UPF UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

PPGECM
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituto de Humanidades, Ciências, Educação e Criatividade - IHCEC

Jozeane Candido Moreira Flôres

POTENCIALIZANDO O ENSINO DE GEOMETRIA COM O USO DO ORIGAMI MODULAR E O SOFTWARE POLY PRO NA CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS DE PLATÃO

Passo Fundo

2023

Jozeane Candido Moreira Flôres

POTENCIALIZANDO O ENSINO DE GEOMETRIA COM O USO DO ORIGAMI MODULAR E O SOFTWARE POLY PRO NA CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS DE PLATÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto de Humanidades, Ciências, Educação e Criatividade, da Universidade de Passo Fundo dentro do projeto de cooperação entre Instituições - PCI, entre a Universidade de Passo Fundo e a Faculdade Católica de Rondônia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do professor Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira.

Passo Fundo

2023

CIP – Catalogação na Publicação

F634p Flôres, Jozeane Candido Moreira

Potencializando o ensino de geometria com o uso do Origami modular e o software Poly Pro na construção dos sólidos de Platão [recurso eletrônico] / Jozeane Candido Moreira Flôres. – 2023.

4.8 MB ; PDF.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Passo Fundo, 2023.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria espacial. 3. Poliedros. 4. Tecnologia educacional. 5. Origami. I. Pereira, Luiz Henrique Ferraz, orientador. II. Título.

CDU: 372.851

Catalogação: Bibliotecária Juliana Langaro Silveira - CRB 10/2427

Jozeane Candido Moreira Flôres

Potencializando o ensino de Geometria com o uso do Origami modular e o *Software Poly Pro* na construção dos sólidos de Platão

A banca examinadora abaixo, APROVA em 30 de novembro de 2023, a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial de exigência para obtenção de grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na linha de pesquisa Práticas Educativas em ensino de Ciências e Matemática.

Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo - UPF

Dra. Nilce Fatima Scheffer
Nome da instituição a que pertence - UFFS

Dr. Juliano Tonezer da Silva
Universidade de Passo Fundo - UPF

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao senhor Deus do Universo, meu orientador maior, que durante esta caminhada de estudos iluminou o meu caminho, sempre me fortaleceu, concedendo-me fé, saúde e inteligência para conseguir terminar este Mestrado que um dia pareceu ser impossível. Obrigada pelos inúmeros milagres em minha vida.

Agradeço ao meu amado filho, Wagner Junior Silva, por acreditar em mim, e estar ajudando na formatação e produção de imagens sempre que eu precisei. Assim como minha Nora, Eduarda dos Santos de Faria, que sempre esteve presente nos meus fins de semana com sua alegria, tornando tudo mais agradável.

Agradeço ao meu orientador Luiz Henrique Ferraz Pereira, pela atenção a mim desempenhada, por suas considerações valiosas, além das colocações e intervenções ao longo desse período, sempre disposto a dar o melhor de si.

Agradeço a todos os professores da UPF do PPGECM, que foram mais que professores, sempre repassando seus conhecimentos com a finalidade de formar professores melhores, que repensam sua prática, em especial à Profª. Drª Cleci Werner da Rosa, por sua competência profissional e carinho, fonte de inspiração, agradeço pelos aprendizados ao longo desde trabalho e ensinamentos que levarei para vida.

Agradeço também aqueles que marcaram minha vida neste período de caminhada e que com certeza vou levar para todo sempre, amigos que ganhei através do mestrado.

Aos meus amados alunos do segundo ano que fizeram parte dessa pesquisa, colegas de profissão e principalmente a equipe gestora, Elaine Cristina Moraes Rodrigues, Heder Ferreira e Josenilda Bizi, que além de me apoiar, aceitaram fazer parte desta pesquisa, sem vocês nada disso seria possível. A todos, minha eterna gratidão.

Aos membros da banca, a professora Drª. Nilce Fatima Scheffer, o Prof. Dr. Juliano Tonezer da Silva, Professor Dr. Cristiano Roberto Buzatto por terem aceitado o convite em participar deste momento especial e, ao meu orientador Luiz Henrique Ferraz Pereira, pela disponibilidade, sugestões e críticas construtivas para o aprimoramento do meu trabalho.

E, por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para esta conquista.

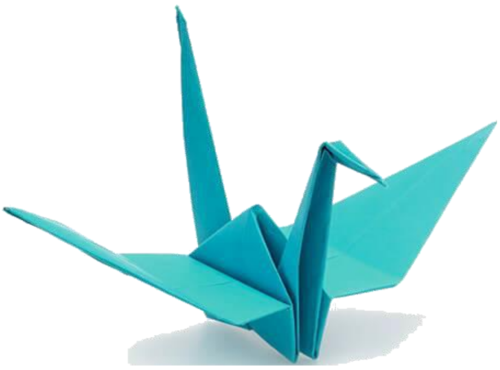
Aos meus pais:
Natanael Gonçalves Moreira e aparecida Candido Moreira, meus exemplos de vida que, com toda garra, força e coragem, mesmo em meio a tantas dificuldades batalharam para me oferecer uma educação baseada em princípios. Obrigada por vosso infinito amor.

Aos meus filhos:
Wagner Junior Silva, Mateus Moreira Flôres, Davi Moreira Flôres e meu bebê Gael Moreira Gonçalves que com um sorriso inocente me faz entender a essência da felicidade, ambos, presentes de Deus, inspiração do meu viver.

Ao meu companheiro:
Jean Carlos Gonçalves, por compreender os momentos em que estive ausente e que de forma especial e carinhosa deu-me força e coragem, apoiando nos momentos de dificuldades, acreditando em mim e incentivando a concretização deste sonho.

Todo origami começa quando colocamos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.

Tomoko Fuse



RESUMO

Esta pesquisa teve como objeto de estudo, a construção de ações com a intencionalidade de potencializar o aprendizado do conteúdo, em Geometria espacial, de poliedros de Platão. Para tal feito se apoiou no software matemático Poly Pro, em sua versão 1.12 juntamente com o uso o Origami modular. Tais ações foram desenvolvidas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Rio Crespo/RO. Seu alicerce teórico está na teoria sociointeracionista de Lev Vygotsky, principalmente em seus conceitos de mediação, zona de desenvolvimento proximal e construção de conceitos científicos. A pesquisa desenvolvida foi de natureza quantitativa e qualitativa e teve como pergunta norteadora: O uso do Origami modular e software Poly Pro, podem auxiliar o processo de ensino, e consequentemente, potencializar a aprendizagem da geometria espacial com relação aos sólidos de Platão? Tendo como objetivo oportunizar condições para o ensino dos sólidos de Platão, através da inserção e práticas do Origami, juntamente com o software Poly Pro, na intenção de potencializar o aprendizado do referido conteúdo. A metodologia aplicada se deu em três momentos: 1º Convencional; 2º Manipulativo com Origami e, 3º Uso do software Poly Pro. Como instrumentos de coleta de dados foram usados questionário aplicados aos alunos e registros das atividades desenvolvidas. Para auxiliar outros professores a executarem ações semelhantes foi elaborado o Produto Educacional “Polygami: Uma proposta para o ensino da Geometria dos poliedros de Platão com o uso do software Poly Pro e o Origami Modular”, disponível na página do PPGECM https://www.upf.br/ppgecm/dissertacoes-e-teses e Educapes http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/743171. Concluiu-se ao final desta pesquisa, que o Origami modular e o software Poly Pro associados ao tema da atividade já mencionada, são potencializadores para a aprendizagem dos conceitos geométricos envolvidos nos sólidos de Platão, bem como revelou o quanto o professor é agente ativo e transformador, responsável por potencializar a apropriação e o uso de ferramentas e signos pelos sujeitos pesquisados.

Palavras chave: Origami Modular. Poliedros Regulares de Platão. Poly Pro Software educacional. Produto Educacional.

ABSTRACT

This research had as its object of study the construction of actions with the intention of enhancing the learning of content, in spatial Geometry, of Plato's polyhedra. To achieve this, we relied on the Poly Pro mathematical software, in its version 1.12, together with the use of modular Origami. Such actions were developed in a 2nd year high school class at a school in the city of Rio Crespo/RO. Its theoretical foundation is in Lev Vygotsky's sociointeractionist theory, mainly in his concepts of mediation, zone of proximal development and construction of scientific concepts. The research developed was quantitative and qualitative in nature and had as its guiding question: Can the use of modular Origami and Poly Pro software help the teaching process, and consequently, enhance the learning of spatial geometry in relation to Plato's solids? Aiming to provide conditions for teaching Plato's solids, through the insertion and practices of Origami, together with the Poly Pro software, with the intention of enhancing the learning of said content. The methodology applied took place in three moments: 1st Conventional; 2nd Manipulative with Origami and, 3rd Use of Poly Pro software. Questionnaires applied to students and records of the activities carried out were used as data collection instruments. To help other teachers carry out similar actions, the Educational Product “Polygami: A proposal for teaching the Geometry of Plato's polyhedra using the Poly Pro software and Modular Origami” was created, available on the PPGECM https://www.upf.br/ppgecm/dissertacoes-e-teses and Educapes pages http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/743171. At the end of this research, it was concluded that modular Origami and the Poly Pro software associated with the theme of the activity already mentioned, are enhancers for learning the geometric concepts involved in Plato's solids, as well as revealing how much the teacher is an active agent and transformative, responsible for enhancing the appropriation and use of tools and signs by the researched subjects.

Keywords: Modular Origami. Plato's Regular Polyhedra. Poly Pro Educational Software. Educational Product.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Tem-se aqui neste primeiro momento o intuito de relatar um pouco sobre minha trajetória profissional. Moro em Rio Crespo – Rondônia, trabalho nas Escolas municipal e estadual do mesmo município. Sou professora desde 1997, confesso que entrei nessa profissão por falta de oportunidade numa outra, pois me casei e fui morar em uma cidadezinha do interior sem opções de empregos, pela necessidade do momento optei por ela mesma.

Sem dúvida essa não é a melhor forma para se escolher uma profissão, passei por várias dificuldades com alunos ao qual tive que aprender sozinha a sair delas, pegando instruções com outros professores que já trabalhavam, de como fazer o plano de aula, como seguir os conteúdos, enfim, de como fazer tudo, inclusive se comportar em sala, mas isso não é passado, isso se aprende fazendo no convívio do dia a dia, podendo errar e permanecer no erro, porém eu queria ser diferente, queria além de professora ser amiga e companheira de meus alunos, queria que gostassem das minhas aulas, foi, no entanto, o primeiro passo para eu querer aprender mais e buscar coisas que atraísse meu aluno às minhas aulas.

Para fazer a diferença que eu tanto queria, me dedicava, horas e horas, em uma sala de livros antigos, folheava o máximo para encontrar neles a inovação a qual eu buscava, com as sugestões no guia dos professores eu aprendia cada vez mais, eles tinham jogos de memória, jogos de dominó, material dourado, quebra cabeças, jogo de palavras, cruzadinhas, enfim, uma riqueza de ideias, de auxílio ao professor, por serem livros que não utilizávamos eu recortava tudo que me interessava e colava em papelão ou papel cartão pra melhorar a consistência, para que ficasse firme ao manuseio dos meus alunos.

Sempre adaptei o material ao meu alunado de acordo ao entendimento e necessidade de cada um, conseguindo assim atingir meus objetivos, alcançando o aprendizado e interesse dos meus alunos que, com o carinho, respeito e admiração que demonstravam a mim, me fez entender e descobrir que essa era a profissão que eu amava e queria para mim.

Por só ter o Ensino Médio, fui em busca de me aprimorar, fiz magistério por este ser o que tinha para o momento, porém o sistema educacional logo exigiu que os professores se aprimorassem, surgindo a oportunidade da tão sonhada graduação, graduei-me então, em Matemática, área da qual amo e faço de tudo para que meu aluno também a veja como eu, assim venho trilhando meu caminho, já fiz três pós-graduações e pelo fato de gostar do que faço, estou mais uma vez aqui estudando para melhorar meus conhecimentos e consequentemente, minha prática pedagógica.

Ensinar Matemática não vem sendo uma tarefa fácil, por esta ser uma disciplina muito complexa e por ainda ser ensinada por muitos professores de forma desprovida de interesse aos alunos dessa nova geração associada a meios tecnológicos, pensando nisso, faz-se necessário usar da criatividade para mudar esse atual cenário educacional, de forma a ir ao encontro desse alunado transformando-os em peças ativas de transformação de saber envolvendo-os no processo.

No que diz respeito à Geometria Espacial, percebe-se ainda hoje que, quando essa é trabalhada, ocorre de forma tradicional, apenas com uso de quadro, pincel e livro didático, tratada de forma superficial focando apenas em problemas geométricos que privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração, cálculos dos quais os alunos não veem nenhum significado ou importância para sua vida.

Tive essa percepção enquanto aluna, vi muito pouco de geometria no Ensino Fundamental, e menos ainda no Ensino Médio, o que me deixou com uma grande lacuna nesse assunto, sendo prejudicada em provas externas e, como professora de Ensino Médio percebo que alunos vem do Ensino Fundamental com uma grande defasagem no que diz respeito a conceitos básicos de Geometria, sendo essa uma aprendizagem mecânica, cuja preocupação tem sido a memorização e baseada na transmissão de técnicas, teorema e fórmulas prontas e gravadas pelos alunos por meio da repetição, e, este por sua vez, muitas vezes não compreende o que é ensinado, preocupando-se apenas em passar nas provas dessa disciplina. Assim como citados em pesquisas realizadas por Lorenzato (1995) que nos leva a observar que:

> São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. [...] Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos (LORENZATO, 1995).

O que me motivou a desenvolver essa pesquisa foi por gostar desse assunto e por perceber a importância dela para o ser humano, além de acreditar que se bem trabalhada, de forma dinâmica e com materiais manipuláveis, vá ao alcance do interesse e aprendizado do aluno. Logo, essa fará uso do Origami e do Software Poly Pro, acreditando-se que contribua com professores comprometidos com uma educação prazerosa e de qualidade para inovar e diversificar as aulas de Geometria no que diz respeito aos sólidos regulares de Platão, melhorando cada vez mais o processo de ensino-aprendizagem.

No entanto, essa pesquisa tem o interesse de utilizar alternativas pedagógicas que coloque o foco do processo de ensino no aluno, de forma a envolvê-lo com atividades práticas, sendo ele protagonista de sua aprendizagem, sugerindo-se então, o uso de materiais manipuláveis (dobraduras), o Origami, para construção dos sólidos de Platão, e a inserção de tecnologias digitais como: slides, vídeos e uso do software Poly Pro que permite uma exploração dos objetos na tela em 3D de forma concreta, ampliando sua compreensão com uma metodologia a mais, acreditando que a tecnologia tem sido atrativa aos olhos dos educandos dessa era da informação, acreditando ainda que a inserção deste software facilitará a absorção de conhecimentos já transmitidos, potencializando a aprendizagem do conteúdo citado anteriormente.

O ensino de Matemática pode contribuir forte e positivamente na formação do aluno, desde que explore temas que encontrem nela ferramentas de relevância para sua compreensão. Notadamente, o Origami, assim como o software Poly Pro é uma poderosa ferramenta que permitirá aos alunos construir e manipular objetos tridimensionais representantes do conceito abstrato de poliedros, acredita-se que estes aprenderão geometria e entenderão o conceito de espacial, pois, observando as características dos elementos ao qual estudarão, vendo e tocando, não apenas imaginando-os com base em um desenho bidimensional, trazendo um impacto positivo na prática didática em sala de aula.

O Origami é uma arte oriental de baixo custo financeiro e alto poder instrutivo podendo ser feita com materiais simples, como papel A4, papel de jornal, papel reciclável entre outros, pode-se aprender Matemática de uma forma divertida. Assim o aluno percebe que, com uma simples folha de papel, pode construir, desde um simples polígono, como o hexágono, até um sólido geométrico como o icosaedro.

Já em referência ao software Poly Pro, este vem associar-se ao trabalho realizado com o Origami, por ser um software educativo para a criação e exploração de poliedros, este é simples e de fácil manipulação, permite uma visualização privilegiada da planificação e dos sólidos geométricos, análise e estudo de formas poliédricas, além de imagens exibidas em três maneiras, sendo possível fazer movimentos rotacionais, manipulando os objetos, dando a ideia de estar dobrando, desdobrando e ainda assistir a uma movimentação automática destes, estimulando a percepção espacial do educando permitindo o aprofundamento e consolidação do conhecimento matemático já desenvolvido com as dobraduras.

Kaleff (2003) relata que para alguns pesquisadores a habilidade de visualização é tão importante quanto realizar cálculos numéricos e a utilização de símbolos algébricos.

Sendo assim, acredita-se que estes instrumentos e signos, podem ser utilizados como recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade, do senso estético e do espírito de investigação, entre outras competências e habilidades recomendadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1998), nas categorias que dizem respeito à representação e comunicação, à investigação e compreensão e à contextualização sociocultural.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2019), referente ao conteúdo de Geometria, espera-se que os alunos do Ensino Fundamental Anos Iniciais, Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino médio, consigam atingir determinados objetivos. No Ensino Médio, o objetivo da Geometria é: construir a Matemática integrada e aplicada à realidade, em diferentes contextos; desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas; raciocinar, representar, comunicar-se e argumentar de forma a aprender conceitos, representações e procedimentos cada vez mais aprofundado (BRASIL, 2019, p. 529).

