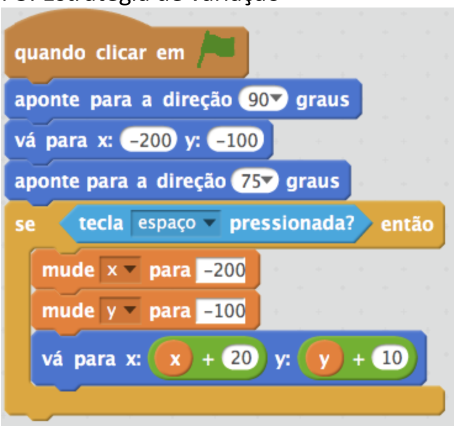
P1: Estratégia de ângulo de inclinação



P2: Estratégia de ângulo de inclinação



P3: Estratégia de variação

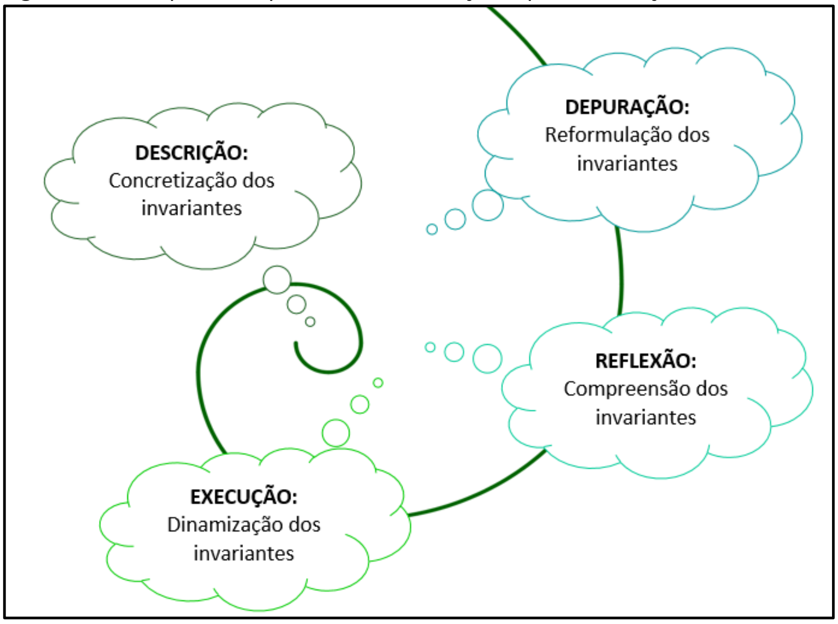


P4: Estratégia de variação

Fonte: Elaborado pela autora.

Dado o exemplo, considero que o invariante operatório IO2 – taxa de variação foi mobilizado e operacionalizado dentro de cada uma das etapas da espiral. Isso significa que, na descrição do código, houve a concretização das ideias sobre o invariante; na execução do programa, houve a dinamização das ideias estabelecidas sobre esse invariante; na reflexão sobre o programa, houve a compreensão de aspectos que estavam errados e que poderiam ser melhorados; e, na depuração do programa, houve a possibilidade de reformulação das hipóteses anteriores e o estabelecimento de novas hipóteses sobre o uso do invariante. Isso permite complementar as etapas da espiral da conceituação com elementos relacionados aos invariantes. Na Figura 6.1, retomo a ideia já delineada no Capítulo 4, mas enfatizando as quatro etapas a partir das ações que descrevo em relação aos invariantes.

Figura 6.1 – Etapas da Espiral da Conceituação a partir das ações relativas aos invariantes operatórios



Fonte: Elaborado pela autora.

Em resposta ao problema de investigação, finalizo este capítulo de discussão dos resultados apontando que essa pesquisa, a partir de todo estudo teórico e empírico realizado, permitiu mostrar que os processos de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, bem como a ampliação dos usos destes invariantes, aconteceram por meio das ações de concretização, dinamização, compreensão e reformulação proporcionados pelas etapas da espiral da conceituação a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores.

No Quadro 6.24, trago excertos das falas dos estudantes que sinalizam suas perspectivas sobre as situações realizadas com o ambiente de programação a partir de perguntas mais gerais. Estas perguntas ajudam no reconhecimento das possibilidades da programação de computadores para a identificação, desenvolvimento e manifestação de conhecimentos matemáticos.

Quadro 6.24 - Percepção dos estudantes sobre as situações no Scratch

Perguntas realizadas	Respostas de Alan	Respostas de João
– *O que tu achaste das atividades no Scratch?*	– *Acho que ... fica mais dinâmico. [...] Acho que é mais visual e mais fácil de **entender**, porque tu estás **vendo**, aqui no papel não pode **testar** tanto sem usar o braço [...]. As questões bem simples são mais fáceis de fazer no papel, mas para quem não entende a matéria, aqui é melhor, assim, **ah saquei**!*	– *Achei algumas até desafiadoras, que exigem **usar um raciocínio lógico**, não só na matemática, mas na forma como tem que **construir** [...]. Não chega a ser mais difícil, mas tem que ver a lógica de como vai **montar**, diferente do papel. Porque que tem uma ordem certa para montar...*
– *Tem alguma coisa específica que hoje tu passaste a entender melhor sobre matemática?*	– *Acho que tudo um pouco.*	– *Acho que a variação constante.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Dado o exposto no Quadro anterior, percebo que os dois estudantes entenderam que as situações realizadas com a programação de computadores proporcionaram aspectos diferenciadores em relação às situações realizadas no papel. Para Alan, o Scratch foi mais dinâmico e visual, possibilitou vários testes rápidos e poderia proporcionar a compreensão de ideias e conceitos por quem ainda não havia compreendido o conteúdo. Para João, as Situações no Scratch exigiram o uso de conceitos matemáticos, que também são exigidas nas atividades no papel, mas, além disso, exigiu o uso de lógica de programação e a necessidade de estabelecer uma organização no pensamento para elaborar o algoritmo. Tais percepções, portanto, corroboram com os resultados dessa análise, em que entender, raciocinar, ver, testar, construir e montar (verbos trazidos pelos estudantes), são ações presentes nas etapas da Espiral da Conceituação.

Por último, considero que há vantagens evidentes no uso da programação de computadores para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos se comparado com atividades matemáticas que usam, exclusivamente, o recurso analógico do lápis e do papel. Conforme já foi dito, o uso de um ambiente de programação proporciona que as ideias e hipóteses sobre uma situação a ser resolvida sejam postas em ação nos códigos de uma forma organizada e seguindo uma lógica específica. Mas isso também pode ser realizado em atividades no papel, bem como em atividades mais práticas com material manipulável. No entanto, o *feedback* imediato entre a sequência de comandos e a execução da ação programada, a visualização do movimento, do cálculo ou da interação resultante, a facilidade de pensar sobre o resultado obtido que está visualmente acessível e, se necessário, a possibilidade de alterar as ideias iniciais e o código do programa, são aspectos que vão além do que os recursos analógicos oferecem. O que defendo, portanto, é pensar a Educação Matemática no sentido de unir, mesclar, complementar metodologias e tecnologias analógicas e digitais, a fim de proporcionar mais e melhores situações aos estudantes.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

[...] aprendemos e nos desenvolvemos em qualquer idade (VERGNAUD, 2008, p. 13).

Concluir um trabalho de pesquisa, cujas reflexões foram realizadas durante quatro anos de estudos, constitui-se um desafio, pois deixa uma sensação de incompletude, de inacabamento e de que muitas coisas ainda poderiam ser feitas. Se estamos sempre *aprendendo e nos desenvolvendo*, nossas ideias e compreensões sobre o mundo estão em constante mudança. Assim, este último capítulo apresenta as *considerações finais*, no sentido do que foi feito até aqui, mas, também, conforme Teixeira (2005, p. 97), traz a ideia de *considerações iniciais*, "[...] visto que o estudo é base para outros processos e experiências que demandam novas conexões e diálogos".

As temáticas de investigação foram delimitadas, conforme já dito, a partir do caminho trilhado pela experiência docente na educação básica, da formação acadêmica da graduação e mestrado, os quais possibilitaram minha aproximação com a TCC e com o uso de TDICs numa perspectiva da construção do conhecimento. Ao mesmo tempo, a trajetória que vivenciei nos últimos quatro anos de doutorado, nas disciplinas do curso, nos seminários da linha de pesquisa, nas atividades do grupo de pesquisa (GEPID), nas orientações, nas participações em eventos, no estágio de doutoramento, nas conversas com colegas e, claro, nos muitos momentos individuais de leituras e escritas, me permitiram avançar conceitualmente, definir a problemática de investigação e realizar a pesquisa.

Assim, a partir dos conceitos centrais do referencial teórico, das temáticas delimitadas e com o auxílio de um mapeamento de trabalhos acadêmicos precedentes sobre o assunto, construo o problema da pesquisa, o qual foi enunciado da seguinte forma: Como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *campus* Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores?

Neste sentido, para atingir ao objetivo geral, que consistiu em investigar, nas formas de manifestação no ambiente de programação de computadores, os teoremas em ação associados de modo a reconhecer os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios, foi preciso delimitar objetivos específicos no sentido de constituírem as etapas para o processo de pesquisa. Assim, busquei: (a) compreender o Campo Conceitual das Funções Afim, a partir da TCC, examinando a complexidade das situações, dos invariantes operatórios e das representações desse campo; (b) explorar a programação de computadores como recurso que possibilite uma estratégia didática para o processo de conceituação; (c) identificar as manifestações conceituais dos estudantes, nas suas formas operatórias e predicativas, e interpretar os teoremas em ação.

Em relação à TCC, segundo seu criador Gérard Vergnaud (2017b), é uma teoria psicológica e didática que considera a aprendizagem como um processo a longo prazo e oferece instrumentos para pensar a conceituação de qualquer área do conhecimento. No entanto, foi na Matemática que Vergnaud centrou suas pesquisas mais sistemáticas. Para ele, é por meio de situações enfrentadas na vida que os sujeitos vão adquirindo e desenvolvendo os repertórios conceituais. Assim, entendo que, para a compreensão de um campo conceitual, é preciso ser desafiado por situações, dispor de invariantes operatórios prévios (conceitos em ação e teoremas em ação) e de variadas formas de representação para as ações e pensamentos.

A partir disso, acredito na possibilidade de considerarmos os conteúdos matemáticos como campos conceituais específicos, uma vez que as soluções das situações que dão sentido ao campo exigem determinadas operações, regras e propriedades. Assim, ao delimitar o Campo Conceitual das Funções Afim como o campo de interesse na pesquisa, foi possível realizar uma análise e classificar as situações para identificar os principais invariantes operatórios associados, os quais foram categorizados como IO1 - variável, IO2 - taxa de variação, IO3 - taxa fixa e IO4 - correspondência biunívoca, bem como as representações possíveis de serem explicitadas para, então, planejar e elaborar as situações da estratégia didática. A partir disso, foi possível alcançar o primeiro objetivo específico.

Ao mesmo tempo, aproximar tais princípios à perspectiva apresentada por Seymour Papert (1985) sobre o uso do computador na Educação permitiu ampliar o que entendo por situações em Vergnaud, quando tal situação pode ser vivenciada e resolvida por intermédio da programação de computadores, ou seja, pela criação de micromundos. Para Papert (2008, p. 37), "[...] a melhor aprendizagem ocorre quando o aprendiz assume o comando [...]", assim, a abordagem aqui feita sugere o uso do computador não como um recurso para transmitir informações aos estudantes, mas para que eles assumam a tarefa de construir os programas para pôr em ação seus pensamentos. Os pensamentos e os invariantes operatórios, por sua vez, são operacionalizados na Espiral da Conceituação, nas etapas de descrição, execução, reflexão e depuração dos códigos.

Utilizar ambientes de programação de computadores visando proporcionar aprendizagens e desenvolvimentos diversos desde a Educação Infantil, como a pesquisa de Furini (2017), à Educação Superior, pode ser visto como uma estratégia de metodologias ativas. Ou seja, propostas didático-pedagógicas em que os estudantes se envolvam em atividades complexas, que precisem mostrar iniciativa, tomar decisões e avaliar resultados (MORAN, 2015). Que possibilitem o desenvolvimento de habilidades como proatividade, criatividade e autonomia. Que ajude a avançar em relação ao que já é realizado na escola básica com as tecnologias analógicas tradicionais.

Assim, na constituição de uma estratégia didática, tanto para servir ao estudo empírico da pesquisa como, também, para servir de material de apoio ao planejamento do professor da educação básica, trago a contribuição da Teoria dos Estilos de Aprendizagem (ALONGO; GALEGO; HONEY, 2002), no sentido de pensar a diversificação das situações propostas com o Scratch. Isto é, faço um exercício de propor situações que consideram, segundo Barros (2009), as diferentes formas como os estudantes aprendem, interagem e respondem aos ambientes de aprendizagem. Com efeito, a programação de computadores propiciou que os quatro estilos, ativo, reflexivo, teórico e pragmático, fossem contemplados nas situações quando permitiu a criação (estilo ativo) de um produto que tenha aplicabilidade (estilo pragmático), a partir da organização de um plano de ação (estilo reflexivo) e da operacionalização das suas etapas de formas organizada (estilo teórico). Nessa aproximação da programação de computadores com a elaboração das situações de acordo com os Estilos de Aprendizagem, foi possível estabelecer uma estratégia didática, o que caracteriza o segundo objetivo específico da pesquisa.

O estudo empírico realizado passou por um primeiro momento piloto, o qual possibilitou a reorganização dos métodos, técnicas e instrumentos de pesquisa a fim de qualificar o estudo efetivo. Esse segundo momento efetivo foi realizado com dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus* Erechim, que estudavam de forma concomitante o Ensino Médio em escola pública, a partir da proposição de situações sobre Funções Afim no ambiente de programação Scratch e com o método de observação interativa. Neste sentido, foi possível identificar as formas operatórias e predicativas dos conhecimentos manifestados por eles e interpretar as representações e compreensões para, então, descrever os teoremas em ação associados, conforme a discussão realizada no capítulo anterior. Isso, portanto, culminou com o terceiro objetivo específico e do objetivo geral dessa pesquisa.

A opção pelo uso do ambiente Scratch se mostrou profícua, uma vez que o *software* não ofereceu obstáculos significativos às construções dos programas nem à seleção dos comandos a serem usados. Se os estudantes apresentavam alguma dúvida sobre qual comando usar, a disposição dos blocos por cores e a execução da compilação *just time* do que estava sendo elaborado foram facilitadores do processo. Sendo assim, como já foi dito, o Scratch constitui um dos ambientes possíveis de serem usados para estudos semelhantes e para atividades em sala de aula que objetivam a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Ademais, a pesquisa mostrou teórica e empiricamente que, no processo de elaborar e descrever os códigos de programação, os invariantes operatórios foram manifestados, testados, reformulados e, de certa forma, ampliados a partir da estratégia didática com o Scratch. Também, suscitou pensar em potencialidades específicas que a programação pode proporcionar ao ensino e à aprendizagem das Funções Afim, bem como às Funções de um modo geral, quando o conceito de variável pode ser ampliado proporcionando processos de generalização mais complexos e o conceito de taxa de variação constante pode ser concretizado e dinamizado nos programas pelos dois estudantes pesquisados. Tais achados podem ser considerados inesperados, pois, quando elaborei as situações, não previ o quanto seria possível desenvolver e avançar no conceito de variável e taxa de variação constante a partir dos recursos e ferramentas que a programação oferece. Foi necessária a prática com os estudantes para perceber novas possibilidades.

A partir disso, respondo ao problema de pesquisa considerando que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores, aconteceu por meio das ações de **concretização**, na etapa de descrição, de **dinamização**, na etapa da execução, de **compreensão**, na etapa de reflexão, e de **reformulação**, na etapa de depuração da espiral da conceituação, conforme está representado pela Figura 6.1 já mostrada. Vale lembrar que, segundo Valente (2002), as etapas da espiral podem acontecer simultaneamente sem que possamos identificar na prática esse processo sequencial apresentado, por isso a conceituação é muito mais complexa do que é perceptível ao olhar do pesquisador e do professor. O observável é apenas a parte visível do *iceberg* da conceituação do estudante que, conforme Vergnaud (1996), sem a parte escondida nada seria.

Fazendo uma associação desse modelo da espiral com o modelo do *iceberg* da conceituação (Figura 3.1), daria para dizer que, dentro do *iceberg*, para cada situação proposta, há uma espiral, cuja função estaria em levar os conhecimentos da forma operatória para sua forma predicativa, não de maneira linear, mas processual, respeitando o tempo, as condições, as potencialidades e os limites de cada sujeito. É possível pensar numa imagem que integrasse os dois modelos, mas, com receio de limitar a ideia apresentada, deixo a criação de tal representação simbólica sobre o que falo para o entendimento e a imaginação do leitor.

Tendo em vista o exposto, a pesquisa se mostrou valiosa tanto na elaboração de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores quanto no estudo das manifestações conceituais dos estudantes, uma vez que valorizou tanto a operacionalidade dos esquemas e invariantes na atividade quanto as explicações e noções interpretativas que o estudante tem do que está fazendo. O diálogo de evidenciação dos teoremas em ação que estabeleci com cada estudante pelo método da observação interativa mostra que assumir a verbalização dos estudantes sobre suas produções, além da análise sobre as ações, foi importante à pesquisa, bem como abre novas possibilidades para a práxis na sala de aula. Nas palavras de Muniz (2008, p. 51), "desilenciar a aula de Matemática é preciso".