Essa proposta de atividade também vem ao encontro do que é explicitado na competência cinco da BNCC (BRASIL, 2019), relacionada à Matemática e suas tecnologias, esta deixa explicito que é preciso propor e oportunizar aos alunos a investigação, a utilização de diferentes estratégias pedagógicas e tecnológicas, a experimentação e a observação para a construção de conceitos e propriedades matemáticas.

Ambos os documentos orientam que o professor deve utilizar diferentes recursos didáticos, sejam tecnológicos, digitais ou não, como mediadores no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, estes nos amparam, pois segundo eles, a contextualização e a utilização dos recursos citados anteriormente, são algumas das ações que contribuem para que as aprendizagens essenciais sejam desenvolvidas.

Assim, a fusão da arte de dobrar papéis o Origami e o software Poly Pro serão utilizados para potencializar o ensino de Geometria Espacial, em especial, os poliedros regulares, também conhecidos como poliedros platônicos, de maneira mais dinâmica em conteúdo que antes ficavam limitados ao espaço bidimensional da lousa ou do livro didático.

O exposto justifica a realização de atividades com o auxílio do Origami e uso de software (tecnologias) ao qual de forma atrativa e dinâmica intensificaram a aprendizagem de do referido conteúdo para a construção e manipulação dos sólidos de Platão numa turma de alunos do 2º Ano do Ensino Médio.

Compreende-se a problemática e a pergunta de pesquisa diante da necessidade de se trabalhar a Geometria Espacial para alunos de Ensino Médio, a partir da construção e manipulação de sólidos geométricos, pois essa, muitas vezes é trabalhada superficialmente no Ensino Fundamental, apenas com o uso do livro didático de forma tradicional, necessitando uma abordagem mais ampla no Ensino Médio fazendo necessário práticas pedagógicas que permita e estimule a participação do aluno na construção e manipulação desses sólidos geométricos, pois este tema da Matemática engloba muitas aplicações práticas, podendo ser usada na resolução e compreensão de determinados problemas algébricos, levando-nos a questionar: **O uso do Origami modular e software Poly Pro, podem auxiliar no processo de ensino, e consequentemente, aprendizagem da Geometria espacial com relação aos sólidos de Platão?**

Como objetivo geral pretende-se oportunizar condições para o ensino dos sólidos de Platão, através da inserção e práticas do Origami, juntamente com o software Poly Pro, na intenção de potencializar o aprendizado do referido conteúdo.

De forma mais específica pretende-se, ainda:

- Introduzir definições e conceitos sobre poliedros de Platão identificando seus elementos.
- Demonstrar com dobraduras as relações existentes entre figuras planas e espaciais.
- Construir os poliedros de Platão com dobraduras (Origami modular) e fazer o uso do software educacional Poly Pro 1.12.
- Elaborar, um paradidático de apoio aos professores, ou seja, o Produto Educacional.

A presente dissertação traz aqui a introdução como sendo o primeiro capítulo desta, expondo relatos sobre a trajetória acadêmica e profissional da pesquisadora, além de motivações que a fizeram optar por este estudo, bem como sua problemática, pergunta de pesquisa e definição dos objetivos da mesma. No entanto, é com finalidade de atingir os objetivos aqui propostos que este trabalho foi organizado em sete capítulos, sendo que esse primeiro justifica todo desenrolar dessa pesquisa.

No segundo capítulo intitulado de “Revisão de Literatura”, vem relatando pesquisas realizadas sobre o tema da investigação, trabalhos que foram importantes para a escrita desta dissertação, com o levantamento de dados no banco de teses e dissertações da CAPES.

No terceiro capítulo apresenta-se os aportes teóricos do estudo e do Produto Educacional, no qual são descritas fontes da literatura acerca do foco dessa pesquisa, destacando documentos oficiais de matemática, bem como fontes e obras de referência pesquisadas, das quais utilizam materiais diversificados ao ensino de Geometria e uma contextualização histórica do Origami, relata sobre teorias de Vygotsky, definições pertinentes sobre a relação entre Geometria e os poliedros, apresentando a definição da expressão "Poliedros de Platão", ou ainda "Sólidos de Platão", utilizadas constantemente neste trabalho. Este ainda faz um resgate histórico, sobre importantes matemáticos, filósofos e astrônomos que dedicaram suas pesquisas aos Poliedros Platônicos, deixando seus exemplos e grandes contribuições para a Matemática de hoje.

No quarto capítulo tem-se a História do Origami, História do Origami no Brasil, e suas contribuições no ensino da Matemática, descrevendo ainda os axiomas que envolve esta técnica como regras que contribuem na compreensão de conceitos geométricos como: simetrias, congruências, ângulos, razões, proporções etc. Este ainda explica os tipos de módulos e demonstra o passo a passo das dobraduras dos módulos de faces triangulares, que servirá para montar o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, os quadrangulares para a construção do hexaedro e pentagonais para construção do dodecaedro, ambos denominados sólidos de Platão.

O quinto capítulo vem demonstrar todos os passos de montagem dos poliedros regulares de Platão, numa sequência do primeiro ao quinto poliedro, sendo estes, tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, icosaedro regular, e por fim, o último elemento o dodecaedro regular, de modo a contribuir com a compreensão do leitor.

O sexto capítulo expõe o **Produto Educacional,** um livro paradidático, idealizado com o objetivo de proporcionar apoio ao profissional docente**,** este foi organizado em V unidades, das quais apresentarão uma sequência de atividades, com o uso dos recursos do Origami modular e o software Poly Pro. Atividades pensadas e sequenciadas para promover o ensino por meio da dinamicidade e interatividade, proporcionada com uso da tecnologia e do material manipulativo.

O sétimo capítulo retrata os caminhos metodológicos, expondo a metodologia utilizada na pesquisa desenvolvida com alunos do 2º Ano do Ensino Médio, na cidade de Rio Crespo-Rondônia, aplicada em três momentos distintos: sendo o 1º chamado de **Convencional,** o 2º **Manipulativo com Origami** e o **3º Uso do Software Poly Pro**, bem como, a descrição dos dados coletados e a análise dos resultados encontrados.

Para finalizar, "**As considerações finais**" traçam um paralelo entre a questão inicial e os achados desta pesquisa, tomando por base os resultados e discussões que permearam este estudo.

Após os capítulos anunciados, faz-se um o fechamento desta investigação trazendo as referências e os apêndices utilizados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Construiu-se as bases desta revisão, por meio de busca em várias pesquisas bibliográficas em livros, artigos publicados em anais e revistas, banco de teses, dissertações e em sites de busca na internet, com o intuito de verificar os trabalhos existentes sobre Origami modular relacionado com os Poliedros de Platão e uso do software Poly Pro. Os trabalhos aqui trazidos foram localizados no banco de teses e dissertações da Capes e, tendo como filtro: O uso do Origami na Geometria, O uso de software na Geometria Espacial, Origami modular e poliedros de Platão, Software Poly Pro e os poliedros de Platão, dos quais apresento de forma resumida abaixo e indicados na tabela 1 apresentada na sequência.

Minha primeira revisão de estudos similares ao meu trabalho foi a dissertação de Dayane de Andrade Oliveira Paulino, cujo tema: **Origamis Modulares E Os Poliedros De Platão,** dissertação de mestrado ano de 2020, desenvolvida numa turma de 2º ano do Ensino Médio, apresentada a Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa. A autora defende a aprendizagem através da construção e manipulação de sólidos geométricos a partir de dobraduras com Origami, por entender que esse é de baixo custo e de fácil entendimento e que ainda favorece uma aprendizagem significativa e prazerosa ao aluno que sai da rotina de aulas monótonas e corriqueiras desprovida de interesse.

A autora destaque em seu objetivo geral, a proposta em aplicar o Origami Modular no ensino da Geometria, principalmente no tocante a introdução dos poliedros regulares, os sólidos de Platão, destacando as propriedades matemáticas existentes em cada dobra realizada no papel, teve como referência a obra de Cavacami e Furuya (2010), cujas construções estão dispostas no livro Explorando Geometria com Origami, disponível para download no site da OBMEP de forma gratuita, a autora relata ainda todo o contexto histórico do Origami.

A autora também cita a necessidade de apresentar os sólidos de Platão com Origami modular, partindo de uma perspectiva diferente da que vem sendo utilizada, destacando como proposta a utilização do passo a passo disponível na apostila do PIC (Programa de Iniciação Científica Jr), presente no acervo da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas), a fim de estruturar melhor os conceitos matemáticos envolvidos na arte do Origami.

Portanto, diante de todo o exposto e trabalhado, a autora relata ter atingido os objetivos pretendidos de maneira satisfatória possibilitando uma melhor compreensão da Matemática através da manipulação de pedaços de papel, visto que tais conceitos de Geometria são encarados como difíceis, causando temores nos estudantes.

O segundo trabalho analisado foi de Anita Lima Pimenta, cujo tema é **Construindo Poliedros Platônicos com o Origami** Uma perspectiva axiomática, dissertação apresentada ao mestrado em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC–MG) no ano de 2017, do qual seu público-alvo foi professores que atuam na rede municipal de Belo Horizonte e estudantes do curso de graduação em Matemática da UEMG-Campus Ibirité acreditando que esse público seria multiplicador desse trabalho.

Neste trabalho a autora teve como objetivo geral inserir a prática do Origami em sala de aula, na expectativa de que, com sua abordagem axiomática afim que a aprendizagem da Geometria tornasse mais significativa, proporcionando maior compreensão no estudo dos Poliedros Platônicos, esta organizou oficinas com 14 professores de áreas distintas, a saber: Artes, Física, Matemática e Pedagogia, em seguida com um grupo de 48 graduandos do curso de licenciatura de Matemática apresentando atividades geométricas que pudessem ser realizadas com o auxílio do Origami, e em especial na construção dos Poliedros Platônicos.

Esta buscou, na história da Geometria, os registros sobre os Poliedros Platônicos e conhecer o contexto histórico do Origami nos trabalhos de Gazire (2000), Prieto (2002), Rafael (2011), Rego e Gaudêncio Jr. (2003), Kaleff (2003), Genova (2001), Costa (2007), Fuse (1990) e Lang (2010) os quais trazem para o contexto escolar um embasamento científico que justifica o matematicamente o uso dessa técnica nas aulas de Geometria.

Além do objetivo geral, ainda foi citado outros propósitos norteadores da pesquisa em questão que foram: Construir, através de dobraduras, conceitos elementares da Geometria Plana; confeccionar os Poliedros Platônicos através de Origami modular, e elaboração do produto Educacional, um material paradidático de apoio ao professor para o trabalho com Origami no contexto da Geometria, pautando-se nos PCNs (BRASIL, 1997) que sugerem o uso de dobraduras para a realização de atividades geométricas.

Em sua conclusão a autora cita que o desenvolvimento do estudo, demonstrou que o Origami possibilita um trabalho efetivo na aprendizagem da Geometria de maneira lúdica, contextualizada, possibilitando a autonomia dos alunos, entendendo-o como um suporte para a elaboração de conceitos por meio de materiais concretos.

Outro estudo foi na dissertação de Thaciane Jähring Schunk **Produção de significados para Poliedros de Platão e relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática no Ensino Fundamental** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Campus Vitória do Instituto Federal do Espírito Santo no ano de 2021. Esta pesquisa a autora investiga os significados produzidos pelos alunos do 8° ano do ensino fundamental do Colégio Ápice diante de uma abordagem pedagógica utilizando a História da Matemática no estudo de Poliedros de Platão e da Relação de Euler.

A autora relata como questão norteadora, **Que significados são produzidos pelos alunos do 8° Ano do Ensino Fundamental II diante de uma prática pedagógica que utiliza a História da Matemática no estudo de poliedros de Platão e da relação de Euler?** tendo como objetivo geral analisar a produção de significados de alunos do 8° ano do ensino fundamental no estudo de Poliedros de Platão e Relação de Euler, diante de uma proposta metodológica na perspectiva da História da Matemática, com os seguintes objetivos específicos: Descrever como a história dos Poliedros de Platão e a Relação de Euler tem sido abordada em sala de aula; Elaborar uma situação pedagógica objetivando uma atividade de ensino e aprendizagem dos poliedros de Platão e relação de Euler em uma turma do 8° ano; Discutir algumas contribuições da História da Matemática na abordagem de Poliedros de Platão e Relação de Euler como parte das ações da atividade; Analisar, a partir de princípios do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), dados produzidos pelos alunos sobre Poliedros de Platão e Relação de Euler e por fim esta produziu um Paradidático (digital) com atividades para o ensino-aprendizagem de Poliedros de Platão e Relação de Euler, contendo relações com a historiografia da matemática e orientações para a criação de Performance Matemática Digital (PMD), esta, optou por uma pesquisa de abordagem qualitativa, e o estudo de caso.

Para essa proposta metodológica, foi considerada a Teoria da Atividade de Leontiev, a qual tem como precusor Alexis Nikolaevich Leontiev (1903-1979), tendo por base elementos da teoria histórico-social de Lev Semynovich Vygotsky17 (1896-1934), que considera essencial as interações sociais e o ambiente sociocultural para o desenvolvimento ontogenético.

A pesquisadora relata que tudo se desenvolveu no contexto da pandemia do COVIDE 19 e que esse trouxe muitos desafios e dificuldades! Mesmo em meio a esses, alcançou seus objetivos, inclusive a elaboração de um Paradidático (digital) com tarefas embasadas na História da Matemática. Ademais, foi desenvolvida pelos alunos participantes e pesquisadora, uma Performance Matemática Digital (PMD), que acompanha o Paradidático.

Outro trabalho que me chamou a atenção foi a dissertação de Diviane Maria Dias Rodrigues cujo tema é: **Reflexão de uma Prática Interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Geometria de Posição e Sólidos de Platão** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa Paraná no ano de 2019.

Pesquisa pautada em métodos sociointeracionistas, fundamentadas na teoria de aprendizagem de Vygotsky, por meio da realização de atividades no formato de grupos focais, com o planejamento de atividades centradas nos discentes e relatório-avaliação. A pesquisa foi de cunho qualitativo, interpretativo e de intervenção que proporciona a observação dos processos de ensino e aprendizagem.

Em sua dissertação a autora teve como objetivo geral analisar a promoção do ensino e aprendizagem da Geometria de Posição e Poliedros Regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediados por uma ação docente sociointeracionista interdisciplinar e contextualizada. Os objetivos específicos foram: Propor um Produto Educacional; Estabelecer relações entre várias áreas do conhecimento com a Geometria de Posição e Poliedros Regulares; Levantar questões em forma de desafios referente à Geometria de Posição e Poliedros Regulares; Explicar questões Matemáticas referentes ao estudo de Geometria de Posição e Poliedros Regulares; Identificar o nível de interesse dos discentes frente ao desenvolvimento das aulas; Reconhecer possíveis erros de significação, e, por fim, elaborou um Produto Educacional para subsidiar as ações docentes referentes ao ensino de Matemática, com vistas a melhoria do entendimento daquilo que é ensinado em sala de aula.

Sua pesquisa foi constituída de três aplicações, para a primeira aplicação utilizou-se um plano de unidade particular e distinto, para a segunda e terceira aplicação utilizou-se o mesmo plano de unidade a única modificação entre os dois planos de unidades foi a carga horária, na primeira aplicação, aplicado a 22 alunos do 2º ano em cinco aulas na Escola Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas e na segunda e terceira aplicações. A segunda com 30 alunos e terceira aplicação para 20 alunos do curso técnico de Alimentos e Química do 1º ao 4º ano do Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay , ambos na cidade de Ponta Grossa.

Os resultados obtidos indicam que o Produto Educacional desenvolvido a partir desse tema é visto com bons olhos porque os discentes, em contato com os materiais didáticos diversificados e com as estratégias por meio de grupos focais, demonstraram um bom interesse na participação de cada atividade proposta.

Pesquisou-se ainda a dissertação intitulada, “**O Ensino de Poliedros por Atividades**” de João Nazareno Pantoja Corrêa, apresentada a Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará no ano de 2019. Esta teve como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Poliedros por Atividades sobre os aspectos conceituais e desempenho da resolução de questões envolvendo o assunto. A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública federal de Tucuruí/PA com 26 alunos do 3º ano do Ensino Médio, adotando como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. A análise dos resultados se deu pelo registro dos discentes nas atividades, confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*, pela comparação entre os resultados do pré-teste com o pós-teste, análise dos erros ocorridos no pós-teste, bem como pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese. O autor em sua conclusão relata que os resultados da comparação apontaram aumento nas notas do pós-teste; o teste de hipótese comprovou que as notas do pós-teste tiveram melhora estatisticamente em relação ao pré-teste, constatando que o bom resultado do experimento se deve sobretudo à metodologia utilizada.