É importante retomar a ideia de que a pesquisa com dois estudantes, realizada de forma individual, foi importante para conseguir adentrar nas minúcias das elaborações conceituais e verificar os processos de representação e de compreensão de cada um. A partir de agora, é possível pensar em práticas para salas de aula reais, com um número maior de estudantes, tendo como base os resultados desta pesquisa. Além disso, acredito ser indispensável que tais práticas promovam uma cultura de colaboração, de partilha e de rede entre os pares, em que possam dialogar, discutir, concordar e discordar, construir juntos e, portanto, explicitar seus esquemas e invariantes operatórios em diversas formas de representação.

Além disso, durante a produção dos dados, em que as manifestações realizadas nas Situações do Diagnóstico e nas Situações com o Scratch, tanto na forma operatória como na forma predicativa dos conhecimentos, evidenciaram diferenças significativas, possibilitou refletir sobre o papel das tecnologias digitais na educação, e o que elas trazem de diferente para aquilo que, há muito tempo, é mediado por tecnologias analógicas. Com base nos resultados já apontados na pesquisa, a tecnologia específica da programação de computadores apresenta a possibilidade de criar, concretizar, visualizar e dinamizar as ideias na tela do computador, ao mesmo tempo que possibilita pensar sobre o que se sabe, podendo reformular as ideias quando necessário. É a operacionalização das etapas da Espiral da Conceituação o diferencial em relação às tecnologias analógicas.

Neste sentido, também considero importante refletirmos sobre novas formas de pensar a educação, que envolvam diferentes abordagens e modelos pedagógicos, diferentes tecnologias e espaços de aprendizagem. Já pensando em estudos futuros, vejo no *Blended (e)Learning* um exemplo de possibilidade interessante. É um modelo de educação que pode ser entendido como uma forma de integrar educação presencial e *online*, integrar modelos de aprendizagem síncrona e assíncrona. Não apenas expandindo o espaço da sala de aula para o virtual, mas mudando-a metodologicamente. Para Monteiro, Moreira e Lencastre (2015), uma das formas de assumir o *Blended (e)Learning* é considerar

> que o professor não interfira em todas as tarefas que propõe durante a sessão presencial, permitindo a autonomia do estudante para determinadas atividades e que proponha outras tarefas, utilizando TIC, para além dos tempos letivos dedicados às sessões presenciais em sala de aula (p. 23).

Isso vem ao encontro da concepção de educação proposta pela TCC, no sentido de ampliar as situações propostas aos estudantes para além da sala de aula física. Integrando novos mundos, novas possibilidades que as tecnologias digitais apresentam, expandindo os espaços e tempos. Possibilitando o desenvolvimento de repertórios mentais, de esquemas de pensamentos que capacitem os estudantes a viverem mais e melhor na cibercultura. Pois, para Vergnaud (1996) os conhecimentos dos estudantes são formados a partir das situações que confrontam e que dominam ao longo da vida, na qual os conceitos vão sendo postos em ação e compreendidos, complexificando cada vez mais as relações estabelecidas. E, por isso, a importância de considerar o que está além dos muros da escola.

Em toda pesquisa as escolhas teóricas e metodológicas implicam num direcionamento do estudo e que, portanto, algumas decisões são tomadas em detrimento de outras. Tais escolhas trazem implicações para as análises e resultados e, de certo modo, limitações. Por consequência, abrem-se outras possibilidades de pesquisas que considerem os achados dessa e que avancem em outras perspectivas. Assim, aponto algumas questões que surgiram ao longo da pesquisa e que se apresentam como possibilidades para projetos futuros: Como seria o processo de construção do conceito de Derivadas no Ensino Superior com a utilização da programação de computadores para introduzir a ideia de taxa de variação constante a partir do movimento? Quais outros Campos Conceituais poderiam ser potencializados com a programação de computadores? Quais outros ambientes de programação poderiam ser utilizados para a aula de Matemática? Em que sentido os estilos de aprendizagens predominantes dos estudantes podem influenciar ou não na sua representação e compreensão sobre os invariantes operatórios na programação de computadores?

O desenvolvimento dessa investigação, e acredito que seja assim também para outros pesquisadores, não aconteceu de forma tão linear como sugere a exposição do trabalho. Considero que foi um processo em espiral, a minha espiral da conceituação, permeada de incertezas, de idas e vindas, cujas escolhas e definições teóricas e metodológicas passam pela necessidade de buscar enriquecimento em outras fontes teóricas. Como foi o caso do estudo sobre a teoria piagetiana, no que se refere à tomada de consciência, à equilibração e ao método clínico. No entanto, essas novas descobertas e aprendizagens nem sempre constituem o conjunto teórico principal para a discussão da Tese, mas são elementos essenciais que ajudaram na constituição da pesquisadora que me torno hoje.

Ao mesmo tempo, as vivências proporcionadas pelo doutorado, as quais iniciaram lá em 2014 com as disciplinas do primeiro semestre e com as atividades do GEPID e concluem-se agora 2018, com a recente realização do estágio de doutoramento na Universidade Aberta (Lisboa, Portugal), permitiram adentrar num mundo diferente, em que tive a oportunidade de conhecer autores, teorias e perspectivas, bem como pessoas, lugares e culturas. A experiência na realização dessa Tese propiciou, portanto, alargamento profissional, cultural e pessoal.

Termino essa etapa de minha vida acadêmica com a convicção de sair uma melhor professora, por ter aprendido a importância de permitir ao estudante a expressão de suas ideias, a manifestação de seus conhecimentos operatórios e predicativos, e que considerar a avaliação escrita como a única forma de conhecer os saberes deles é limitar suas capacidades. Saio também melhor pesquisadora, por vivenciar os desafios de compreender, sistematizar e articular as teorias, as dificuldades da pesquisa empírica, os rigores metodológicos necessários nas entrevistas, a importância de limitar o ser professora para o agir da pesquisadora. Além disso, saio uma pessoa mais completa e, ao mesmo tempo, ciente de minha incompletude.

Por fim, para além das conclusões e dos resultados dessa pesquisa, fazer um curso de doutorado e produzir uma Tese é muito mais. É estar aberto ao novo, ao desconhecido sem desconsiderar o que já se sabe. É estabelecer relações de parceria e de amizade com as pessoas que encontramos na caminhada e que contribuem com nosso crescimento. É desenvolver também os repertórios conceituais, os invariantes operatórios, os conceitos em ação e teoremas em ação, cujos obstáculos da pesquisa fizeram com que fossem reconstruídos e ampliados. Esse é um processo de conceituação e, nessa Tese, apresentei parte do meu processo.

REFERÊNCIAS

ALONSO, Catalina M.; GALLEGO, Domingo J. HONEY, Peter. **Los estilos de aprendizaje**: procedimientos de diagnóstico y mejora. 7. ed. Madrid: Mensajero, 2002.

ANDRÉ, Marli. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? **Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, jul.-dez. 2013.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Trad. Claus Ivo Doering. Volume 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014a.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Trad. Claus Ivo Doering. Volume 2. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014b.

BARROS, Daniela M. V.; ALONSO, Catalina; AMARAL, Sérgio F. Estilo de uso do espaço virtual. **Revista de Estilos de Aprendizagem**. Madri, UNED. v. 1, n. 1, p. 88 - 108, abril, 2008.

BARROS, Daniela M. V. Estilos de uso do espaço virtual: como se aprende e se ensina no virtual? **Inter-Ação: Revista Faculdade de Educação**. Goiânia, UFG, v. 34, n. 1, p. 51-74, jan.-jun. 2009.

_________. **Estilos de Aprendizagem e o uso das tecnologias.** São Paulo: Artesanato Educacional, 2014.

_________. Metodologia em Ead: estilos e uso do espaço virtual como perspectiva pedagógica para o design. 2017. **II Seminário Internacional de Pesquisa em Políticas Públicas e Desenvolvimento Social**, UNESP, Franca, 2017.

BATISTELA, Fernanda. **Programação de computadores e processos auxiliares da aprendizagem:** o caso dos alunos da escola de hackers. 2015. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, 2015.

BRAGAGNOLO, Adriana. **A interação verbal entre professoras e crianças de educação infantil: um encontro com a palavra**. 2016. 222f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de Passo Fundo. Passo Fundo, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Etapa do Ensino Médio. Proposta encaminhada para discussão no Conselho Nacional de Educação. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2018.

BRENNAN, Karen; RESNICK, Mitchel. Using artifact-based interviews to study the development of computational thinking in interactive media design. **Annual American Educational Research Association meeting**, Vancouver, Canada, 2012. Disponível em: <http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf> Acesso em: 17 out. 2017.

BROD, Cesar. **Aprenda a programar**: a arte de ensinar o computador. São Paulo: Novatec Editora, 2013.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas***:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPOS, Flávio R. **Paulo Freire e Seymour Papert:** educação, tecnologias e análise do discurso. Curitiba: CRV, 2013.

CARRAHER, Teresinha N. **O Método Clínico**: usando os exames de Piaget. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

DANTE, Luiz R. **Matemática**. Volume único. 1. ed. reimpressa. São Paulo: Ática, 2010.

________. **Matemática:** contexto e aplicação. Volume 1. Ensino Médio. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Trad. Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DEMO, Pedro. **TICs e Educação**. 2008. [Ensaio online]. Disponível em: <https://docs.google.com/document/pub?id=122YjQchoYmfKffYTaFQksphUwzyh9gOPx6FuQTBRIrU>. Acesso em: 08 mar. 2018.

DEMO, Pedro. **Tecnologias digitais e aprendizagem**. Ensaio 32. 2017. [Ensaio online]. Disponível em: <https://docs.google.com/document/d/e/2PACX-1vRf6kgDGpLVsy81J47-FBYb1IwvulmGqyUbWk_hbGQmDH8-k1SSmYkf9i64m5Axmaw-0lowsPXPoD_d/pub>. Acesso em: 08 mar. 2018.

ECO, Humberto. **Como se faz uma tese**. 13. ed. Editorial Presença: Lisboa, 2007.

EDUSCRATCH. Site do Scratch para Educadores. Disponível em: <http://eduscratch.dge.mec.pt/>. Acesso em: 15 out. 2017.

EGYPTO, Cândido. **Introdução a programação**. Apostila ASPER: João Pessoa, 2004.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. Prefácio. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p.53-75.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A (org). **Educação Matemática***:* uma (nova) introdução*.* 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008, p. 189-232.

FURINI, Caroline da S. **O desenvolvimento da equilibração majorante em crianças de educação infantil**: um estudo de caso a partir do projeto Berçário de Hackers. 2017. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, RS, 2017.

GIL, Antônio C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr, José Ruy. **Matemática Fundamental**: uma nova abordagem. Ensino médio. Volume único. São Paulo: FTD, 2002.

GROSSI, Esther P. Apresentando. In: GROSSI, Esther P. (org). **O que é aprender?** O Iceberg da conceitualização. Teoria dos Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017, p. 6-10.

HESS, Remi. **Produzir sua obra**: o momento da tese. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

IEZZI, Gelson [et al]. **Matemática**: ciência e aplicação. Volume 1. Ensino Médio. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

INHELDER, Barbel; CELLÉRIER, Guy**. O desenrolar das descobertas na criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

INHELDER, Barbel; CAPRONA, Denys de. Rumo ao construtivismo psicológico: estruturas? Procedimentos? Os dois “indissociáveis”. In: INHELDER, Barbel; CELLÉRIER, Guy. **O desenrolar das descobertas na criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 07-37.

LEMOS, André. **Olhares sobre a cibercultura**. Porto Alegre: Sulina, 2003.

LEVY, Pierre. **Tecnologias da Inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Ed. 34, 2011.

LESSA, Valéria Espíndola. **A compreensão do conceito de número fracionário**: uma sequência didática para o significado medida. 2011. 167f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

______ [et al]. Escolha do Ambiente de Programação de Computadores Scratch para Investigação de Aprendizagens Matemáticas. 2016. **Anais do SENID 2016**. Passo Fundo, 2016. Disponível em: <http://senid.upf.br/images/pdf/escolha-do-ambiente-de-programacao-de-computadores.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2017.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LIMA, Elon L**.** [et al] **Matemática:** ensino médio. Volume 1, 2 e 3. 9. ed. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Ática, 2002.

LOPES, Daniel. Q; FAGUNDES, Léa da C. As construções microgenéticas e o design em robótica educacional. **Renote: Revista Novas Tecnologias Educacionais.** Porto Alegre, v. 4, n. 2, p. 1-10, dez. 2006.

MARJI, Majed. **Aprenda a programar com scratch:** uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática. São Paulo: Novatec, 2014.

MARQUES, Maria Teresa. P. M. **Recuperar o engenho a partir da necessidade, com recurso às tecnologias educativas:** contributo do ambiente gráfico de programação Scratch em contexto formal de aprendizagem. 2009. 219f. Dissertação (Mestrado em Tecnologias Educativas) - Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

MARTINS, Amilton R. Q. **Usando o Scratch para potencializar o pensamento criativo em crianças de ensino fundamental**. 2012. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2012.

MELLO, Diene E. de; MORAES, Dirce A. F. de. Tecnologias: conceitos e implicações docente. In: COSTA, Maria L. F.; SANTOS, Annie R. dos (org). **Educação e novas tecnologias**: questões teóricas, políticas e práticas. Maringá: Eduem, 2017. p. 93-106.

MINAYO, Maria Cecília de S. **O desafio do conhecimento:** pesquisa qualitativa em saúde. 4.ed. São Paulo-Rio de Janeiro: Hucitec-Abrasco, 1996.

_________. O desafio da pesquisa social. In: MINAYO, Maria Cecília de S. (org.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 33. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013, p. 11 - 32.

MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos A. de; MORALES, Elisa T. (orgs). **Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens.** Coleção Mídias Contemporâneas. Vol. II. Ponta Grossa: PROEX/UEPG, 2015.

MOREIRA, Marco A. Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: o Ensino de ciências e a pesquisa na área. **Investigação em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, UFRGS, v. 7, n. 1, p.7-29, mar. 2002.

MORGADO, Luisa; PARRAT-DAYAN, Silvia. Conversas livres com as crianças: problemas e métodos. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional** (ABRAPEE), v.10, n. 2, p. 312-328, jul.-dez., 2006.

MUNDIM, Roberto P. A Lógica Formal: princípios elementares. **Economia & gestão**. Belo Horizonte, v. 2, n. 3, p. 135-145, jan.-jun. 2002.

MUNIZ, Cristiano. O conceito de esquema para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009, p.37-52.

NAKASHIMA, Rosária H. R.; BARROS, Daniela M. V.; AMARAL, Sérgio F. O uso pedagógico da lousa digital associado à Teoria dos Estilos de Aprendizagem. **Revista Estilos de Aprendizaje**. Madri, v. 4, n. 4, p. 169-178. Out., 2009.

PAPERT, Seymour. **Logo**: computadores e educação. Tradução de José A. Valente, Beatriz Bitelman e Afira V. Ripper. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

_______. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Ed. rev. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PAVIANI, Jayme. **Epistemologia prática**: ensino e conhecimento científico. Caxias do Sul: EDUCS, 2009.

PAZINATO, Ariane M. **Desdobramentos da Olimpíada de Programação de Computadores no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático**. 2015. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, 2015.

PIAGET, Jean. **Ensaio de Lógica Operatória**. Porto Alegre: Editora Globo; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

________. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977.

________. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PIMENTEL, Fernando S. C. Cultura digital e formação de professores. In: COSTA, Maria L. F.; SANTOS, Annie R. dos (org). **Educação e novas tecnologias**: questões teóricas, políticas e práticas. Maringá: Eduem, 2017. p. 57-76.

PRETTO, Nelson. D. L. **Reflexões:** ativismo, redes sociais e educação. Salvador: EDUFBA, 2013.

PUENTES, Roberto Valdés; AQUINO, Orlando Fernández; FAQUIN, Juliana Pereira da Silva. Las investigaciones sobre formación de professores en América Latina: una análisis de los estúdios del estado del arte (1985-2003). **Educação Unisinos**. Novo Hamburgo, v. 9, n. 3, p. 221-230, set.-dez. 2005. Disponível em: <http://revistas.unisinos.br/index.php/educacao/article/view/6322/3475>. Acesso em: 18 jul. 2018.

RESNICK, Mitchel. All I Really Need to Know (About Creative Thinking) I Learned (By Studying How Children Learn) in Kindergarten**.** In: **ACM Creativity e Cognition conference**, Washington DC, June, 2007. Disponível em: <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=1254961>. Acesso em: 17 out. 2017.

_________ [et al]. Scratch: programming for all. **Communication of the ACM**. New York, v. 52, n.11, p.60-67, nov., 2009.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional.** Curitiba, v.6, n. 19, p. 37-50, set-dez, 2006.

SAAD-ROBERT, M. Didier e as bonecas russas: análise de caso e conceituação. In: INHELDER, Barbel; CELLÉRIER, Guy. **O desenrolar das descobertas na criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 127-168.

SAEB. Sistema de Avaliação da Educação Básica. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb>. Acesso em: 04 jun 2017.