Ainda para compor esse estudo, foi analisada a dissertação de Ana Paula Gonçalves, de tema "**O uso do Software Poly Pro no Ensino-Aprendizagem da geometria espacial no 6º Ano do Ensino Fundamental**", apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* - Nível Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Goiás em 2021.

A autora teve como objetivo geral, investigar as possíveis contribuições do *software* Poly Pro como recurso metodológico para um melhor ensino-aprendizagem em geometria espacial no sexto ano do ensino fundamental II. Já os objetivos específicos foram: Mostrar a importância da geometria espacial, uma vez que ela se faz presente no dia a dia e em diversas profissões. Desenvolver uma sequência didática que envolva geometria espacial e o *software* Poly Pro. Elaborar um *ebook* contendo sequência didática, lista de exercícios e informações sobre a utilização do Poly Pro e geometria espacial no ensino.

Nesta a autora realizou pesquisa qualitativa com alguns professores de matemática descobrindo que poucos professores utilizam os *softwares* durante as aulas de matemática e que nenhum conhecia o Poly Pro. Numa segunda etapa, foi realizada um estudo de caso numa escola municipal de Rubiataba com alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental II com o objetivo de verificar as possíveis potencialidades do *software* para o ensino de sólidos geométricos. A partir de uma sequência didática utilizada no estudo de caso foi montado o produto educacional em forma de um *ebook* com atividades, sequência didática e informações sobre o *software* Poly Pro. Em sua conclusão cita que no decorrer da pesquisa pode-se perceber que o *software* Poly Pro é uma valiosa ferramenta para o ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos.

Em leitura ainda ao trabalho de Wagner dos Reis Silva sob tema: **A Visualização dos sólidos de Platão com o uso de materiais concretos: uma proposta para o ensino dos poliedros** dissertação apresentada ao Mestrado Profissional – PROFMAT a Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri aplicado a uma turma de 9º Ano em 2018. O autor teve como objetivo geral: Elaborar uma intervenção didática para aprimorar a habilidade de visualização dos poliedros através da construção dos sólidos de Platão com materiais manipuláveis, já os objetivos específicos foram: Utilizar materiais manipuláveis para aprimorar a habilidade de visualização dos poliedros na geometria espacial; Aprender as propriedades dos poliedros através das construções e manuseio dos sólidos de Platão; Auxiliar os professores de matemática na incumbência de ensinar geometria espacial e Analisar as questões de geometria espacial que se encontram nas avaliações externas, usando como referencial teórico: "Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática" de Fiorentini e Miorin, "Vendo e Entendendo Poliedros: Do desenho ao cálculo do volume através de quebra cabeças geométricos e outros materiais concretos" de Kaleff, Formação de professores: "Para aprender matemática e O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores" de Lorenzato, "Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática" de Rêgo e Rêgo, "Introdução à História da Matemática" de Eves.

Nesta, o autor retrata sua intenção em aprimorar o processo de ensino aprendizagem de matemática, e, cita ter alcançado seus objetivos, cujos resultados obtidos seriam disponibilizados para uso de outros professores, principalmente do PROFMAT no sentido de direcionar para novas pesquisas que abordem os estudos de poliedros com auxílio de materiais manipuláveis.

Como já mencionado, em realização as minhas pesquisas para revisão de literatura foram visitados vários sites de busca, em acervos de Teses e dissertação, como: EduCAPS, PPGECM – UPF, Plataforma Sucupira, também ligada a CAPES, e do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), bem como na biblioteca eletrônica SciELO (*Scientific Electronic Library Online*) e na versão de busca de trabalhos acadêmicos da Google o "Google Acadêmico", dentre outros, dos quais venho demonstrar no Quadro 1, cujo tema principal de pesquisa foram: "O uso do Origami na geometria" e "O uso de software na Geometria espacial".

Vários trabalhos foram encontrados envolvendo o origami, porém não relacionados diretamente ao estudo dos sólidos regulares de Platão. As ideias apresentadas relatam atividades dos conteúdos da Matemática a partir do uso de dobraduras, como alternativa para aprendizagem, exploração e ampliação de conceitos básicos relacionados a figuras geométricas, ângulos, planos, vértices, semelhança e noções de proporcionalidade, já em relação a softwares matemáticos, usa-se mais o Geogebra, para os mais variados assuntos, menos focado aos sólidos de Platão, já o uso do Poly Pro raramente é mencionado em dissertações.

Quadro 1 - Dissertações pesquisadas sobre uso do Origami e de softwares no Ensino de Geometria espacial

Autor	Título do trabalho	Aportes teóricos	Instituição/ano	Tipo de mestrado/ produto educacional
Anita Lima Pimenta	**Construindo Poliedros Platônicos com o Origami:** Uma perspectiva axiomática.	Gazire (2000), Prieto (2002), Rafael (2011), Rego e Gaudêncio Jr. Kaleff (2003) e Genova (2001), Costa (2007).	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC–MG), no ano de 2017.	Profissional A GEOMETRIA COM O ORIGAMI: Dos axiomas aos sólidos de Platão. Paradidático para professor.
Wagner dos Reis Silva	**A Visualização dos sólidos de Platão com o uso de materiais concretos: Uma proposta para o ensino dos poliedros.**	Fiorentini , Miorin, Kaleff, Lorenzato, Rêgo e Rêgo e Eves.	Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri aplicado a uma turma de 9º Ano em 2018.	Profissional. Intervenção didática com materiais manipuláveis para construção dos sólidos de Platão com alunos do Ensino Médio.
Diviane Maria Dias Rodrigues	**Reflexão de uma Prática Interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Geometria de Posição e Sólidos de Platão**	Métodos socio-interacionistas fundamentadas na teoria de aprendizagem de Vygotsky.	Universidade Estadual de Ponta Grossa Paraná no ano de 2019.	Profissional Da Geometria de Posição aos Sólidos de Platão. duas versões de plano de unidade para professores.
João Nazareno Pantoja Corrêa	**O Ensino de Poliedros por Atividades**	Carvalho (2013), Silva (2014), Nascimento (2014) e Gonçalves (2014).	Universidade do Estado do Pará no ano de 2019.	Profissional Uma sequência didática para o ensino de Poliedros.
Dayane de Andrade Oliveira Paulino	**Origamis Modulares E Os Poliedros De Platão**	Cavacami e Furuya (2010), Buske (2007) Glowecki (2015),	Universidade Estadual de Ponta Grossa no ano de 2020.	Profissional Proposta de atividade: Construção dos Poliedros com Origami, sem a utilização de régua graduada no segundo ano do Ens. Médio.
Ana Paula Gonçalves	**O uso do Software Poly Pro no Ensino-Aprendizagem da geometria espacial no 6º Ano do Ensino Fundamental**	Níveis de compreensão do modelo Van Hiele. Vigotski	Universidade Estadual de Goiás em 2021.	Profissional. O ensino-aprendizagem de geometria espacial com o uso do software Poly Pro. *Ebook* com atividades, sequência didática e informações sobre o *software* Poly Pro
Thaciane Jähring Schunk	**Produção de significados para Poliedros de Platão e relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática no Ensino Fundamental**	História da Matemática de Struik (1997), historiografia crítica de Roque (2012), Miguel e Miorim (2004), Dolce e Pompeo (2008). Sad (2013) e Sad e Silva (2008) e Lins (1993, 2012),	Campus Vitória do Instituto Federal do Espírito Santo, no ano de 2021.	Profissional Alguns porquês sobre os poliedros de Platão e a Relação de Euler. Um paradidático Online com alicerce na História da Matemática e atividades de ensino e aprendizagem para o aluno.

Fonte: Autora, 2023.

Todos os trabalhos aqui apresentados demonstraram resultados positivos no envolvimento de alunos e professores, ainda chamam atenção pelo fato de terem aproximações com o objetivo central deste trabalho, e, por serem pesquisas com o interesse focado em propostas pedagógicas ao processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial no que diz respeito aos poliedros regulares, visto que essa é um tanto complexa e em estudos percebem que ela ainda vem sendo trabalhada de maneira tradicional, de modo que não se torna atrativa aos olhos dos alunos.

Este estudo só vem reforçar e demonstrar o quanto é importante estimular o nosso aluno ao aprendizado, diversificando nossa metodologia fazendo uso de materiais manipulativos e o envolvimento das tecnologias atuais, fazendo-os perceber a beleza que existe por traz da matemática e que esta faz parte de nossa vida.

Portanto, este trabalho se diferencia dos demais no quesito da busca de vinculações entre a dobradura Origami modular para a construção e manipulação dos sólidos de Platão e uso do Software Poly Pro de forma a reforçar os conceitos já trabalhados com a visualização dos poliedros em 3 Ds, ampliando a compreensão de suas planificações, os conceitos de Euler e realização de avaliação da aprendizagem. Este, propôs estratégias e metodologias de ensino para auxiliar o professor que é sobrecarregado de aulas, lhe faltando tempo para pesquisar, criar, testar e avaliar as tarefas de estudo que instigue e/ou incentive a curiosidade do aluno.

No entanto, vê se a necessidade de um Produto Educacional, um paradidático com sugestões e atividades prontas em busca da participação ativa dos educandos, se diferenciando do livro didático, sugerindo e trazendo o uso de materiais manipuláveis para a produção e visualização dos poliedros regulares, por meio de dobraduras, o Origami modular, tendo o auxílio do professor como mediador nesse processo do descobrir e do fazer matemático, inserindo ainda neste processo, as tecnologias digitais com uso de software Poly Pro, o qual permite a exploração dos objetos na tela como se fossem concretos, facilitando a absorção de conhecimentos já transmitidos.

Destaca-se que, após as mais variadas buscas nos sites de pesquisas já citados, notou-se a dificuldade em encontrar livros que associassem o uso do Origami à disciplina de Matemática, percebe-se ainda, que são poucas as obras que abordam o uso do Origami Modular e uso do Software Poly Pro diretamente relacionado ao estudo dos poliedros de Platão.

3 APORTES TEÓRICOS DO ESTUDO E DO PRODUTO EDUCACIONAL

Este trabalho vem em busca de conhecer e apresentar possibilidades de ensino e desafios para se trabalhar conceitos matemáticos de forma atrativa e prazerosa, envolvendo o aluno em uma participação ativa na construção e manipulação dos poliedros regulares, os poliedros de Platão. Esta proposta se dará com introdução do Origami Modular e do recurso tecnológico software Poly Pro, visando contribuir com uma aprendizagem significativa, além de tornar o estudo dos Poliedros de Platão em algo atrativo e interessante para o aluno.

Estas são metodologias ativas que propõe formas de ensinar diferentes conteúdos, entre eles, acredito, também a geometria, estimulando, motivando e auxiliando o desenvolvimento cognitivo do aluno, além de possibilitar uma melhor compreensão da Matemática através da inserção de meios tecnológicos e manipulação de dobraduras de papel, fazendo relação de cada figura geométrica realizada com as propriedades matemáticas existentes, cabendo aos professores explorar os conceitos relacionados que serão estudados.

A Geometria das Dobraduras, apresentado no V CONEDU (Congresso Nacional de Educação), verifica-se os recursos didáticos que facilitam o ensino da Geometria, entre eles o Origami, vejamos:

> A Geometria surgiu a partir das necessidades do homem de se localizar, dimensão do espaço onde está inserido, dentre outras. Logo, o ensino de Geometria no âmbito escolar é de extrema importância para o desenvolvimento cognitivo do discente. Diante das limitações em aprender e ensinar Geometria exige-se alguns recursos didáticos com o intuito de facilitar o processo de ensino-aprendizagem desse campo matemático. Dentre elas o Origami, arte de dobrar papel, possibilitando tanto a aquisição de conceitos geométricos quanto coordenação motora, controle emocional e concentração (SILVA; MASSARANDUBA, 2018, p. 4).

Logo, é possível intuir que o Origami é um recurso de apoio pedagógico muito útil para potencializar à aprendizagem da Geometria no que diz respeito a construção dos poliedros regulares, os poliedros de Platão.

Sobre a utilização das mídias em sala de aula, Gravina (1998) defende a ideia de que o computador permite a exploração de objetos na tela como se fossem concretos, pois existem na tela e podem ser manipulados. O uso de softwares como o Poly Pro, vem aumentar a capacidade de exploração e descoberta, contribuindo com aprendizado de conceitos geométricos trabalhados em sala de aula.

O Poly Pro é um software que nos permite com muita facilidade explorar a visualização e trabalhar a planificação, possibilitando assim exercermos diversas ações de manipulação geométrica, logo, com este software, podemos visualizar os sólidos geométricos de várias maneiras, através dos seus comandos.

O uso das metodologias diferenciadas vem auxiliar os alunos no processo de aprendizagem, a inserção de software e Origami como recurso metodológico vem diversificar as aulas e despertar o interesse do aluno a aprendizagem de temática referente a Geometria Espacial. Ao que é referenciado aqui, está em acordo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, trazendo a seguinte afirmação:

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem serem desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (PCNEM, 2000, p. 44).

Para Lev Vygotsky (1896-1934), o desenvolvimento cognitivo não pode ser entendido sem referência ao contexto social, histórico e cultural no qual ocorre. Os processos mentais superiores (pensamento, linguagem, comportamento volitivo) do indivíduo têm origem em processos sociais. O desenvolvimento desses processos no ser humano é mediado por instrumentos e signos construídos social, histórica e culturalmente no meio social em que ele está situado.

No entanto, o professor será mediador nesse processo se envolvendo e envolvendo o aluno, pois é através da mediação que se dá a internalização (reconstrução interna de uma operação externa) de atividades e comportamentos sócio-históricos e culturais (GARTON, 1992) com a inserção de metodologias atrativas para o processo de ensino aprendizagem valorizando o conhecimento que o aluno traz consigo.

Entendendo que a atualidade exige mudança na educação, numa interação e intercâmbios de significados ao aluno numa troca de conhecimentos, valorizando o que este já traz consigo, faz-se necessário o uso de tecnologias educacionais para auxiliar o processo de leitura, escrita, raciocínio lógico-matemático e no desenvolvimento de diversas habilidades, tais como coordenação motora e organização espacial.

O uso destes recursos computacionais vem valorizar o sistema educacional de áreas afins, inclusive no processo de ensino e aprendizagem da geometria. Acreditando enfim, que a interação entre alunos e professor, em meio a metodologias, utilizando-se dos materiais manipulativos com as dobraduras do Origami e a eficiência audiovisual ofertada pelo meio computacional com o software Poly Pro ampliará o sistema de ensino/ aprendizagem tornando-o muito mais rico e inovador.

3.1 Liev Semiónovitch Vigotski

Este trabalho está fundamentado e embasado por teorias de Liev Semiónovitch Vigotski, o qual nos dá uma base teórica que fornece conceitos e ideias relevantes a fim de auxiliar na compreensão dos fatos sobre aprendizagem de conceitos matemáticos aqui mencionados, pois mesmo não tendo sido um pesquisador da educação, suas obras oferecem riquíssimos elementos para nos ajudar a pensar em prática pedagógica e aprendizagem.

O trabalho de Lev Semenontich Vygotsky (1894-1934) é extenso e abrange muitos aspectos do desenvolvimento da criança nos seus contextos históricos e culturais, este nasceu em Orsha, uma pequena povoação da Bielorússia, em 17 de novembro de 1896 e morreu precocemente em 1934, aos 37 anos. Após a escola secundária (*gymnasium*), na cidade de Gomel, Vygotsky fez seus estudos universitários em direito, filosofia e história em Moscou, a partir de 1912. Durante seus estudos secundários e universitários, adquiriu excelente formação no domínio das ciências humanas: língua e linguística, estética e literatura, filosofia e história.

Mesmo não sendo interesse central de sua obra o estudo da gênese do desenvolvimento das funções psicológicas tipicamente humanas (funções psicológicas superiores), em seu contexto histórico-cultural, foi capaz de agregar diferentes contribuições que vêm sendo adotadas pela área da Educação. Sua riqueza conceitual permite o estudo e o desenvolvimento de práticas educacionais relacionadas a variados níveis e contextos, em diversos países – como é possível verificar na coletânea internacional de Selau e Castro (2015).

Deste modo, a intenção é fazer uso de tal referencial teórico educacional, pois este demonstra, que, no processo de interação com o meio, os educandos participam desde o início das atividades construindo seu aprendizado com a participação dos colegas de classe, necessitando às vezes do auxílio de uma pessoa mais experiente (o professor), para chegar a uma conclusão sobre determinado assunto, sendo neste processo, um sujeito interativo, produzindo conhecimentos a partir de relações interpessoais e intrapessoais, segundo a teoria de Vygotsky.

Para Lev Vygotsky (1987, 1988), o surgimento dos processos sociais acontece em processos mentais superiores (pensamento, linguagem, comportamento); o desenvolvimento cognitivo se dá a partir da transformação de relações sociais em funções mentais, ou seja, primeiro em nível social e depois em nível individual, primeiro entre pessoas (interpessoal) com atividades partilhadas pela criança e pelo adulto, promovendo essa interação social e após no interior do sujeito (intrapessoal).

Vygotsky (1987, p. 101) ainda em suas teorias, afirma: “o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer”. O importante, no entanto, é introduzir aos educandos, metodologias diferenciadas de ensino, para assim, identificar as condições que eles têm de abstrair o conhecimento daquilo que foi lhe posto.