SAUGO, Caroline. **Explorando a informática educativa como alternativa de ensino da geometria plana na educação básica**. 2016. 94f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, 2016.

SILVA, João A. **Modelos de significação e pensamento lógico-matemático**: um estudo sobre a influência dos conteúdos na construção da inteligência. 2009. 168f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SILVA, Juremir M. da. **O que pesquisar quer dizer**: como fazer textos acadêmicas sem medo da ABNT e da Capes. Porto Alegre: Sulina, 2010.

SOUZA, Marco A. F. [et al]. **Algoritmos e lógica de programação**. 2. ed rev. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TEIXEIRA, Adriano C. **Formação docente e inclusão digital**: a análise do processo de emersão tecnológica de professores. 2005. 126f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

TIC DOMICÍLIO 2016. Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros [livro eletrônico]. Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (CETIC.BR). Comitê Gestor da Internet no Brasil, São Paulo, 2017.

TIC EDUCAÇÃO 2016. Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras [livro eletrônico]. Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (CETIC.BR)**.** Comitê Gestor da Internet no Brasil, São Paulo, 2017.

VALENTE, José A. **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. 2. ed. Campinas: UNICAMP/NIED, 1998.

_________. Análise dos diferentes tipos de *software*s usados na educação. In: VALENTE, José A. (org). **Computadores na sociedade do conhecimento**. Campinas, UNICAMP/NIED, 1999, p. 89-110.

_________. A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina R. A. (org). **Tecnologia no ensino:** implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo Editora, 2002. p. 15-37.

_________. **A espiral da espiral de aprendizagem:** o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. 238f. Tese (Livre Docência) - Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Artes. Campinas, 2005.

VENTORINI, André E. **Construção de relações funcionais através do *software Scratch***. 2015. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (org). **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.155-191.

_________. Entrevista. Temas Transversais na Educação. **Pátio Revista Pedagógica**, Porto Alegre, n. 5, p. 23-26, maio - jul, 1998.

_________. A Gênese dos Campos Conceituais. In: GROSSI, E .P. (org.) **Por que ainda há quem não aprende?** A Teoria. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2003, p.21-60.

_________. **Atividade humana e conceituação**. Porto Alegre: GEEMPA, 2008.

_________. O que é aprender In: BITTAR, M; MUNIZ, C. A. (orgs.). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009, p. 13-35.

_________. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas no ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2014.

_________. A conceitualização. **II Colóquio da Teoria dos Campos Conceituais**. Porto Alegre, 2017a. Conferência. Tradução de Candy Marques Laurendon.

_________. Prenunciando a teoria dos campos conceituais. In: GROSSI, Esther P. (org). **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud**: teoria dos campos conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017b. p. 63-70.

VILLAS, Marcos Viana; VILLASBOAS, Luiz Felipe P. **Programação**: conceitos, técnicas e linguagens. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

WING, Jeannette M. Computational Thinking. **Comunications of the ACM**. New York, v.49, n.3, p. 33 - 35, mar., 2006.

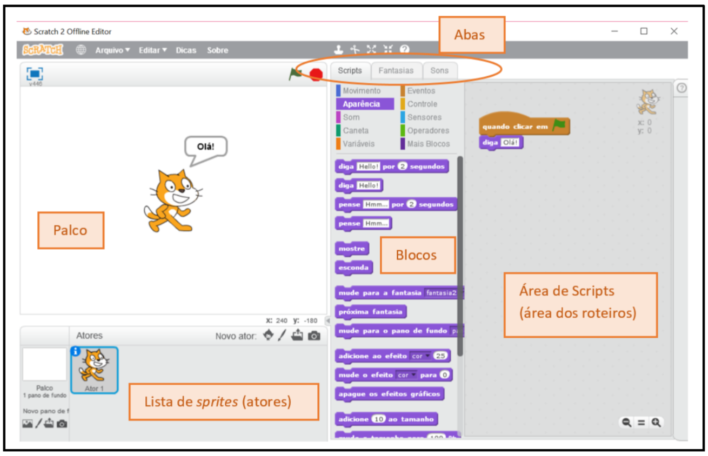
APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Atividades de Ambientação

Os arquivos dos onze programas utilizados nas atividades de ambientação podem ser encontrados em: http://bit.ly/ArqScratchAmb.

ENCONTRO 1 (13/11/2017)

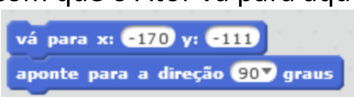
Objetivo: Introduzir a programação em Scratch, mostrando as ferramentas para movimento dos personagens e propor a realização de alguns programas.
Procedimentos:
1) Mostrar o site do Scratch: https://scratch.mit.edu.
2) Ambientação com o Software.
Mostrar cada uma das partes da figura.



3) Mudar palco e atores. Mudar cores de palco e dos atores. Inserir vários atores.
4) Programar uma pequena fala de um ator. Mostrar o bloco que sempre inicia um programa.
5) Movimentar atores: andar, girar, Informações sobre a posição dos atores. Clicar no botão direito do mouse sobre cada um e verificar. Mostrar a diferença nos giros conforme as INFO. Mandar o scratch girar quando sua rotação estiver em 360° e mandar girar quando estiver em 180°.
6) Trabalhar com coordenadas

- Mostrar o bloco azul 

que quando colocado na área dos códigos e clicado, ele faz com que o Ator vá para aquela posição no gráfico.

- Mostrar que 

faz com que o Ator volte a ficar virado para a posição inicial (para a direita).

7) Propor a realização do **Programa 1,** um siri na praia que anda até o mar, a fim de trabalhar com a troca de palco, com movimentos e aparências de ator.
8) Propor a realização do **Programa 2**, de forma a melhorar o Programa 1, inserindo laços de repetição, fantasias e sons. Assim, o siri na praia anda até o mar mexendo as pernas, falando e quando chega no mar, mergulha (som e desaparece).

9) Propor a realização do **Programa 3**, para associar o movimento do ator às teclas, inserir condicionais e inserir vários atores no programa. Neste programa, um gato anda pela tela comandado pelas setas do teclado, quando encosta nas frutas espalhadas, elas somem, quando encosta nos doces, há um som de reprovação e ele dá um passo para trás.

ENCONTRO 2 (20/11/2017)

Objetivo: Mostrar a ferramenta de "variáveis" e criação de blocos.
Procedimentos:
1) Propor o **Programa 4**, que consiste em melhorar o Programa 3 em que o Gato come frutas, introduzindo pontuações com variável. Agora, quando come frutas ganha pontos, quando tenta comer doces, perde pontos.
2) Propor o **Programa 5**, a fim de introduzir o "pergunte e espere a resposta" e os cálculos com a ferramenta "operadores". Nesse é um programa que calcula a média aritmética simples entre dois valores inseridos por um usuário do programa.
3) Propor o **Programa 6**, com o intuito de usar o recurso "usar caneta" para desenhar e o recurso de criar novos blocos. Essa atividade sugere a elaboração de um programa que desenhe uma casa, a partir de blocos novos para cada parte da casa.
4) Propor o **Programa 7**, parecido com o Programa 6, para ser feito em casa. Nesse caso, é proposto o desenho de flores, em que as pétalas devem ser desenhadas mediante a combinação de passos e ângulos do ator.

ENCONTRO 3 (27/11/2017)

Objetivo: Propor a elaboração de jogos mais complexos.
Procedimentos:
1) Propor o **Programa 8**, em que uma bola quica nas bordas da tela e não pode tocar no chão, um trampolim deve servir para não deixar a bola cair. A cada vez que o trampolim salva a bola, ganha pontos, cada vez que ela cai, perde pontos. Essa atividade visa trabalhar com recursos de variáveis para a pontuação, movimento da bola e movimento do trampolim a partir da posição x e y do mouse.
2) Propor o **Programa 9**, um jogo de futebol para dois usuários. Uma bola quica nas bordas da tela e as bordas laterais são as goleiras. Dois goleiros posicionados a frente de suas respectivas goleiras devem evitar que o adversário faça gol. Os goleiros são movimentados para cima e para baixo através de determinadas teclas.
3) Propor o **Programa 10**, que visa o uso do recurso "clone". Assim, diversas maçãs caem de uma árvore e ao tocar o chão, ficam esmagadas e trocam de cor.
4) Propor o **Programa 11**, que visa complexificar o Programa 10, transformando-o num jogo em que uma tigela precisa salvar o maior número possível de maçãs que caem. Para cada maça salva, é atribuído uma pontuação.

APÊNDICE 2 - Teste Diagnóstico

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus Erechim

UPF Universidade de Passo Fundo

Instrumento de seleção de estudantes para a pesquisa de doutorado intitulada
"A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES E AS FUNÇÕES MATEMÁTICAS: UM ESTUDO SOBRE A REPRESENTAÇÃO E A COMPREENSÃO DE INVARIANTES OPERATÓRIOS"

Nome: ____

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

SITUAÇÃO 1 - DESLOCAMENTO DE UM CORPO

Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática s = 3t + 4, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos). Responda:

a) Qual a posição do corpo no instante 30 segundos?
b) Qual o instante em que o corpo atinge a posição de 150 metros?
c) Qual a posição inicial do corpo antes de iniciar o movimento?
d) Qual é o deslocamento feito para cada instante que passa? Por quê?
e) Construa o gráfico desta função.

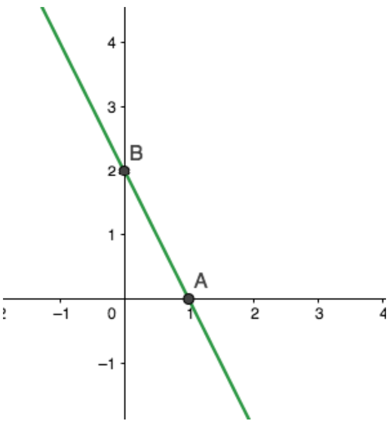
SITUAÇÃO 2 - PARQUE DE DIVERSÕES

Um parque de diversões cobra R$ 15,00 de entrada e R$ 8,00 para utilizar cada um dos brinquedos.

a) Estabeleça a Função Afim que relaciona o valor pago e o número de brinquedos usados.
b) Se uma pessoa usar 7 brinquedos pagará quanto?
c) Com R$ 100,00 é possível usar quantos brinquedos?

SITUAÇÃO 3 - QUAL A LEI DA FUNÇÃO?

O gráfico abaixo representa uma Função Afim, R → R, f(x) = ax + b. Estabeleça a lei da função que representa o gráfico abaixo.



ATIVIDADE DE PROGRAMAÇÃO

ATIVIDADE: Crie no Scratch **um** programa que utilize, no mínimo, os comandos abaixo, e envie para o e-mail lessavaleria@gmail.com identificando-se no corpo da mensagem do e-mail. Use sua criatividade.

- variáveis (laranja)
- sensores: pergunte e espere a resposta (azul claro)
- operadores (verde claro)
- movimentos (azul escuro)
- aparência (roxo)

APÊNDICE 3 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o(a) Estudante ____ para participar da pesquisa **Um estudo sobre Funções Matemáticas e Programação de Computadores,** sob a responsabilidade da Professora e Pesquisadora **Valéria Espíndola Lessa** e pela estudante de Engenharia Mecânica Ana Paula Cervinski, a ser realizada em instalações no IFRS, *Campus* Erechim. Este é um estudo relacionado à pesquisa de doutorado da Professora pela Universidade de Passo Fundo/RS, na qual pretende investigar os conhecimentos sobre Funções Matemáticas do(a) estudante por meio de atividades no ambiente de Programação de Computadores Scratch. É um trabalho que busca contribuir com a pesquisa em Educação no Brasil e necessita realizar investigação empírica com estudantes de 1º ano do Ensino Médio. Diante disso, o(a) estudante será convidado a realizar problemas de Matemática no *software* Scratch em dois turnos, de tal forma que não coincidam com suas atividades na escola pública de Ensino Médio e no curso técnico de Informática do IFRS. Durante as tarefas, será questionado sobre seus pensamentos e raciocínios ao resolver um problema e, ao final, salvaremos os arquivos das suas resoluções para posterior análise. Todo o período de oficina será filmado e fotografado, porém sua identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. Ele(a) não será identificado(a) em nenhuma publicação. O uso de imagens para trabalhos científicos está sujeito a sua aprovação e assinatura deste Termo.

Vocês não terão nenhum custo, nem receberão qualquer vantagem financeira. Serão esclarecidos em qualquer aspecto que desejarem e o(a) estudante estará livre para participar ou recusar-se. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a participação do(a) estudante a qualquer momento. A participação dele(a) é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador. Os riscos desta pesquisa são mínimos e estão relacionados com a possibilidade de confusão conceitual sobre Funções, uma vez que estaremos intervindo nos conhecimentos prévios que o(a) estudante traz da escola. Como medidas de proteção ao risco, estaremos sempre atentos as suas reações com nossas atividades e valorizaremos os conhecimentos que traz, sem a intenção de expor o(a) estudante, sua escola ou seu professor(a). A participação na pesquisa poderá também beneficiar o(a) estudante na aprendizagem, não apenas de conceitos matemáticos de Funções, mas de outros conceitos, habilidades e competências da Matemática e da Informática, bem como do trabalho colaborativo.

Os resultados estarão à disposição de vocês quando finalizada. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pela Professora Valéria, e a outra será fornecida a você. Para qualquer outra informação, poderá entrar em contato com o pesquisador no endereço do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, *campus* Erechim, Rua Domingos Zanella, 104, bairro Três Vendas, pelo telefone (54) 3321.7500, pelo celular da Pesquisadora (54) 8109.3330, e-mail: valeria.lessa@erechim.ifrs.edu.br.

Eu,____ ______, responsável pelo(a) estudante ____fui informado(a) sobre o que a pesquisadora quer fazer e porque precisa da colaboração de estudantes, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em autorizar a participação de ____, no projeto e o uso de sua imagem para trabalhos científicos gerados a partir dos resultados, sabendo que não vai ganhar nada e que pode sair quando quiser.

– *Erechim ______ de ____________________ de ______.*

___________________________________ ___________________________________

Assinatura do Responsável pelo(a) Estudante

Assinatura do Pesquisador Responsável

APÊNDICE 4 – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido para os estudantes

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **Um estudo sobre Funções Matemáticas e Programação de Computadores** a ser realizada em instalações no IFRS, *Campus* Erechim, pela Professora Valéria Espíndola Lessa e pela estudante de Engenharia Mecânica Ana Paula Cervinski. Este é um estudo relacionado à pesquisa de doutorado da Professora pela Universidade de Passo Fundo/RS, na qual pretende investigar os conhecimentos sobre Funções Matemáticas do(a) estudante por meio de atividades em ambiente de Programação de Computadores. Para isso, você precisará resolver problemas de Matemática no *software* Scratch em dois turnos que serão previamente combinados, de tal forma que não coincidam com suas atividades na escola pública de Ensino Médio e no Curso Técnico de Informática do IFRS. Durantes as tarefas, você será questionado sobre seus pensamentos e raciocínios ao resolver um problema e, ao final, salvaremos os arquivos das suas resoluções para posterior análise. Todo o período da pesquisa será filmado e fotografado, porém sua identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Para a pesquisa mostrar imagens, haverá a solicitação de autorização pelo responsável.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador.

Os riscos desta pesquisa são mínimos e estão relacionados com a possibilidade de confusão conceitual sobre Funções, uma vez que estaremos intervindo nos seus conhecimentos prévios que traz da escola. Como medidas de proteção ao risco, estaremos sempre atentos as suas reações com nossas atividades e valorizaremos os conhecimentos que traz, sem a intenção de expor você, sua escola ou seu professor(a). Sua participação na pesquisa poderá também beneficiar-lhe na aprendizagem não apenas de conceitos matemáticos de Funções, mas de outros conceitos, habilidades e competências da Matemática e da Informática, bem como do trabalho colaborativo.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pela Professora Valéria, e a outra será fornecida a você. Para qualquer outra informação, poderá entrar em contato com o pesquisador no endereço do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, *campus* Erechim, Rua Domingos Zanella, 104, bairro Três Vendas, pelo telefone (54) 3321.7500, pelo celular (54) 8109.3330.

Eu, ____, portador(a) do documento de Identidade ____________________ fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Erechim, ____ de ______________ de _____.

____

– *Assinatura do(a) menor*

____

– *Profª Valéria Espíndola Lessa*

APÊNDICE 5 – Roteiro Diagnóstico Alan

SITUAÇÃO 1:

Letra (a)

- Me explica como fez essa resolução.
- Que relação há entre o 30 e o 94?
- Se fosse 60 segundos no lugar do 30? Por quê?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do tempo? Por quê?
- Tu achas que teria outra forma de resolver essa questão?
- Será que inserindo dois valores para t eu poderia encontrar o mesmo s? Por quê?
- Quem são as variáveis do problema?
- Quem é a dependente e a independente?
- Qual a diferença entre elas?
- O que significa o 3 da função?
- O que significa o 4 da função?
- Se o 3 não existisse, como seria a função?
- E se o 4 não existisse?
- Como podemos fazer para ter certeza que a resposta está certa?

Letra (b)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que fez desta forma? Explica por partes o que fizeste.
- Qual a diferença entre essa e a letra (a).
- Se eu pedisse para calcular o instante em que o corpo atingiu 94 metros, qual seria a resposta?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do deslocamento? Por quê?
- Tu achas que teria outra forma de resolver essa questão?
- Quem são as variáveis do problema?
- Quem é a dependente e a independente?