No socio interacionismo, segundo Vygotsky o desenvolvimento intelectual do indivíduo está baseado nas relações com a cultura e suas interações com a sociedade. “O processo de ensino aprendizagem inclui sempre aquele que aprende, aquele que ensina e a relação entre essas pessoas” (OLIVEIRA, 1995, p. 57).

Vygotsky e Luria procuravam entender de que maneira as funções psicológicas humanas se relacionam com o mundo cultural e definiu o conceito de Funções Psicológicas Superiores (FPS) para explicar o surgimento dessa forma de psique especificamente humana:

> Como mostram nossos estudos, não ocorre apenas uma reconstrução interna e um aperfeiçoamento de funções separadas no processo de desenvolvimento psicológico da criança, mas os laços e relações intrafuncionais também são alterados de maneira radical. Como resultado dessas mudanças, surgem novos sistemas psicológicos que se unem em uma cooperação e combinações complexas com várias funções elementares inicialmente separadas. Na falta de uma definição melhor, chamamos esses sistemas psicológicos, essas unidades de uma ordem superior que tomam o lugar de funções elementares homogêneas e isoladas, as funções psicológicas superiores (VYGOTSKY; LURIA, 1994, p. 162).

De acordo com Vygotski (1995), as FPS são processos mentais mediados por signos, mas, apesar da necessidade da mediação dos signos para haver conexões entre as diferentes FPS, essa mediação precisa ter um significado para o sujeito, isto é, precisa fazer sentido para provocar relações e conexões entre as diferentes funções mentais e ocorrer a apropriação dos significados culturalmente produzidos pela humanidade.

Na obra de Vygotsky, não encontramos uma lista dos processos que fundamentam o desenvolvimento das FPS ou mesmo de quais ou quantas são as funções superiores humanas, todavia, ele discute a concepção e o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores em diferentes obras (VYGOTSKY, 1994; 1995; 1996).

Outro fator relevante na concepção vygotskyana é a emoção. Para Vigotski (2010), as emoções também dependem de fatores históricos e culturais sendo passíveis de desenvolvimento. Diante disso, o trabalho pedagógico, tem como prerrogativa, não só em fazer com que os estudantes pensem e aprendam uma determinada ciência, mas que, também, a vivenciem. Essas são exatamente, reações emocionais que devem servir de alicerce ao processo educativo. Antes de comunicar esse ou aquele sentido:

> o mestre deve suscitar a respectiva emoção do [estudante] e preocupar-se com que essa emoção esteja ligada a um novo conhecimento. [...] Os gregos diziam que a filosofia nasce da surpresa. Em termos psicológicos isso é verdadeiro se aplicado a qualquer conhecimento no sentido de que todo conhecimento deve ser precedido de uma sensação de sede. O momento da emoção e do interesse deve necessariamente servir de ponto de partida a qualquer trabalho educativo (VIGOTSKI, 2010, p. 144).

Liev Semiónovitch Vigotski em conjunto com Luria, Leontiev e Sakharov, são responsáveis por pesquisas em psicologia do desenvolvimento, sendo essa teoria hoje muito difundida e utilizada no Brasil. Conceitos como mediação e zona de desenvolvimento proximal, fazem parte de sua teoria, assim como a importância do outro (no caso o professor) no desenvolvimento sociocultural da criança, portanto para Vigotski (2007, p. 103):

> O aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.

Para Vygotski (1995), a semelhança entre ferramentas (objetos e/ou materiais manipulativos) e signos está baseada na função mediadora desempenhada por ambos e, por isso, do ponto de vista psicológico, podem estar incluídos em uma mesma categoria.

Este menciona ainda que processo de mediação, por meio de ferramentas e signos, é fundamental para o desenvolvimento das FPS, o qual diferencia o homem dos outros animais. A mediação é citada como um aspecto preponderante para tornar possíveis as atividades psicológicas voluntárias, sendo estas bem planejadas e controladas pelo próprio indivíduo.

Os estudos retratam que, mediadores (ferramentas e signos) servem como meios para potencializar o aprendizado do indivíduo, e que o adulto (professor) é parte fundamental nesse processo, realizando essa interação, dando o significado social e o sentido pessoal em ações realizadas. Nesta pesquisa essas ferramentas mediadoras serão o Origami Modular e o software Poly Pro, ao que se acredita que, promova essa interação entre os alunos em grupo, como estratégias de ensino que levará em consideração a valorização dos diferentes tipos de conhecimentos prévios dos estudantes.

As relações entre desenvolvimento e aprendizagem ainda podem ser compreendidas a partir do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), ligação entre o nível de desenvolvimento real e nível de desenvolvimento potencial. Este nível potencial, retrata o desenvolvimento por meio de soluções dos problemas, mediados por orientações e/ou colaborações. Já o nível real, retrata sobre o desenvolvimento e o produto, ou seja, a compreensão, estimulando assim, a independência de quem busca essa aprendizagem.

A partir dos dois níveis de desenvolvimento, há evidências de que a ZDP está sendo desenvolvida, intensificando o conhecimento cognitivo por meio de ações intermediadas, numa interação mútua de indivíduos, educadores e/ou educandos que cooperam para o desenvolvimento das funções mentais superiores. Esta ZDP, portanto, pode ser entendida como a efetivação da mediação proposta nas atividades, meios auxiliares na solução de problemas, transformando o conhecimento potencial em conhecimento real por meio da interação social, segundo a teoria da mediação de Vygotsky.

O professor então, na concepção de Vygotsky, não é só o mediador, é o agente ativo e transformador, responsável por potencializar a apropriação e o uso de ferramentas e signos pelos estudantes na escola, contribuindo grandemente para seu desenvolvimento intelectual, sua participação e inserção na sociedade atual.

De acordo com Rego (2012), para Vygotsky se o ambiente não desafiar, exigir e estimular o adolescente, não se chegará à conquista de estágios mais elevados de raciocínio. “Isso quer dizer que o pensamento conceitual é uma conquista que depende não somente do esforço individual, mas principalmente do contexto em que o indivíduo se insere, que define, aliás, seu ‘ponto de chegada’” (REGO, 2012).

Este trabalho, porém, vem ao encontro dessas ideias, inserindo a dobradura Origami Modular, e o software Poly Pro como ferramentas inovadoras estimulante e desafiadoras, ou seja, estratégias de ensino para construção e entendimento dos sólidos de Platão, considerando e valorizando os diferentes tipos de conhecimento espontâneo dos estudantes, realizando na prática através da interação entre colegas e professora aprimorando assim o pensamento cognitivo.

3.2 A Geometria e os Poliedros

Considerando que o objetivo deste trabalho é inserir a prática do Origami e uso do software Poly Pro para potencializar o aprendizado de Geometria Espacial no que diz respeito aos poliedros de Platão, acredita-se que se faz necessário explanar um pouco da história sobre estes.

A palavra Geometria vem do grego *geo* “terra” e *metria* “medida”. Na antiguidade, acreditava-se que a Terra era plana e, por isso, o significado “medida da terra”.

Estudos relatam que desde as mais antigas civilizações já faziam o uso de algumas noções geométricas, por assim dizer, em suas atividades diárias, tanto na agricultura, em construções e no movimento dos astros. Conta-se a história que por necessidade e sobrevivência, os indivíduos que habitavam os arredores do Nilo se viam em grande conflito, ano após ano, quando este transbordava de seu leito natural e alagava os campos, essa inundação fazia desaparecer os marcos de delimitação entre estes. Para demarcarem novamente os limites, existiam os “puxadores de corda”, os “harpedonaptas” que faziam a remarcação, se baseavam intuitivamente de conhecimento comum, utilizavam cordas esticadas formando triângulos retângulos que os auxiliavam nos cálculos de extensão dos terrenos.

No entanto, o testemunho de conhecimento mais antigo da Geometria são as construções das pirâmides e templos pelas civilizações egípcia e Babilônica. Contudo, muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, desde a Babilônia à China, passando pela civilização Hindu. Os Babilônicos tinham conhecimentos matemáticos que provinham da agrimensura e comércio e a civilização Hindu conhecia o teorema sobre o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

A Geometria como ciência dedutiva apenas teve início na Grécia Antiga, cerca de sete séculos antes de Cristo, graças aos esforços de muitos notáveis antecessores de Euclides, como Tales de Mileto (640 - 546 a.C.), Pitágoras (580 - 500 a.C.) e Eudoxio (408 - 355 a.C.).

Nesse sentido, segundo Souza (2010, p. 68):

> Os primeiros povos a se dedicarem à Matemática por si próprios foram os gregos, que, entre outros assuntos, estudaram várias formas geométricas. Algumas dessas formas, como também suas propriedades, foram tratadas inicialmente por eles, sendo esse o motivo pelo qual essas formas receberam nomes que derivam da língua grega.

Portanto, foi por volta de 600 a.C. que Tales de Mileto e Pitágoras apresentam suas primeiras contribuições. Boyer (1996) aponta Tales como o primeiro homem cujas descobertas matemáticas lhe foram concedidas. O autor discorre que:

> A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo – por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. Era considerado um “discípulo dos egípcios e caldeus”; hipótese que parece plausível. A proposição agora conhecida como teorema de Tales – que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto – pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens a Babilônia (BOYER, 1996, p. 31-32).

Ainda em acordo com o autor, Pitágoras fundou a Sociedade Pitagórica com bases matemáticas e filosóficas. Essa ordem fundada por ele era secreta e suas descobertas eram outorgadas aos membros e não a uma única pessoa, apesar de ser comum, naquela época, dar toda a confiabilidade ao mestre. Boyer conta, também, que:

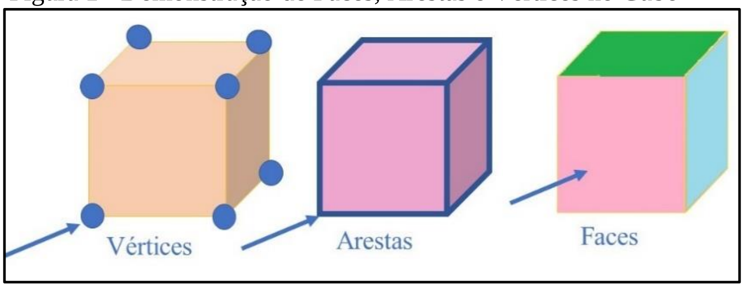
> Dizia-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é número". Lembrando que os babilônios tinham associado várias medidas numéricas às coisas que os cercavam, desde os movimentos nos céus até o valor de seus escravos, podemos perceber nesse lema uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjectura (BOYER, 1996, p. 34).

Porém, somente com Euclides, em torno de 300 a. C., que a Geometria foi formalmente sistematizada a partir de um conjunto axiomático que a desenvolveu como ciência dedutiva. Neste trabalho, dar-se-á ênfase aos Poliedros, mais especificamente aos Poliedros Regulares abordados no último livro de Euclides "Os Elementos", do qual será explanado mais adiante no decorrer dos fatos históricos aqui mencionados.

A palavra Poliedro, de origem grega, significa "várias faces" - *poli* = várias e *edro* = faces.

No livro didático Conexões com a Matemática em seu volume 2, está retratado os principais elementos de um poliedro, bem como sua formação e a sua nomenclatura, destacando seus três elementos: **Face** – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro; **Aresta** – lado comum a duas faces, e, por fim, **Vértice** – ponto comum a três ou mais arestas como demonstrado na Figura 1.

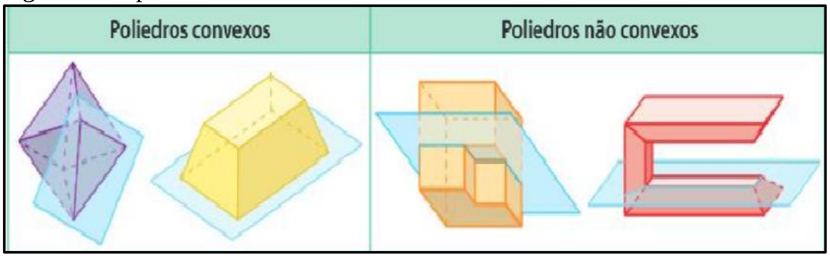
Figura 1 - Demonstração de Faces, Arestas e Vértices no Cubo



Fonte: Autora, 2022.

Um poliedro costuma ser nomeado de acordo o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição edro (Figura 2). Por exemplo, "um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: tetra (4) + edro (face). [...] Os poliedros que não apresentam 'reentrâncias' em sua superfície são denominados convexos; os que têm 'reentrâncias' são denominados não convexos ou côncavos)" (LEONARDO; SILVA, 2016, p. 104-105).

Figura 2 - Tipos de Poliedros



Fonte: Leonardo e Silva, 2016.

Define-se então, poliedro convexo da seguinte maneira: "Consideramos um número finito *n*, ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

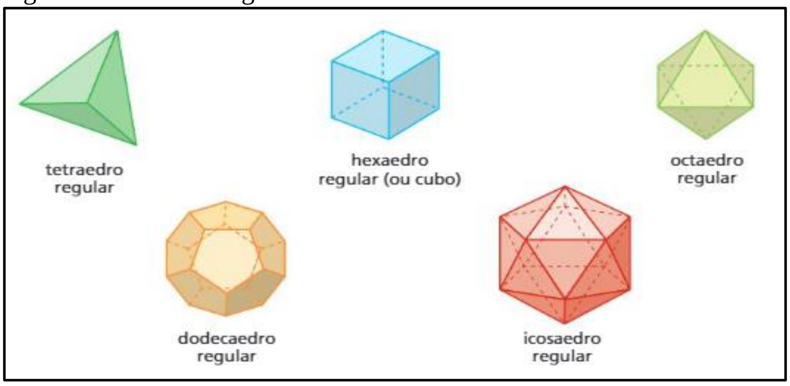
b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;

c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço".

Desta maneira os Poliedros que serão aprofundados neste trabalho, são os Poliedros convexos regulares, os chamados poliedros Platônicos.

Leonardo e Silva (2016, p. 107), define que "Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes entre si e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas" existindo cinco classes de poliedros regulares como Figura 3.

Figura 3 - Poliedros regulares



Fonte: Leonardo e Silva, 2016.

Entende-se então, que, as faces de um poliedro regular são polígonos - figuras planas - que, ligadas duas a duas, formam-se as arestas de um poliedro e a união dessas arestas chama-se de vértice deste. Observando na arquitetura, nas artes plásticas e nas construções da antiguidade até as mais atuais se percebe que muitas delas possuem elementos que permitem uma associação com os poliedros, sejam as pirâmides do Egito, o Parthenon ou edifícios projetados pelo grande arquiteto Oscar Niemeyer e outros, podem-se identificar os elementos de um poliedro como faces, arestas e vértices. Em todas essas edificações se nota as mais variadas formas geométricas fazendo essa aproximação da geometria e o cotidiano (Quadro 2).

Quadro 2 - Figuras que representam elementos de um poliedro

Figura - Pirâmides do Egito  https://www.vivadecora.com.br/pro/piramides-do-egito/	Figura - Parthenon edifício remanescente da Grécia Antiga.  https://conhecimentocientifico.com/grecia-antiga/
Figura - Congresso Nacional.  https://pt.wikipedia.org/wiki/Congresso_Nacional_do_Brasil	Figura - Palácio do Planalto – Brasília  https://www.flickr.com/photos/aragao/8601107325
Figura - Os cinco sólidos platônicos que estão expostos em Madrid.  http://turismoalternativomadrid.blogspot.com/2014/01/escultura-de-los-cinco-solidos.html	Figura - Museu Louvre na França.  https://viajonarios.com/louvre/

Fonte: Pesquisado e organizado pela autora, 2022.

As imagens demonstradas nos provam que a Geometria está em muitos lugares, notando - se assim que a partir do destaque dado por Platão na Antiga Grécia, essas formas geométricas como os poliedros regulares, vêm sendo observada e usada nas mais diversas ciências, principalmente na Matemática. Logo, é o que se preza por essa pesquisa, o intuito de introduzir tais figuras tridimensionais construídas por estudantes nas aulas de matemática ensinada de forma instrutiva ao qual possa ser admirada e estudada de forma prazerosa por essa nova geração que anseia pelo novo, tal qual o uso de software Poly Pro e as dobraduras com o Origami modular.

3.3 Os Poliedros Platônicos na História da Geometria

Muitos foram os matemáticos, filósofos e astrônomos que dedicaram seus estudos a esses poliedros, destacando-se, dentre outros, faço menção a Euclides, Platão, Kepler e Euler, que contribuíram diretamente para o entendimento desses objetos tridimensionais.

Somente fazendo uma busca pela história, que se percebe ou se compreende melhor o porquê desses sólidos terem sido alvos de pesquisas e grandes estudos aos quais os tornaram tão conhecidos e importantes em nosso meio até os dias atuais. Logo, apresenta-se a seguir, algumas das contribuições históricas desses autores ao qual se acredita e considera-se relevantes para o entendimento desse trabalho.

3.3.1 Euclides de Alexandria

Figura 4 - Representação artística de Euclides

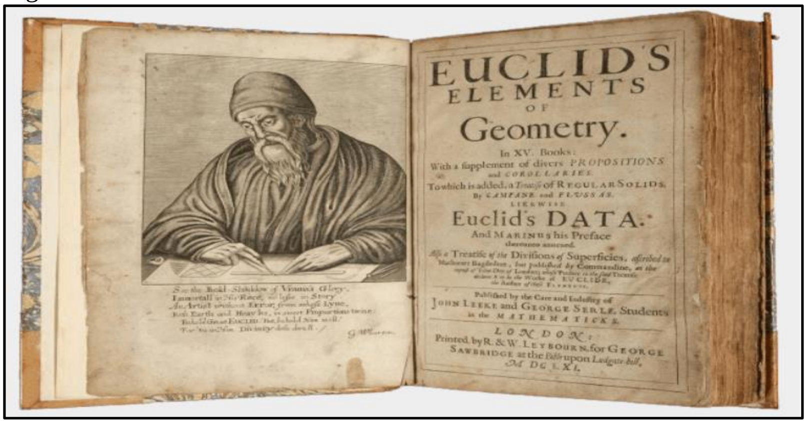
Fonte: <https://clube.spm.pt/news/1146>.

Euclides (Figura 4) nasceu por volta de 300 a.C., e, segundo Gazire (2000), não se sabe ao certo o local de seu nascimento. E possível que tenha sido educado em Atenas e frequentado a Academia de Platão. Sabe-se que, provavelmente, por motivos políticos, ele fora viver em Alexandria, no Egito, onde fora nomeado para a cátedra de Geometria da Universidade e ficara conhecido como Euclides de Alexandria.

Um dos matemáticos mais importante de todos os tempos, muitas vezes referido como “o pai da Geometria” Euclides foi autor de vários trabalhos, nas mais variadas áreas como Óptica, Astronomia, Música e Mecânica, entre outras, porém, se destacou na história por causa de sua obra Stoichia (Os Elementos, 300 a.C), escrita em grego, sendo a mais famosa. Obra composta por treze volumes dos quais os três últimos (livro XI, XII e XIII) falam de geometria no espaço tratando sobre poliedros, a referida obra cobria toda Aritmética, a Álgebra e a Geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de seus predecessores, como Hipócrates e Eudóxio, esta, ainda sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos, toda a estrutura da Geometria hoje conhecida como Euclidiana que tem sua base em axiomas e postulados.

Em seu XIII e último livro, "Sólidos Regulares" Euclides afirma que não pode existir outros sólidos que possuam faces compostas por polígonos regulares e congruentes entre si, ainda neste é apresentado um tratado matemático e geométrico (Figura 5). "Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico" (EVES, 2008, p. 167).

Figura 5 - Elementos de Euclides



Fonte: <https://sites.google.com/site/matematicainicio/home/os-elementos>.

Para Aristóteles, axiomas são verdades incontestáveis aplicadas a todas as ciências e os postulados eram verdades sobre um determinado tema (neste caso, a geometria) e foi assim também usado por Euclides.

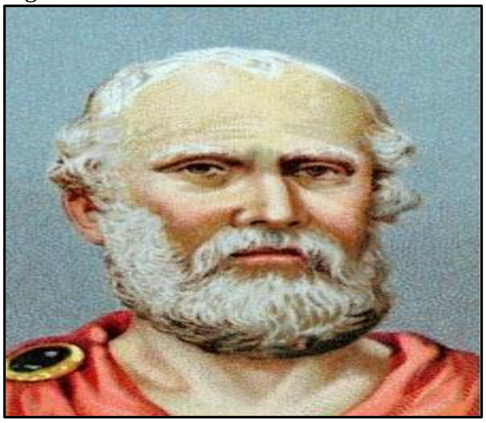
Ainda como discorre Gazire (2000), existe toda uma estrutura axiomática responsável pela organização do que se conhece por Geometria euclidiana. A autora também afirma que:

> A Geometria euclidiana foi rigorosamente construída, e como tal, converteu-se em modelo para toda a Matemática. Os treze livros que compõem os Elementos de Euclides sintetizam todo o conhecimento matemático até então acumulado. Com essa construção, Os Elementos se tornaram o sonho metodológico de toda a ciência. De fato, o pensamento científico em busca de uma sistematização encontrou no método axiomático o modelo perfeito (GAZIRE, 2000, p. 82).

Até os dias atuais, a Geometria Euclidiana é a mais utilizada, servindo de direcionamento inclusive, para a organização das várias outras Geometrias que foram surgindo com o passar dos anos. Foram criadas as Geometrias que adotaram os quatro postulados anteriores e fizeram suas adaptações para o quinto postulado, criando as Geometrias não Euclidianas, essas novas Geometrias são chamadas de Geometrias Hiperbólicas e Elíptica.

3.3.2 Platão

Figura 6 - Platão



Fonte: Souza, 2010, p. 72.

Platão (Figura 6) nasceu em Atenas, provavelmente em 427 a.C. e morreu em 347 a.C. Por volta dos 20 anos, encontrou o filósofo Sócrates e tornou-se seu discípulo. Quando o filósofo Sócrates foi condenado à morte, em 399 a.C., pelo governo de Atenas (sob a acusação de "perverter a juventude" com seus ensinamentos filosóficos), Platão preferiu deixar a cidade. Passou, então, alguns anos percorrendo outras partes do mundo grego, desde o norte da África até a Itália e, nessas andanças, tomou contato com os ensinamentos pitagóricos. Em 388 a.C., quando já estava com quase quarenta anos, Platão viajou para a Magna Grécia com o intuito de conhecer mais de perto comunidades pitagóricas. Nesta ocasião, veio a conhecer Arquitas de Tarento. Ainda durante essa viagem, Dionísio I convidou Platão para ir à Siracusa, na Sicília. Platão partiu para Siracusa com a esperança de lá implantar seus ideais políticos.

No entanto, acabou desentendendo-se com o tirano local e retornou para Atenas. Em seu retorno, passou a dedicar-se inteiramente à filosofia, fundando em 385 a.C uma escola chamada "Academia", cuja instituição logo adquiriu prestígio e a ela acorriam inúmeros jovens em busca de instrução e até mesmo homens ilustres a fim de debater ideias.

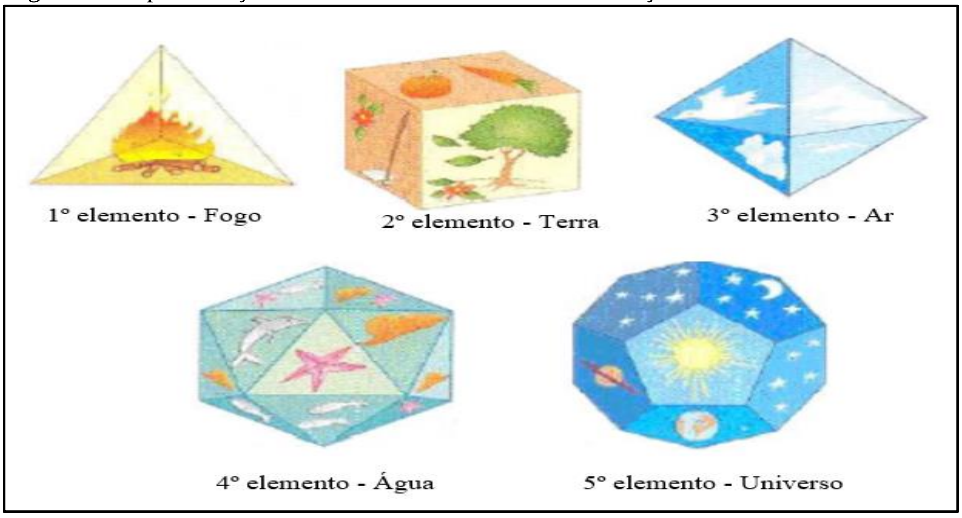
Sua Academia em Atenas foi considerada a primeira Universidade no mundo que continha, em sua porta de entrada, a seguinte escritura: a frase grega ΑΓΕΩΜΕΤRΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, cujo significado “Que nenhum ignorante de geometria entre aqui”, demonstrando que apresentava relação entre o papel da geometria e a formação do espírito humano (KATZ, 2010, p. 67).

Dante (2005) recorre à história para informar que Platão, filósofo grego, teve muito entusiasmo com a Matemática em sua obra “Timaeus”, na qual explana seus pensamentos sobre os sólidos em um possível encontro com o pitagórico Timeu de Locri. Neste diálogo, ele expôs suas ideias sobre os Poliedros Regulares, que ficaram conhecidos como Poliedros Platônicos. Alguns historiadores atribuem aos pitagóricos e a Teeteto as descobertas desses poliedros. Dante (2005, p. 98) conta que:

> Neste trabalho de Platão, Timeu misticamente associa o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo aos quatro “elementos” primordiais de todos os corpos materiais: fogo, ar, água e terra. Ele associou o quinto poliedro, o dodecaedro, ao Universo que nos cerca.

Portanto, essa associação de poliedros aos elementos da natureza e ao Universo, também ficaram conhecidos como “figuras cósmicas” associação essa feita por Platão e explicada pelo matemático Johannes Kepler. Ele defendia que, como o mundo só poderia ter sido feito a partir de corpos perfeitos, estes elementos deveriam ter a forma de sólidos regulares, e teríamos: o fogo era o mais leve e o mais violento dos elementos, por isso deveria ser um tetraedro; a terra era o elemento mais estável, deveria ser o cubo; a água, o elemento mais inconstante e fluído, era um icosaedro, o sólido regular capaz de rolar mais facilmente; quanto ao ar, Platão observou que “o ar é para a água o que a água é para o ar,” e concluiu, de forma um pouco misteriosa, que o ar deveria ser um octaedro; para o quinto sólido regular, atribuiu ao dodecaedro a representação da forma de todo o universo por suas doze estações zodiacais (Figura 7).

Figura 7 - Representação das ideias de Platão e suas associações a elementos da natureza



Fonte: Organizada pela autora a partir de <https://goo.gl/hMjqJb>.

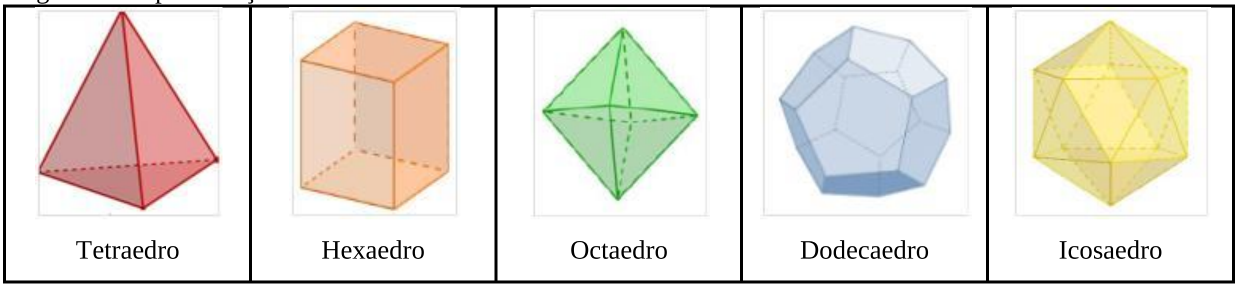
De acordo com Dante (2005), Platão ainda hoje é muito lembrado por suas contribuições filosóficas, pois, este foi conhecido como “criador de matemáticos”. Platão destacou ainda a importância dos triângulos, ao referir-se aos sólidos, pois mesmo aqueles que não fossem compostos por faces triangulares poderiam tê-las decompostas em triângulos. Ele visualizava as faces triangulares, quadradas e pentagonais como combinações de triângulos retângulos ideais obtidos através dos traçados das diagonais e alturas dos polígonos. Esses seriam de dois tipos: isósceles, por isso com ângulos de 45°, e o outro escaleno, obtido através do triângulo equilátero, logo, com ângulos de 30° e 60°.

É perceptível a decomposição de um quadrado e de um triângulo equilátero em triângulos ideais. Nessa perspectiva, ficaria faltando apenas o dodecaedro, como discorre Boyer:

> Platão considerava o dodecaedro como composto de 360 triângulos retângulos escalenos, pois, quando em cada uma das faces pentagonais são traçadas as cinco diagonais e as cinco medianas, cada uma das doze faces conterá trinta triângulos retângulos. A associação dos quatro primeiros sólidos regulares com os tradicionais quatro elementos universais forneceu a Platão, no Timaeus, uma teoria da matéria harmoniosamente unificada, de acordo com a qual tudo era construído de triângulos retângulos ideais (BOYER, 1996, p. 60).

Esses objetos tridimensionais que possuem faces formadas por polígonos regulares idênticos entre si estariam, então, estabelecidos como os cinco sólidos regulares que receberam como nome a expressão “Poliedros de Platão ou Sólidos de Platão” representados na Figura 8.

Figura 8 - Representação dos Poliedros de Platão

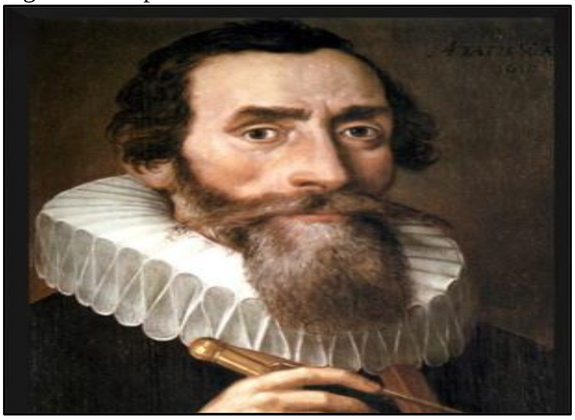


Fonte: Autora, 2022.

Desta forma, os “Poliedros de Platão” ou “Sólidos de Platão”, nos remete aos cinco poliedros regulares, dos quais vamos usar o recurso do Origami e o software Poly Pro como metodologia pedagógica para ampliar o conhecimento de nossos alunos desenvolvendo uma aprendizagem significativa e prazerosa com a construção e manipulação destes.

3.3.3 Johannes Kepler

Figura 9 - Kepler



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File: Johannes_Kepler_1610.jpg>

Johannes Kepler (Figura 9) nasceu 27 de dezembro de 1571, na cidade imperial livre Weil der Stadtna Alemanha, e, de acordo com Rocha (2002), tivera uma infância marcada por doenças e problemas familiares. Com o passar dos anos, se tornou um incansável investigador, o que o fez se transformar em um dos construtores da ciência moderna.

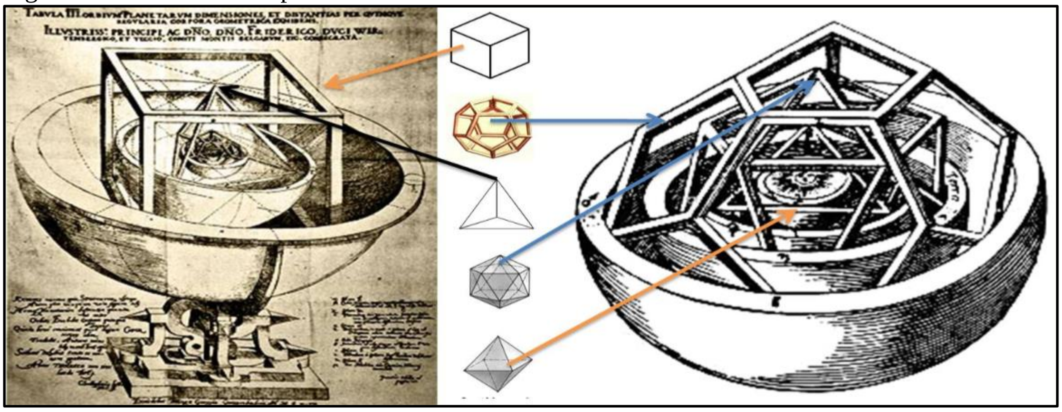
Ainda na adolescência, estudou em seminários teológicos protestantes onde fora introduzido ao *quadrivium* que era constituído por quatro ciências: Astronomia, Geometria, Aritmética e Música.

Rocha (2002, p. 76) descreve que “[...] em 1594, Kepler se torna professor de Matemática e Astronomia na Escola Luterana de Graz, na Áustria”. Ainda em conformidade com o autor, foi em uma de suas aulas que teve a ideia de relacionar os cinco Sólidos Regulares aos seis planetas até então descobertos - Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno e Terra e de desenvolver um modelo planetário em concordância com o modelo de Copérnico (FIG.5), como relata Rocha:

> [...] uma esfera circunscrita a um cubo (a superfície da esfera contém todos os vértices do sólido), em seguida, uma outra esfera menor inscrita (que tangencia internamente todas as faces do cubo), um tetraedro circunscrito, uma nova esfera inscrita ao tetraedro, e assim sucessivamente até obter seis esferas concêntricas com raios que seriam iguais às trajetórias circulares dos planetas em torno do Sol, este, absoluto e soberano no centro do arranjo. Estaria assim estabelecida a conexão secreta entre a milenar geometria e o novo sistema copernicano. O glorioso passado representado pelo *quadrivium* grego poderia, enfim, coexistir harmoniosamente com as novas e revolucionárias ideias renascentistas! (ROCHA, 2002, p. 77).