Letra (c)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que colocou t = 0?
- O que significa o 4 da resposta?

Letra (d)

- Me explica como fez essa questão.
- O que tu entendes por P.A.?
- O que significa que a cada instante o corpo se movimenta 3 metros?
- O que isso tem a ver com a lei da função?
- Numa função do 1º grau é sempre assim? Será que em outros modelos há essa relação que tu encontraste?
- O que significa variação constante?

Letra (e)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que colocaste o t na horizontal e o s na vertical?
- A variável independente sempre vai na horizontal? Da onde vem isso?
- Há outra forma para se construir um gráfico? Outras estratégias? Quais? Tu saberias fazer? E por que escolheste a outra em vez dessa?
- Estaria certo se eu dissesse que a aula começa às -1h30 da tarde? Por quê?
- Estaria certo se eu dissesse que a partícula iniciou seu movimento na posição -30. Por quê?

SITUAÇÃO 2

Letra (a)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que usou f(x) e x? E o que são estes elementos?
- Poderia ter usado outras letras?
- Qual é a variável dependente e a independente?
- Qual a diferença entre elas?
- Por que organizou o 8 e o 15 nessa ordem e não ao contrário?
- O que significam esses números?
- Se o 8 não existisse, como seria a função?
- E se o 15 não existisse?
- Na sua opinião, para que serve a lei da função?

Letra (b)

- Me explica como fez essa questão.
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do número de brinquedos x? Por quê?
- E há alguma restrição ou limitação para os possíveis valores de f(x)?
- Qual a relação entre o 7 e os R$ 71,00?
- Será que inserindo dois valores para x eu poderia encontrar o mesmo f(x)? Por quê?
- E as variáveis do problema, são as mesmas?
- Quem é a dependente e a independente?
- Como podemos fazer para ter certeza que a resposta está certa?

Letra (c)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que fez desta forma? Explica por partes o que fizeste.
- Qual a diferença entre essa e a letra (b).
- Se eu pedisse para calcular número de brinquedos para gastar 71 reais, se no lugar dos 100 reais fosse 71 reais qual seria a resposta?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no preço? Por quê?
- Tu achas que teria outra forma de resolver essa questão?
- As variáveis são as mesmas?
- Quem é a dependente e a independente?

SITUAÇÃO 3

- Me explica como fez essa questão.
- Por que, na segunda coluna de cálculos, tu substituíste f(1) por, 1, da terceira para a quarta linha?
- Por que fizeste uma prova real?

APÊNDICE 6 – Roteiro Diagnóstico João

SITUAÇÃO 1:

Letra (a)

- Me explica como fez essa resolução.
- Que relação há entre o 30 e o 94?
- Se fosse 60 segundos no lugar do 30? Por quê?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do tempo? Por quê?
- Será que inserindo dois valores para t eu poderia encontrar o mesmo s? Por quê?
- Quem são as variáveis do problema?
- Quem é a dependente e a independente?
- Qual a diferença entre elas?
- O que significa o 3 da função?
- O que significa o 4 da função?
- Se o 3 não existisse, como seria a função?
- E se o 4 não existisse?
- Como podemos fazer para ter certeza que a resposta está certa?

Letra (b)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que fez desta forma? Explica por partes o que fizeste.
- Qual a diferença entre essa e a letra (a).
- Se eu pedisse para calcular o instante em que o corpo atingiu 94 metros, qual seria a resposta?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do deslocamento? Por quê?
- Tu achas que teria outra forma de resolver essa questão?
- Quem são as variáveis do problema?
- Quem é a dependente e a independente?

Letra (c)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que ZERO metros?
- O que significa posição inicial do corpo?
- Mas não posso ter uma posição de 10 metros e a partir daí começar a correr o tempo?
- Posição inicial é o mesmo que movimento?

Letra (d)

- Me explica como fez essa questão.
- O que tu entendes por P.A.?
- O que significa que a cada instante o corpo se movimenta 3 metros?
- O que isso tem a ver com a lei da função?
- Numa função do 1º grau é sempre assim? Será que em outros modelos há essa relação que tu encontraste?
- O que significa variação constante?

Letra (e)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que colocaste o t na horizontal e o s na vertical? É sempre assim? E se fossem outras letras, como tu decide?
- Este gráfico é uma curva ou uma reta? Por que?
- Por que inicia na origem?
- Por que não tem valores negativos?

SITUAÇÃO 2

Letra (a)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que usou y e x? E o que são estes elementos?
- Poderia ter usado outras letras?
- Qual é a variável dependente e a independente?
- Qual a diferença entre elas?
- Por que organizou o 8 e o 15 nessa ordem e não ao contrário?
- O que significam esses números?
- Se o 8 não existisse, como seria a função?
- E se o 15 não existisse?
- Na sua opinião, para que serve a lei da função?

Letra (b)

- Me explica como fez essa questão.
- Tem algum número que não poderia ser colocado no lugar do número de brinquedos x? Por quê?
- E há alguma restrição ou limitação para os possíveis valores de f(x)?
- Qual a relação entre o 7 e os R$ 71,00?
- Será que inserindo dois valores para x eu poderia encontrar o mesmo f(x)? Por quê?
- E as variáveis do problema, são as mesmas?
- Quem é a dependente e a independente?
- Como podemos fazer para ter certeza que a resposta está certa?

Letra (c)

- Me explica como fez essa questão.
- Por que fez desta forma? Explica por partes o que fizeste.
- Qual a diferença entre essa e a letra (b).
- Se eu pedisse para calcular número de brinquedos para gastar 71 reais, se no lugar dos 100 reais fosse 71 reais qual seria a resposta?
- Tem algum número que não poderia ser colocado no preço? Por quê?
- Tu achas que teria outra forma de resolver essa questão?
- As variáveis são as mesmas?
- Quem é a dependente e a independente?

SITUAÇÃO 3

- Me explica como fez essa questão.
- Por que usou a – 2b?
- O que isso tem a ver com a função f(x) = ax + b?
- Para eu modelar a função, o que preciso encontrar?
- Tu consegues me dizer quem são o A e o B? São pontos? Coeficientes da função?

APÊNDICE 7 – Situações com o Scratch

Pesquisa "A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES E AS FUNÇÕES MATEMÁTICAS: UM ESTUDO SOBRE A REPRESENTAÇÃO E A COMPREENSÃO DE INVARIANTES OPERATÓRIOS"

Nome: _______________________________

* Para cada atividade a ser resolvida no Scratch, faça um planejamento no papel do que pretende fazer no *software*.

SITUAÇÃO 1 - ANDANDO DE TAXI

Numa certa cidade, o cálculo para saber quanto custará uma corrida de taxi é feito a partir da fórmula P = 2,50 + 1,40q, em que q é a quantidade de quilômetros e P é o preço final da corrida.

a) Crie um programa no Scratch na qual um usuário qualquer deste programa possa inserir as quilometragens percorridas em suas viagens e obter o valor gasto em cada uma.

b) Vamos supor agora que uma pessoa tenha um certo valor em Reais, por exemplo, R$ 80,00 e deseja saber quantos quilômetros ela poderia percorrer nesta cidade. Como o Scratch poderia ajudar estas pessoas que querem saber a quilometragem que poderá ser percorrida a partir do dinheiro que elas possuem?

SITUAÇÃO 2 - SALÁRIO

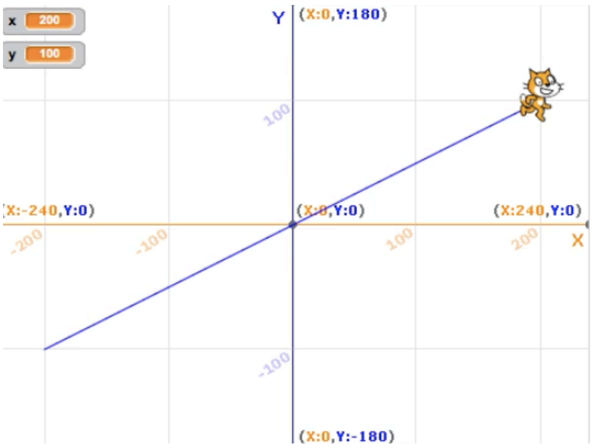
A remuneração mensal dos funcionários em diversos estabelecimentos comerciais do estado do Rio Grande do Sul é composta de duas partes. Uma parte fixa, referente ao piso regional do comércio (salário base) de R$ 1.150,00 e uma parte variável, que se constitui de 20% do valor total das vendas do mês anterior deste funcionário.

a) Elabore no Scratch um programa para que os funcionários destas lojas possam simular seu salário mensal a partir da inserção do total das suas vendas no mês. Teste para uma venda de R$ 50.000,00 no mês.

b) Um funcionário precisa receber no mês de junho um salário mínimo de R$ 7.500,00 para conseguir pagar suas contas. Dessa forma, quanto ele precisará ser o seu total de venda no mês anterior? Faça um programa no Scratch que responda a essa pergunta e que possibilite calcular o valor de vendas mensais a partir do salário desejado.