Kepler ao fazer seus experimentos com poliedros, descobriu que cada um dos cinco sólidos platônicos podia ser inscrito e circunscrito de forma única por esferas celestes; aninhando-se estes sólidos, cada um envolto por uma esfera, cada um dentro do outro, produziam-se seis camadas, correspondentes aos seis planetas conhecidos Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Kepler ao ordenar os sólidos corretamente octaedro, icosaedro, dodecaedro, tetraedro e cubo (Figura 10) descobriu que as esferas podiam ser posicionadas em intervalos correspondentes (dentro dos limites de acurácia das observações astronômicas disponíveis) ao tamanho relativo de cada trajetória planetária, assumindo-se que os planetas giram em torno do Sol.

Figura 10 - Modelo de Kepler



Fonte: <https://bluedragonfly10.files.wordpress.com/2012/04/mysteriumcosmographicum2.jpg>.

O modelo de Kepler que harmonizava planetas e Poliedros Regulares revestidos por esferas concêntricas fora esquecido, anos mais tarde, após a descoberta de mais três planetas -

Netuno, Urano e Plutão - sendo que esse último, desde 2006, já não mais é considerado um planeta.

Rocha (2002, p. 78) salienta que Kepler "acreditou no ideal platônico-pitagórico, isto é, de um universo regido por ideias imutáveis e leis geométricas perfeitas". O que deixa claro seu apreço pela Geometria. Um modelo matemático justificado pelas regras da Geometria e pelas propriedades peculiares dos Poliedros Platônicos podendo ser reproduzido em sala de aula a fim de propor um aprofundamento nos estudos dos sólidos.

3.3.4 Leonhard Euler

Figura 11 - Leonhard Euler

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler>.

Leonhard Euler (Figura 11), nascido em 1707, na Suíça, na cidade de Basiléia, como afirma Souza (2010), efetuou muitas contribuições para a Matemática. Aplicou-a em distintos assuntos, como órbitas planetárias, balística, construção naval, navegação, óptica e acústica.

Aos vinte e seis anos de idade, Euler se tornou um dos mais importantes matemáticos da Academia de São Petersburgo, localizada na Rússia. Ele contribuía com muitos artigos para a revista da Academia "*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*", como afirma Boyer (1996). Segundo o autor, Euler publicou, em vida, mais de 500 artigos, além de escrever obras para todos os níveis de ensino. Ele produziu vários materiais que foram utilizados nos livros didáticos nas escolas russas. Ficou cego aos 59 anos de idade, porém, continuou suas pesquisas e publicações.

Uma de suas mais importantes contribuições para a matemática é a relação que envolve o número de faces (F), arestas (A) e vértices (V) de um poliedro, apresentada da seguinte forma:

$$V - A + F = 2 \tag{1}$$

Euler verificou que essa relação era válida para todo poliedro convexo e alguns não convexos. Com relação a essa associação, afirma Souza que:

> Essa igualdade é conhecida como Relação de Euler e é válida para todo poliedro convexo. No entanto, essa relação é válida também para alguns poliedros não convexos. Os poliedros cuja Relação de Euler é válida são chamados poliedros eulerianos. Assim, podemos afirmar que todos os poliedros convexos são eulerianos, mas nem todo poliedro euleriano é convexo (SOUZA, 2010, p. 71).

Pode-se associar os Poliedros Platônicos a essa relação, uma vez que todo poliedro de Platão também é euleriano. Dessa forma, sabendo apenas o nome do sólido regular, a relação de Euler contribui para que se determine seu número de faces, arestas e vértices.

3.4 Os Poliedros Regulares

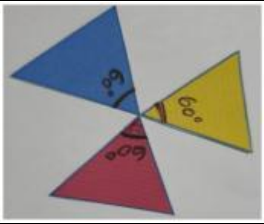
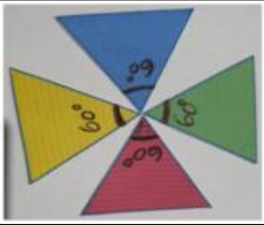
Como foi dito anteriormente, os poliedros regulares são poliedros convexos e como demonstrado por Euclides, existem apenas cinco. Mas por que só cinco? Como existem infinitos polígonos regulares, é evidente imaginar que também existam infinitos poliedros regulares. Nesse sentido, Machado (2000) indaga:

> Será que também é simples construir um pentaedro regular? E um hexaedro regular? Quantos tipos de poliedros regulares serão possível construir? Intuitivamente, pode parecer que, como no caso dos polígonos, podemos construir poliedros regulares com quantas faces desejarmos. Na verdade, não existem muitos poliedros regulares e não é possível construir senão uns poucos tipos destes poliedros - apenas o suficiente para uma correspondência com os dedos de uma mão (MACHADO, 2000, p. 18).

O autor citado relata claramente, que mesmo disponibilizando mais recursos, ainda assim não seria possível construir mais do que cinco desses poliedros, outra forma de responder esta pergunta, é revendo a história pois, encontramos no Livro XI de *Os Elementos* de Euclides, a proposição 21, na qual, diz que “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360°”. Apesar de intuitiva, a demonstração apresentada por Euclides é elaborada, sendo decorrente de uma sequência de resultados auxiliares.

Representa-se então nas tabelas a seguir, análises com as diversas possibilidades de união de faces em torno de cada vértice, indicando que em um sólido platônico as faces são polígonos regulares congruentes sendo necessárias pelo menos a união de três faces em cada vértice para formar um sólido (Quadro 3).

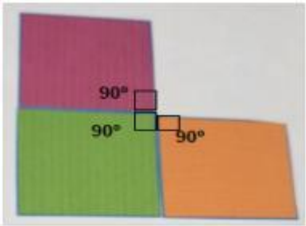
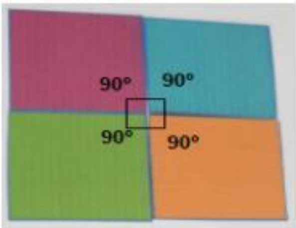
Quadro 3 - Possibilidade de formar poliedros de faces triangulares com ângulos internos de 60°

Número de triângulos	**Representação poliédrica**	**Soma dos ângulos**	**Poliedro formado**
3		180°	Tetraedro
4		240°	Octaedro
5		300°	Icosaedro
6		180°	Tetraedro

Fonte: Autora, 2022.

Conclui-se, que, com três, quatro e cinco triângulos equiláteros se formam ângulos poliédricos para construir o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, porém, com seis ou mais triângulos equiláteros é impossível formar um ângulo poliédrico (Quadro 4).

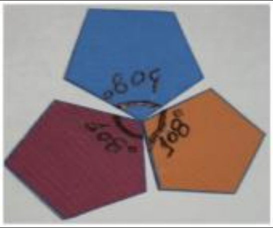
Quadro 4 - Possibilidade de formar poliedros com faces quadradas de ângulos internos de 90°

Número de quadrados	Representação poliédrica	Soma dos ângulos	Poliedro formado
3		270°	Hexaedro
4		360°	Não existe

Fonte: Autora, 2022.

Conclui-se, que, com 3 quadrados se formam o ângulo poliédrico para construir o hexaedro, porém, com quatro ou mais quadrados é impossível formar um ângulo poliédrico (Quadro 5).

Quadro 5 - Possibilidade de formar poliedros de faces pentagonais de ângulos internos de 108°

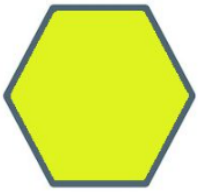
Número de pentágonos	Representação poliédrica	Soma dos ângulos	Poliedro formado
3		324°	Dodecaedro
4		432°	Não existe

Fonte: Autora, 2022.

Conclui-se, que, com 3 pentágonos se formam um ângulo poliédrico para construir um dodecaedro, no entanto, com quatro ou mais pentágonos regulares é impossível formar um ângulo poliédrico.

Logo, sendo as faces de polígonos regulares com mais de 6 lados, a soma dos ângulos destes polígonos em torno de cada vértice será maior que 360°, comprovando assim que não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais e outros exposto no Quadro 6.

Quadro 6 - Comprovação geométrica da existência de apenas cinco tipos de Poliedros Regulares

		Número de faces em cada vértice e poliedro formado			
Face do Polígono Regular	Medida do ângulo interno	Polígono com 3 faces	Polígono com 4 faces	Polígono com 5 faces	Polígono com 6 Faces
Triângulo 	60º	3 x 60º = 180º  Tetraedro	4 x 60º = 240º  Octaedro	5 x 60º = 300º Icosaedro 	6 x 60º = 360º Não existe
Quadrado 	90º	3x 90º = 270º  Hexaedro	4 x 90º = 360º Não existe	5 x 90º = 450º Não existe	6 x 90º = 540º Não existe
Pentágono 	108º	3 x 108º=324º  Dodecaedro	4 x 108º =432º Não existe	5 x 108º =540º Não existe	6x 108º = 648º Não existe
Hexágono 	120º	3 x 120º =360º Não existe	4 x 120º =480º Não existe	5 x 120º =600º Não existe	6 x 120º = 720º Não existe

Fonte: Autora, 2022.

Além disso, por serem convexos, é válida para eles a relação de Euler. Importa-se também, saber por que existem apenas cinco desses poliedros. Para tanto, Lima et al (2004, p. 241) explicam: “**Definição:** um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. **Teorema:** Existem apenas cinco poliedros regulares convexos”.

Para demonstrar, seja **n** o número de lados de cada face e seja **p** o número de arestas que concorrem em cada vértice, sendo necessário associar as letras V, A e F, respectivamente, vértices, arestas e faces.

Temos, então, $2A = nF = pV$, *ou*

$$A = \frac{nF}{2} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{nF}{p} \tag{2}$$

Substituindo a relação de Euler, obtém-se:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \tag{3}$$

Daí, resulta-se:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn} \tag{4}$$

Desse modo, tem-se: 2p + 2n – pn > 0, ou seja:

$$\frac{2n}{n-2} > p \tag{5}$$

Como p 3, chega-se a n < 6. As possibilidades são, então, diante do exposto, as seguintes:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 & \text{(Tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 & \text{(Octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 & \text{(Icosaedro)} \end{cases}$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \qquad \text{(Cubo)}$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10-3} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12 \qquad \text{(Dodecaedro).}$$

Fonte: Lima et al., 2004, p. 241-242.

Observando que devemos ter então $3 \leq n < 6$. Portanto, a partir disso, podemos fazer algumas tentativas, cujas possibilidades que satisfazem a condição acima mostradas no Quadro 7.

Quadro 7 - Demonstração da existência de cinco sólidos com a fórmula de Euler

n	p	V	A em 2	F em 2	Polígono de faces	Poliedros Regulares
3	3	4	6	4	Triangulares	Tetraedro
4	3	8	12	6	Quadradas	Hexaedro
5	3	20	30	12	Pentagonais	Dodecaedro
3	4	6	12	8	Triangulares	Octaedro
3	5	12	30	20	Triangulares	Icosaedro

Fonte: Autora, 2022.

Logo, essa tabela demonstra e sinaliza a existência dos cinco sólidos regulares. Porém, como acrescenta Kaleff (2003), é importante considerar que o aluno deve ser incentivado a investigar e fazer essa descoberta, pois, dessa forma, o desenvolvimento das noções matemáticas se torna mais significativo. A respeito da construção de modelos poliédricos, a autora conta que:

> [...] uma das características mais interessantes das atividades que envolvem construções de modelos de poliedros é o questionamento que surge ao longo dos processos de construção e que proporciona ao aluno a oportunidade para conjecturar sobre diversas situações geométricas. O constante questionamento sobre o que o aluno constrói e sobre o que ele observa lhe proporciona a oportunidade de descobrir as propriedades geométricas que desejamos enfatizar, tomar consciência delas, ajudando-o a construir o correspondente significado geométrico (KALEFF, 2003, p. 21).

A partir do exposto, propõe-se incentivar essa investigação, tornar o assunto mais interessante com o uso do Software no laboratório de informática de forma a conjecturar todas as informações geométricas já demonstradas com as dobraduras. Se fará essa junção, construir e observar o que foi construído com o uso do software de forma a envolvê-los nos mais variados questionamentos, proporcionando novas descobertas ou até mesmo tomar consciências delas, construindo assim um significado geométrico esperado.

3.5 Poliedros de Platão ou sólidos de Platão

Agora conhecendo a relação de Euler, podemos passar adiante e definir os Sólidos de Platão, vejamos a seguinte definição:

Um poliedro é chamado de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número *(n)* de arestas,
b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número *(m)* de arestas,
c) vale a relação de Euler ($V-A+F=2$) (DOLCE, 2005, p. 130).

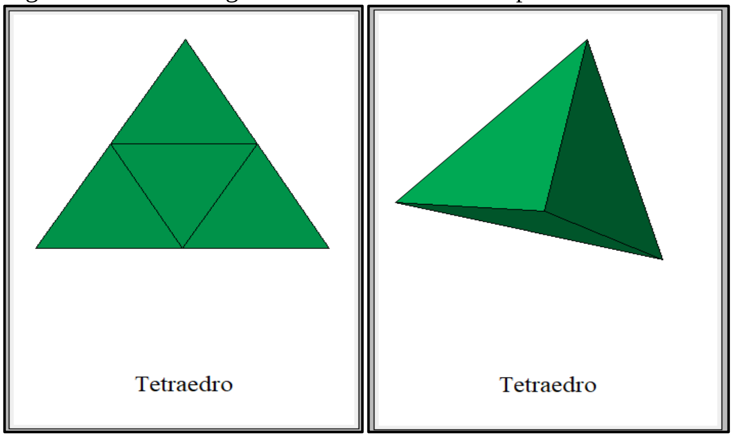
Diante desta definição, sabemos que existem cinco, e somente cinco, classes de Poliedros de Platão, que será demonstrada na sequência.

As figuras abaixo classificam cada poliedro de Platão e exemplifica a definição apontada por Lima et al (2004). No qual este defende que, para melhor compreensão, é necessário associar as letras V, A e F, respectivamente, vértices, arestas e faces.

3.5.1 Tetraedro

O tetraedro (Figura 12) é sem dúvida o gerador de parte da família de poliedro. A partir dele se fazem tanto o octaedro como o icosaedro regular. É o primeiro sólido regular, é um sólido nuclear pois não tem uma diagonal completa.

Figura 12 - Sólido regular de Platão –Tetraedro planificado e em 3D



Fonte: Reproduzida pela autora do Poly Pro 1.12.

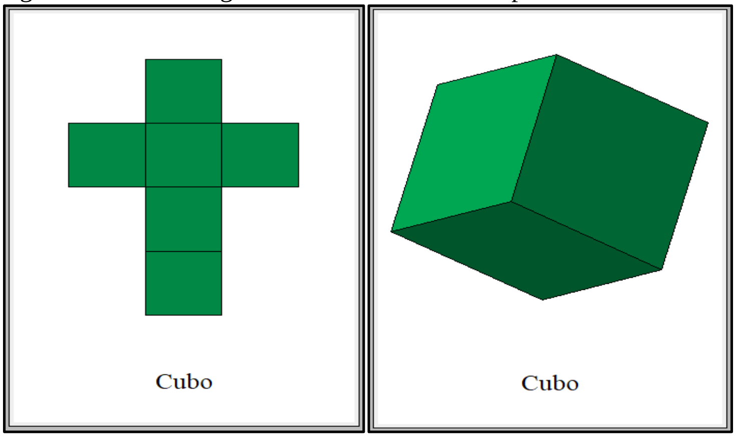
Como é o número de faces que determina o nome do poliedro, o poliedro para m=3 e para n = 3 é o tetraedro.

Conforme deduzido acima, temos V = 4, F = 4 e A = 6, logo aplicando a Relação de Euler: V – A + F = 2   4 – 6 + 4 = 2.

3.5.2 Hexaedro ou Cubo

O hexaedro (Figura 13) é composto de 6 quadrados. Em cada vértice do hexaedro concorrem três arestas e todas as faces desse poliedro possuem quatro arestas. É a modulação básica das nossas construções atuais.

Figura 13 - Sólido regular de Platão – hexaedro planificado e em 3D



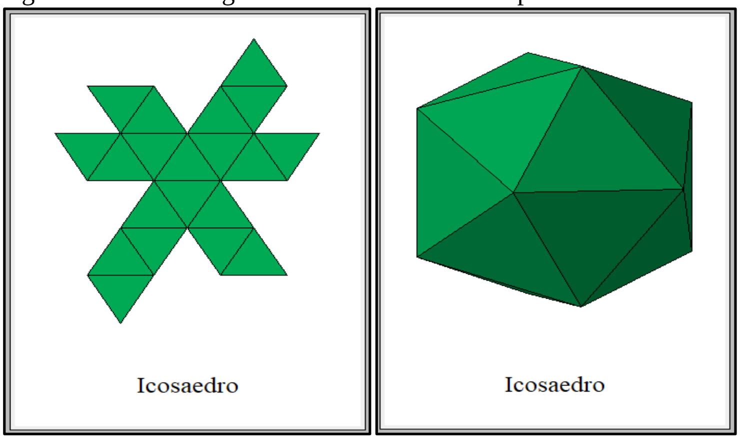
Fonte: Reproduzida pela autora do Poly Pro 1.12.

Ao determinarmos o segundo poliedro, em que $m = 3$ *e* $n = 4$ é o hexaedro a partir dos valores encontrados, vem: Vértices = 8, Faces = 6 quadradas e Arestas =12, temos a Relação de Euler: $V - A + F = 2$ 8 – 12 + 6 = 2.

3.5.3 Icosaedro

O icosaedro (Figura 14) é composto de 20 triângulos equiláteros. Em cada vértice do icosaedro concorrem cinco arestas e todas as faces desse poliedro possuem três arestas. Este é usado como base para geração da ampla maioria das coberturas geodésicas.

Figura 14 - Sólido regular de Platão – icosaedro planificado e em 3D



Fonte: Reproduzida pela autora do Poly Pro 1.12.

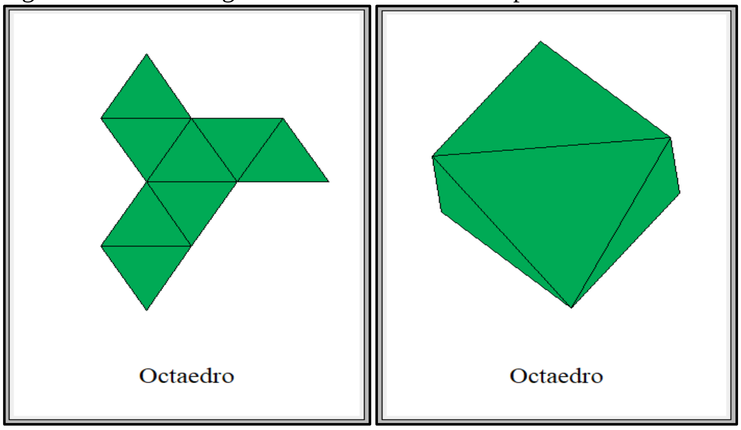
Para o poliedro, com $m = 5$ *e* $n = 3$, teremos o icosaedro, que diante das informações de que Vértices =12, Faces = 20 triangulares e Arestas = 30.

Com a Relação de Euler temos: V – A + F = 2 12 – 30 + 20 = 2

3.5.4 Octaedro

O octaedro (Figura 15) é composto de seis triângulos equiláteros. Em cada vértice do octaedro concorrem quatro arestas e todas as faces desse poliedro possuem três arestas. Pode ser visto como um antiprisma de base triangular, ou como duas pirâmides de base quadrada, acopladas pelas bases.

Figura 15 - Sólido regular de Platão – Octaedro planificado e em 3D



Fonte: Reproduzida pela autora do Poly Pro 1.12.

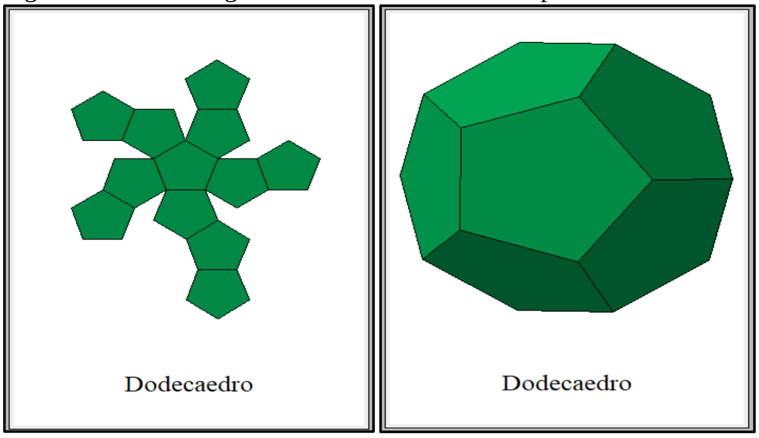
Logo, o poliedro para m = 4, n = 3, V = 6, F = 8 e A = 12 é o octaedro.

Para o octaedro do mesmo modo dos anteriores, sabemos que Vértices = 6, Faces = 8 triangulares e Arestas = 12, assim a Relação de Euler: V – A + F = 2   8 – 12 + 6 = 2

3.5.5 Dodecaedro

O dodecaedro (Figura 16) é um poliedro composto por faces pentagonais, com de 12 pentágonos. Em cada vértice do dodecaedro concorrem três arestas e todas as faces desse poliedro possuem cinco arestas.

Figura 16 - Sólido regular de Platão – dodecaedro planificado e em 3D



Fonte: Reproduzida pela autora do Poly Pro 1.12.

Seguindo cálculos para determinar o referido Poliedro, com m = 3 e n = 5, teremos o dodecaedro. Assim, para o dodecaedro temos Vértices = 20, Faces = 12 pentágonos e

Arestas = 30, portanto a Relação de Euler: V – A + F = 20 – 30 + 12 = 2.

O demonstrado deixa claro, que, fazendo uso da Relação de Euler, esclarece a existência dos cinco sólidos regulares. Sendo assim acredita-se que o aluno deve ser incentivado pelo educador que será um mediador desse processo para criar condições do aluno, experimentar, investigar e buscar descobertas por conta própria, de modo que o desenvolvimento de noções matemáticas se torne mais significativas, atingindo o êxito do aprender, principalmente no que diz respeito ao construir modelos de poliedros.

O fazer dá a liberdade do aluno observar, pensar e questionar os porquês existentes em todo desenvolvimento, e, a partir dessa produção em grupo e sob orientação do professor, tem -se a oportunidade desse aluno descobrir e entender as propriedades geométricas que se deseja passar, tomando consciência delas e fazendo as correlações correspondentes ao significado geométrico.

Por acreditar que se aprende na troca de informações, fazendo, vivenciando na prática é que apresento este trabalho focado numa proposta de construção de conceitos geométricos através da dobradura de papel.

No que diz respeito a dobradura no âmbito da Geometria, esta permite várias construções geométricas, tanto em duas ou três dimensões e sempre parte de uma folha de papel qualquer, ou seja, mesmo que a intenção seja construir um poliedro regular, passa primeiro por uma construção bidimensional, que não deve ser desconsiderada, pois todas as formas que surgem no processo de construção devem ser valorizadas para agregar o conhecimento do aluno, o professor deve demonstrar essa relação, permitindo que esse estabeleça as conexões entre geometria plana e espacial.

No que diz respeito aos Poliedros Platônicos, é possível encontrar uma vasta maneira de representá-los apenas dobrando papel. Portanto, esse trabalho enfatiza à confecção desses sólidos. A esse respeito, ressalta Kaleff que:

> [...] a análise das características geométricas dos poliedros regulares de Platão proporciona ao aluno a oportunidade de observar uma grande variedade de conexões entre as figuras geométricas planas e as espaciais, levando-o a descobrir várias situações em que surgem padrões de regularidade geométrica (KALEFF, 2003, p. 21).

Entende -se então, que essas conexões podem ser observadas com o auxílio do Origami já que este é visto como arte de dobrar papeis, podendo ele ser empregado cada vez mais na sala de aula para o ensino de matemática, como uma ferramenta de ensino envolvendo conceitos geométricos, potencializando o ensino e aprendizagem.

Os estudos demonstram que essa metodologia vem sendo utilizada nos mais variados espaços escolares por ser de fácil aplicabilidade e compreensão dos alunos, sendo ainda, dinâmica, criativa e econômica, favorecendo o seu uso em qualquer ambiente, pois muitas escolas são carentes, não disponibilizando de dinheiro para aquisição de materiais pedagógicos. Por acreditar que o Origami é um material manipulativo relevante na educação, que se buscou conhecer um pouco mais de sua história, seu surgimento e o avanço desta arte que, originalmente, é conhecida como Origami.

4 A HISTÓRIA DO ORIGAMI

A palavra origami (Figura 17) é de origem japonesa que se origina do verbo dobrar (折り=*ori*) e do substantivo papel (紙=*kami*), ou seja, dobrar o papel. Hoje em dia o Origami é uma arte difundida pelo mundo todo sendo que no Brasil, é conhecida com dobradura, na língua espanhola como *papiroflexia*, no inglês como *paperfolding*, mesmo sendo um patrimônio da cultura japonesa, em razão de ter enraizado em suas tradições por séculos, ele pode ter surgido na China, visto que a China é considerada o "berço do papel", no Egito ou na Europa (Mouros).

Figura 17 - Ideogramas para designar a palavra Origami

Fonte: Lucas, 2013.

Entretanto, Hatori Koshiro (2020), em K's Origami, explica que a ideia de que o Origami teria surgido na China junto com a invenção do papel foi descartada, haja vista que as evidências sugerem que o papel só foi utilizado na China para escrever.

A técnica foi introduzida no Japão pelos monges budistas coreanos, sendo atribuída a Tonchyo, monge budista de Koma (antiga Coréia), no século VI d.C., onde Estado e religião eram unificados, o origami era usado nas comemorações religiosas xintoístas (UENO, 2003, p. 12).

Os japoneses desenvolveram sua própria tecnologia para fabricar o papel por volta do ano de 610, criando o papel conhecido por washi, que poderia ser usado de forma diversa, inclusive para Origami.

Ressalta-se que no período do Edo1 (1603 a 1867) o papel tornou-se popular, com isto a popularização do Origami que começou a ser desenvolvido em atividades recreativas e familiares, passando de geração a geração.

No texto "Pequena história do Origami", os autores relatam as primeiras publicações específicas a respeito dos origamis, entre elas está o livro "Hidem Sembazuru Orikata" (O segredo dos mil "tsurus"), considerado por muitos o livro mais antigo de origami já publicado, vejamos:

> Foram publicadas duas obras contendo as orientações para a execução de origamis: "*Hidem Sembazuru Orikata"* por Akisato Rito (1797) e "*Kayaragusa*" por Adachi Kazuyuki (1845). Essa última obra ficou conhecida como "*Kan no Mado*". O grou-japonês ou *tsuru*, uma ave considerada tradicionalmente sagrada, tornou-se o símbolo do origami (HAYASAKA; NISHIDA, 2020).

Da mesma forma, conforme se extrai do artigo Origami: Matemática e Sentimento:

> [...] A popularização do Origami se deu no período Tokugawa (1603-1867). Aí surgiu a dobradura original do tsuru (cegonha), sem dúvida a mais popular no Japão. Dois livros são os que fornecem as primeiras instruções dos diagramas utilizados no Origami: Como dobrar mil pássaros de Sembazuru Orikata (1797) e Janela aberta e a estação de inverno de Kan no Mado (1845), neste último aparece pela primeira vez a base da rã, uma outra dobradura muito utilizada (OLIVEIRA, 2004, p. 3).

Os Mouros, no Norte da África, já conheciam a produção do papel e eram exímios dobradores de papel, influenciando a cultura espanhola eles criavam figuras geométricas, pois a religião proibia-os de criarem formas animais. A partir da Espanha espalhou-se para a América do Sul, entrando posteriormente através das rotas comerciais marítimas na Europa e mais tarde nos Estados Unidos.

Com a restauração Meiji em meados do século XIX, onde o Japão deixou de ser um estado feudal e passou a ser um estado moderno, com a abertura de suas fronteiras, houve uma fusão de origami do Oriente com o Origami do Ocidente, formando assim o Origami tradicional, o qual transmitia os modelos de mão em mão, ou seja, de geração em geração.

No início do século XX, Uchiyama Koko, conhecido como pai do Origami moderno, patenteou seus modelos de origami, dando início ao origami moderno com a ideia da propriedade intelectual em sequências dobráveis.

Os Origamis foram popularizados por criadores como Yoshizawa Akira, Takahama Toshie, Honda Isao, Robert Harbin, Gershon Legman, Lillian Oppenheimer, Samuel Randlett, Vicente Solórzano-Sagredo, entre outros, os quais nos anos 50 e 60 formaram um círculo internacional.

Dando sequência aborda-se como esta técnica do Origami adentrou e se popularizou no Brasil.

4.1 Breve histórico do Origami no Brasil

No Brasil acredita-se que a arte do Origami possa ter sido introduzida de duas formas, sendo a primeira através do nosso país vizinho, Argentina, o qual foi influenciado pela cultura espanhola, e a segunda forma através dos imigrantes japoneses que vieram ao Brasil a partir de 1908.

Em o Histórico do Origami no Brasil, encontramos como se deu estas duas formas de introdução do origami no Brasil.

> Na Argentina, uma das heranças culturais trazidas pelos espanhóis foi a tradição de dobrar papel, que na época foi influenciada pelos artigos escritos pelo filósofo espanhol Miguel Unamuno, que era reitor da Universidade de Salamanca. Mais tarde dois europeus emigraram para a Argentina: Dr. Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo que publicaram livros no final da década de 30 sobre o assunto. Estes conhecimentos acabaram se espalhando por alguns países da América do Sul. Por outro lado, quando os japoneses emigraram para o Brasil, trouxeram com eles vários costumes japoneses que aqui procuraram preservar, entre eles, o Origami. Um destes imigrantes, chamado Takao Kamikawa, chegou com a família no ano 9 da era Showa para trabalhar nas fazendas de café. Dizem que ele costumava aos domingos reunir as crianças na Fazenda Barracão na cidade de Bauru e com pedaços de jornais que ele ajuntava e cortava em quadrados, entretia a criançada com figuras como “damashibune, hakama, tsuru, etc”. Trouxe consigo do Japão, um livro chamado “Konreikagami” de Matsuaki Futaba, da editora Dainipon Reisetsu Gakuin Shupan-bu sobre todo o cerimonial religioso do casamento, onde aparece o modo de dobrar algumas figuras como noshi e outros ornamentos feitos de papel ultilizados na cerimônia. Ele costumava fazer todos estes enfeites e em festas decorava o salão com vários tsurus (KANEGAE, 2020).

Destaca-se que na década de 60, a professora Yachiyo Koda passou a ensinar origami com o apoio do Consulado Geral do Japão em São Paulo pela Aliança Cultura Brasil-Japão em várias cidades do Brasil.

A partir daí, também devido ao avanço da internet, difundiu-se muito as técnicas de dobraduras e aumentou o interesse dos brasileiros pelo Origami.

4.2 Origamis na Matemática

Nos dias atuais se percebe dificuldades em ensinar matemática devido essa nova geração midiatizada, a qual sugere que o educador seja um mediador de conhecimento formando um elo entre o ensinar e o aprender, para isso, necessita utilizar desses novos recursos cujo objetivo principal é despertar o maior interesse destes, pois essa matéria vem sendo encarada pelos estudantes como chata e muito difícil de se aprender, bem como acreditam que não irão usar os conceitos em seu cotidiano, principalmente no tocante a Geometria, de forma que muitos não entendem os axiomas e propriedades necessárias para as construções geométricas. Ademais, percebe-se que a Geometria vem sendo trabalhada de forma mecanizada e não de forma significativa como deveria ser.

Muitos são os estudos que retratam que materiais manipulativos e exploratórios permite que os estudantes construam seu próprio conhecimento na interação entre eles, se desprendendo das fórmulas, buscando no manuseio e construção desses materiais a capacidade de entender e criar seus próprios resultados tornando-os mais criativos. Com isso, faz – se menção aos recursos de excelentes ferramentas de apoio a aprendizagem de matemática no tocante a parte de geometria que trata dos sólidos de Platão, o material manipulativo Origami modular e do uso do software Poly Pro.

Por consequência, se estabelece nesta pesquisa uma relação entre a Matemática e o Origami, sendo possível descrever os caminhos a serem percorridos, demonstrando o potencial do Origami como um recurso metodológico para as aulas de Matemática.

Muitos Matemáticos hoje, vêm explorando e ordenando uma série de dobras que possibilitam a realização de diversas operações geométricas buscando como referência Euclides, ao qual elaborou e organizou a primeira sistematização da Geometria em “Os Elementos”.

Quando o educador propõe o ensino de geometria por meio do Origami este demonstra que pode se ensinar com economia e simplicidade, pois com uma simples folha de papel é possível realizar várias construções poliédricas abordando todas suas definições e conceitos matemáticos existentes em cada dobra elaborada e em cada sólido construído.

Com o uso do Origami passamos a criar linhas, dobrando papel ao invés de usar régua, com ele podemos ensinar uma variedade de conceitos matemáticos com aulas dinamizadas de forma lúdica, direcionada ao ensino da Geometria na construção de poliedros regulares, os sólidos de Platão, tema integrador dessa pesquisa. Rego, Rego e Galdêncio Jr. mostram que:

> Na realização das dobraduras, os estudantes familiarizam-se com formas geométricas, movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro de uma mesma figura. Noções de retas perpendiculares, retas paralelas, figuras planas e sólidas, congruência, bissetrizes de ângulos, relações entre áreas e proporcionalidade poderão ser introduzidas de maneira igualmente eficaz. As dobraduras possibilitam ainda o desenvolvimento de atividades relacionadas ao estudo de frações, aritmética, álgebra e funções, dentre outros (REGO; REGO; GALDÊNCIO JR., 2003, p. 18).