SITUAÇÃO 3 - QUAL É O SEGREDO

A imagem abaixo, produzida no Scratch, representa uma trajetória retilínea que o personagem desenha no plano cartesiano. Visualize a execução do programa no vídeo disponibilizado em https://goo.gl/z2Ht89 e, a partir disso:



a) Encontre o modelo matemático por trás do movimento.

b) Reproduza esta construção no Scratch, considerando as modificações nas variáveis x e y a cada movimento do personagem. Sugestão: inicie em (-200, -100).

SITUAÇÃO 4 - RESTAURANTE

Em certos restaurantes, há duas modalidades de serviços prestados para o almoço:

1 - Buffet Livre: em que é cobrada uma taxa por pessoa, independente do seu consumo.

2 - Buffet a quilo: em que é estipulado um preço por quilograma e o valor cobrado será proporcional ao consumo.

a) Elabore um programa no Scratch que auxilie um usuário a saber quanto custou seu prato de comida, em qualquer restaurante desse tipo, e qual modalidade foi usada.

b) Elabore outro programa no Scratch que nos ajude a descobrir o valor máximo a ser consumido para ser vantajoso o Buffet a Quilo, em qualquer restaurante desse tipo.

SITUAÇÃO 5 – LIVRE

Crie um programa no Scratch que represente uma situação matemática que envolva as Funções Afim. Ou seja, uma situação que estabeleça uma certa relação do tipo $f(x) = ax + b$ entre duas variáveis. Use sua criatividade.

APÊNDICE 8 – Roteiro Scratch

Roteiro de orientação para as perguntas realizadas nas aplicações das situações com o Scratch.

SITUAÇÃO 1, LETRA (A)

- Leia a questão e faça um planejamento no papel de como vai programar. Use suas ideias de programação.
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou o seu plano.
- Faça a atividade.
    - Por que fizeste assim? Será que teria outra forma de fazer?
    - O que tu entendes por variável? O que elas representam?
    - Quais são as variáveis da situação?
    - Por que usaste estas letras/símbolos/palavras?
    - Quais variáveis tu criaste no programa?
    - As variáveis do programa são as mesmas da situação matemática? Por quê?
    - Em relação as variáveis, quem depende de quem?
    - Quem são o 1,40 e o 2,50? O que significa cada um deles?
    - Ao inserir 50km, é possível obter dois valores que correspondem a esse 50km? Por quê?
    - A cada km que passa, ele pagará quanto? Por quê?
    - Como podemos saber se está certo o programa?

SITUAÇÃO 1, LETRA (B)

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar, como na letra (a).
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou o seu plano.
- Faça a atividade
    - Por que fizeste assim? Será que teria outra forma de fazer?
    - Que relação tem o programa com o que fizeste no papel?
    - Por que tu fizeste o cálculo no papel primeiro? (SE O FIZER)
    - Qual a diferença dessa resolução para a letra (a)?
    - Como podemos saber se está certo?
    - Fazer um plano no papel te ajudou de alguma forma?

SITUAÇÃO 2, LETRA (A)

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar.
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou o seu plano.
- Faça a atividade
    - Por que fizeste assim? Será que teria outra forma de fazer?
    - Quais são as variáveis da situação? O que estas variáveis representam?
    - Por que decidiu usar estas letras/símbolos/palavras?
    - As variáveis do programa são as mesmas da situação matemática? Por quê?
    - Em relação as variáveis, quem depende de quem?
    - Quem são o 1.500 e o 20%? O que significa cada um deles?
    - Tu inseriste 50.000 e obteve tanto. Será que é possível inserir um valor que dê dois resultados diferentes? Por quê?
    - Como podemos saber se está certo?

SITUAÇÃO 2, LETRA (B)

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar, como na letra (a).
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou o seu plano.

- Faça a atividade
    - Por que fizeste assim? Será que teria outra forma de fazer?
    - Que relação tem o programa com o que fizeste no papel?
    - Por que tu fizeste o cálculo no papel primeiro? (SE O FIZER)
    - Qual a diferença dessa resolução para a letra (a)?
    - Como podemos saber se está certo?
    - Fazer um plano no papel te ajudou de alguma forma?

SITUAÇÃO 3, LETRA (A)

- Leia a questão
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou em resolvê-la.
- Faça a atividade no papel.
    - (SE NÃO CONSEGUIR FAZER, PEDIR PARA FAZER A LETRA B)
    - Por que fizeste assim?
    - Quais são as variáveis da situação?
    - Que técnica é esta que usas?
    - Já fez esse tipo de questão na escola?

SITUAÇÃO 3, LETRA (B)

- Leia a questão e faça um planejamento no papel de como vai programar. Use suas ideias de programação.
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou no seu plano.
- Faça a atividade
    - Por que fizeste assim?
    - O que acontece quando o personagem se movimenta 10 passos no x? O que acontece com o movimento no y? Por quê?
    - O que isso tem a ver com a lei da função?
    - Essa relação (CITAR DA FORMA COMO O ESTUDANTE EXPLICITA A RELAÇÃO) acontece em todos os tipos de funções? A regra é sempre a mesma em toda a função independentemente do x?
    - Tu já tinhas pensado desta forma? Algum outro exercício permitiu isto?
    - Se tivéssemos uma outra função como você faria as relações no programa?

SITUAÇÃO 4, LETRA (A)

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar.
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou o seu plano.
- Faça a atividade
    - Por que escolheste estes valores (coeficientes)?
    - O que significa cada um deles?
    - Quais são as variáveis da situação e o que elas representam?
    - Por que decidiu usar estas letras/símbolos/palavras?
    - As variáveis do programa são as mesmas da situação matemática? Por quê?
    - Em relação as variáveis, quem depende de quem?
    - Como podemos saber se está certo o programa?

SITUAÇÃO 4, LETRA (B)

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar.
    - Explique sobre o que entendeu da questão e como pensou no seu plano.
- Faça a atividade

- Explica o que seu programa faz.
- Qual é a diferença desta para a anterior?

SITUAÇÃO 5

- Leia a questão e faça um planejamento de como vai programar.
  - Explique sobre o que pensou em criar e por quê.
- Faça a atividade
  - O que fizeste? O que o programa faz?
  - Por que escolheu fazer isso?
  - Quais são as variáveis da situação e o que elas representam?

PERGUNTAS GERAIS

- O que tu achaste destas atividades?
- Tu gostarias de ter feito isso na escola o ano passado? Por quê?
- No que tu achas que o Scratch poderia ajudar os estudantes neste conteúdo?
- Tu achas que há alguma diferença de complexidade entre as duas formas de fazer, no papel e no Scratch?
- Tem algo que tu passaste a entender melhor agora, ou que percebeu e que não tinha percebido antes? O quê?
- Tuas estratégias para resolver estas questões de matemática são diferentes com o Scratch? Em que sentido?

ANEXO

ANEXO 1 - Aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa

UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO/ PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Programação de computadores com o software Scratch: um estudo sobre os conhecimentos em ação de estudantes do Ensino Médio sobre Funções Matemática

Pesquisador: Valéria Espindola Lessa
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 67702717.7.0000.5342
Instituição Proponente: UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.092.094

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_869621.pdf	25/04/2017 08:53:58		Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	5_termo_autor_institucional.pdf	25/04/2017 08:51:57	Valéria Espindola Lessa	Aceito
Declaração de Pesquisadores	4_declaracao.pdf	25/04/2017 08:51:30	Valéria Espindola Lessa	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	3_TA_estudante.pdf	25/04/2017 08:50:36	Valéria Espindola Lessa	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	2_Tcle_pais.pdf	25/04/2017 08:50:20	Valéria Espindola Lessa	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	1_proj_detalhado.pdf	25/04/2017 08:49:12	Valéria Espindola Lessa	Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_assinada.pdf	12/03/2017 16:34:44	Valéria Espindola Lessa	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

CIP – Catalogação na Publicação

L638p Lessa, Valéria Espíndola

A programação de computadores e a Função Afim : um estudo sobre a representação e a compreensão de invariantes operatórios / Valéria Espíndola Lessa. – 2018.

184 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, 2018.

1. Programação (Computadores). 2. Invariantes operatórios. 3. Função afim. 4. Matemática - estudo e ensino. I. Teixeira, Adriano Canabarro, orientador. II. Título.

CDU: 372.851

Catalogação: Bibliotecária Jucelei Rodrigues Domingues - CRB 10/1569