Os autores indicam o uso do Origami nas atividades de Matemática voltadas para:

- A construção de conceitos;
- A discriminação de forma, posição e tamanho;
- A leitura e interpretação de diagramas;
- A construção de figuras planas e espaciais;

- O uso dos termos geométricos em um contexto;
- O desenvolvimento da percepção e discriminação de relações planas e espaciais;
- A exploração de padrões geométricos;
- O desenvolvimento do raciocínio do tipo passo-a-passo;
- O desenvolvimento do senso de localização espacial (RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIO JR., 2003, p. 19-20).

Destaca-se ainda, a importância do uso do Origami como ferramenta para as aulas de Matemática:

> O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte (RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIA JR., 2003, apud TRIDAPALLI, 2017, p. 31).

Verifica-se os recursos didáticos que facilitam o ensino da Geometria no trabalho sobre Origami: A Geometria das Dobraduras, apresentado no V CONEDU (Congresso Nacional de Educação), dos quais se refere ao Origami, vejamos:

> A Geometria surgiu a partir das necessidades do homem de se localizar, dimensão do espaço onde está inserido, dentre outras. Logo, o ensino de Geometria no âmbito escolar é de extrema importância para o desenvolvimento cognitivo do discente. Diante das limitações em aprender e ensinar Geometria surgiu alguns recursos didáticos com o intuito de facilitar o processo de ensino-aprendizagem desse campo matemático. Dentre elas o Origami, arte de dobrar papel, possibilitando tanto a aquisição de conceitos geométricos quanto coordenação motora, controle emocional e concentração (SILVA; MASSARANDUBA, 2018, p. 4).

A citação, destaca que o Origami é uma ferramenta importante para auxiliar no processo de aprendizagem da Geometria. Valendo ressaltar que as relações entre a Geometria e o Origami são diversas, assim como a escolha do tipo e formato do papel, podendo este ser quadrado, círculo, retângulo, triângulo etc., bem como suas dobras, as quais levam diferentes divisões de planos e ângulos.

Também é exposto por Oliveira (2004, p. 6), que podemos considerar alguns livros nacionais sobre a aplicação do Origami no ensino da Matemática, sendo eles:

- Vivendo a Matemática geometria das dobraduras, (IMENES, 1996), o qual traz a construção de polígonos, poliedros, ângulos e retas;
- Atividades de geometria (MACHADO, 1996), o qual apresenta problemas que envolvem técnicas de composição e decomposição de figuras geométricas;

- Origamis Matemáticos – Dobragens de Papel para fazer figuras geométricas, (MICHEL, 1997), apresenta uma série de dobraduras de sólidos geométricos de fácil execução;
- A geometria do Origami: Atividades de ensino através de dobraduras, (RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIO JR, 2004), apresenta uma grande variedade de atividades para o uso em sala de aula.

Reforçando ao que já foi exposto pelos autores referenciados, entende-se que a dobradura de papel nas aulas de matemática tem potencial de estimular o processo evolutivo do pensamento algébrico, aritmético e geométrico. Ademais, ela permite que se construam conceitos a partir de cada dobra executada, valendo-se ainda de uma percepção visual do aluno.

O papel se torna um material manipulável nas mãos dos educandos nas aulas de matemática, com o recurso Origami modular, podendo explorá-lo e percebê-lo, tanto na forma bidimensional quanto numa transformação do plano no espaço tridimensional, desenvolvendo as mais variadas habilidades, ficando explicito o porquê de se ensinar Geometria com Origami, pois, em experiencias em sala de aula percebe-se a diferença do aluno entender alguns conceitos com a teoria e exposição destes nos livros didáticos a algo ensinado na prática vivendo a experiencia e manuseando de forma concreta.

No que se refere ao Origami para produção dos poliedros de Platão, este irá além de um objeto pronto e acabado, já que ele será produzido dobra a dobra pelas próprias mãos de quem o manuseia, possibilitando melhor compreensão de seus diagramas, o que contribui com a memorização do passo-a- passo transformando em um exercício mental.

O Origami não somente discute conteúdos matemáticos, como também estabelece relações com outras disciplinas, na Arte, desenvolve a criatividade, o controle motor e aperfeiçoa o senso estético; nas Ciências Físicas e Biológicas, é utilizado na confecção de animais e plantas, na História e na Geografia, permite explorar temas como a história e o surgimento do papel, o percurso das invenções através dos séculos e entre os povos; nas Linguagens, estimula a percepção de outras formas de comunicação e produção de textos interdisciplinares; na vida social, promove o trabalho em grupo, a atividade cooperativa, habilidade de concentrar e memorizar, ser utilizado em terapia ocupacional além da reciclagem de papel, como enfatiza Rêgo, Rêgo e Galdêncio Jr. (2003):

Vejamos algumas habilidades que o Origami pode propiciar ao estudante:

> O origami desenvolve nas crianças habilidades que são muito evidentes, tais como a habilidade manual, o conceito de volume, a coordenação de movimentos e a psicomotricidade fina, além de ajudá-las a tomar consciência do uso das mãos. Desenvolve também o espírito criativo, ensina a seguir instruções e estimula o trabalho em grupo (ROBLES, 2010 apud TRIDAPALLI, 2017, p. 31).

Portanto, a utilização de Origami no ensino da Matemática é uma forma atraente e inovadora para ensinar Geometria, além de ser uma proposta curricular que apresenta competências e habilidades esperadas pelos alunos no final do processo de ensino, pois, ele não é visto apenas como uma "arte de dobrar papel", mas, sim, como um objeto de aprendizagem contido de um corpo axiomático com embasamento matemático para estimular o pensamento geométrico e a visão espacial, propiciando ao estudante novas experiências, diferente do que estão habituados em aulas tradicionais, tornando a Matemática mais leve, de fácil compreensão, enfim, assegurar um ensino significativo.

4.3 Os Axiomas do Origami

Falar de axiomas do Origami é falar de Huzita-Hatori, estes são recursos que expressa muito mais Matemática do que se imagina, pois suas construções elementares são conceitos geométricos, ainda que, algumas pessoas os utilizam como forma de artesanato ou terapia, nem se quer imaginando que estão utilizando Matemática em cada dobra. É importante também deixar exposto aqui que é possível realizar dobras em linhas curvas, no entanto, a pesquisa aqui desenvolvida abordará somente as dobras com as linhas retas.

As figuras geométricas de um modo geral, feitas por dobraduras são conduzidas por um conjunto de axiomas que provam a existência de cada dobra possível de ser gerada. O matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, da universidade de Pádua, na Itália, nasceu no Japão, mas viveu muitos anos na Itália na década de 1970, este, criou as seis operações conhecidas como axiomas de Huzita, destacado por Rafael (2011).

No entanto em 2001, Koshiro Hatori apresentou uma dobragem diferente dos axiomas existentes, sendo este, o sétimo axioma. A esse respeito, Rafael (2011, p. 19) ressalta que "Estes axiomas (que na realidade são operações) descrevem operações básicas que se podem efetuar em Origami e permitem caracterizar formalmente o tipo de construções geométricas que é possível fazer com Origami".

Mencionado ainda a autora, foi somente em 2003 que Robert Lang publicou um estudo demonstrando as sete combinações de dobras conhecidas agora como axiomas de Huzita-Hatori. Lang publica outro artigo em 2010 e neste, apresenta crédito apropriado a

Jaques Justin para o 7° axioma. Ainda segundo o autor, o francês Jacques Justin publicou um artigo *"Resolution par le pliage de l'équation du troisieme degre et applications geometriques"*, em 1989, onde enumerou 7 possíveis combinações de alinhamento, sendo o último apresentado antes da descoberta de Hatori, permitindo a definição das combinações tanto como Huzita- Hatori, quanto como Huzita-Justin.

De acordo com Lang (2010), isso mostra que pesquisadores independentes expressaram as mesmas leis universais na linguagem matemática.

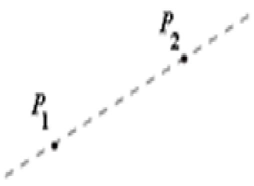
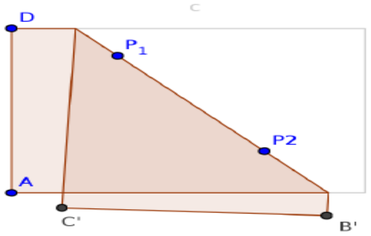
Ademais, os axiomas Huzita–Justin ou axiomas Huzita–Hatori são um conjunto de regras relacionadas aos princípios matemáticos do origami , estas, descrevem as operações que podem ser feitas ao dobrar um pedaço de papel. Os axiomas assumem que as operações são concluídas em um plano (ou seja, um pedaço de papel perfeito) e que todas as dobras são lineares. Estes não são um conjunto mínimo de axiomas, mas sim o conjunto completo de possíveis dobras simples.

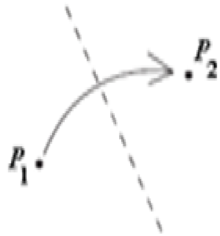
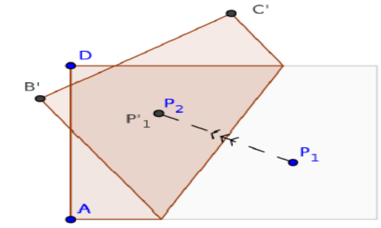
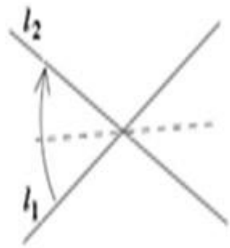
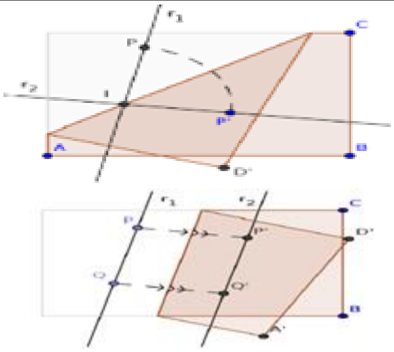
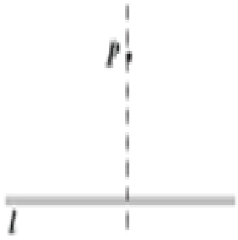
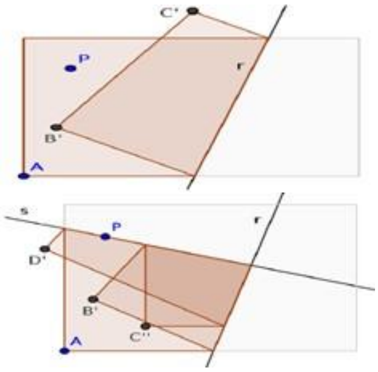
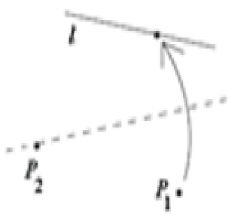
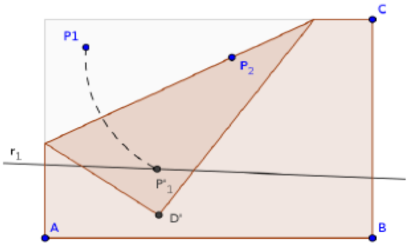
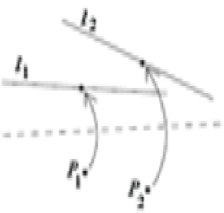
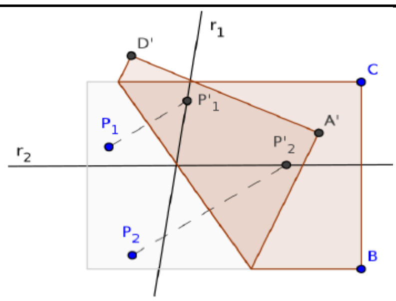
Essas operações admitem combinações entre si para atingir qualquer construção simples (dobra única) em Origami. Segundo Rafael (2011):

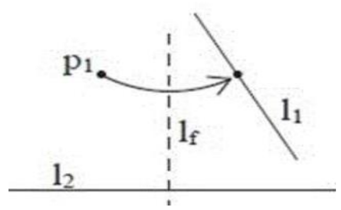
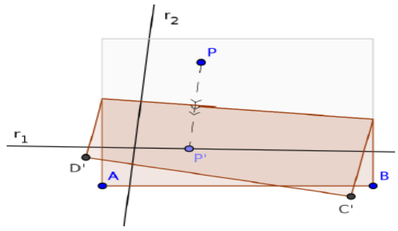
> Na teoria matemática das construções geométricas com dobragens de papel, os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para definir o que é possível construir com dobragens simples. (Admitindo dobragens simultâneas já vamos além do que é descrito pelos axiomas de Huzita-Hatori, passando, por exemplo, a ser possível dividir um ângulo genérico em cinco partes iguais ou a construir o polígono regular de onze lados, algo que não é possível recorrendo apenas a dobras simples) (RAFAEL, 2011, p. 19).

Lang (2003), citado por Monteiro (2008), realizou um estudo completo de todas as dobragens possíveis que especificam um único vinco e comprovou a existência de somente 7 axiomas, demonstrados no Quadro 8.

Quadro 8 - Representação dos Axiomas do Origami

Descrição dos axiomas	Diagramas	Corpo axiomático
Axioma 01 Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos, descrição semelhante ao primeiro postulado do livro 1 de Euclides.		

Axioma 02 Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que as torna coincidentes, propriedade justificada pelo quarto postulado do livro 1 de Euclides.		
Axioma 03 Dadas duas retas, I1 e I2, há uma única dobra que torna coincidentes, justificado pelas sexta e sétima "noções comuns" do livro 1 de Euclides.		
Axioma 04 Dados um ponto P e uma reta I há uma única dobra perpendicular a I que passa por P. Pode-se com este axioma determinar a menor distância entre uma reta e um ponto fora desta reta.		
Axioma 05 Dados dois pontos, P1 e P2, e uma reta I, se a distância de P1 a P2 for igual ou superior à distância de P2 a I, então há uma única dobra que faz incidir P1 em I e que passa por P2.		
Axioma 06 Dados dois pontos P1 e P2, e duas retas I1 e I2, se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma única dobra que faz incidir P1 em I1 e P2 em I2 gerando os pontos P1' e P2'.		

<table>
<tr>
<td>Axioma 07
Dado um ponto P e duas retas I1 e I2, se as retas não forem paralelas, há uma única dobra que faz incidir P em I1 e é perpendicular a I2.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Adaptado pela autora de Monteiro, 2008, p. 9-10.

Constata-se então, que é possível resolver equações com esses axiomas, de modo a efetuar a trissecção de um ângulo, duplicar um cubo, dentre outros, possibilitando ao aluno desenvolver sua destreza manual, além de contribuir na compreensão de conceitos geométricos como: simetrias, congruências, ângulos, razões, proporções etc. Esta condição axiomática permite, portanto, maior consciência da Matemática que existe por trás de uma simples dobradura de papel.

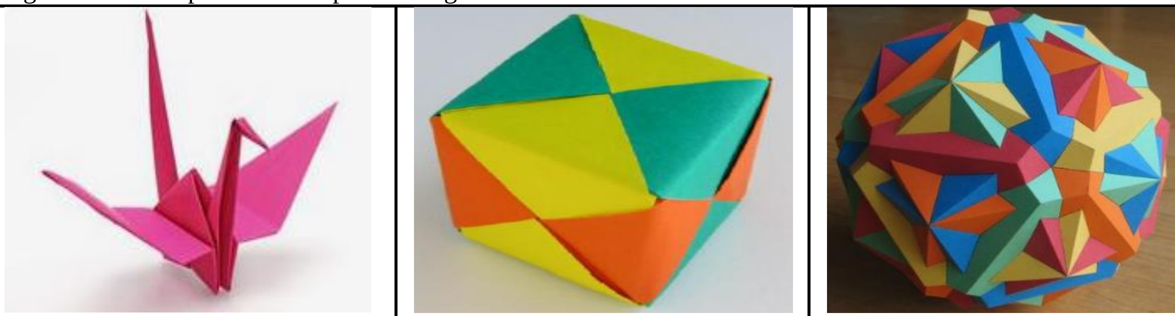
4.4 Tipos e módulos de Origamis modulares

Como já foi colocado aqui, o formato inicial da folha de papel mais utilizado é o quadrado, porém, pode-se partir de um retângulo, de um círculo, ou outra forma qualquer e quanto sua confecção o origami pode ser classificado em três tipos:

- Sua primeira classificação se refere ao Origami simples: formado por uma única folha de papel, composto por diversas dobraduras não podendo cortar nem colar.
- A segunda classificação descreve o Origami modular: formado por diversos módulos iguais ou simétricos encaixados, esse tipo de modelo é feito pela composição de peças geometricamente iguais.
- Na terceira classificação, chamamos de Origami composto: formado pelo encaixe de vários origamis simples, neste caso, necessita de várias folhas de papeis para ser confeccionado e um pouco mais de conhecimento das técnicas, pode-se ainda, utilizar cola e tesoura para possíveis aperfeiçoamentos. Este tipo de modelo é mais aplicado para objeto de confecção.

Classificação dos três tipos de Origamis demonstrada na Figura 18.

Figura 18 - Exemplo dos três tipos de Origami



Origami simples | Origami modular | Origami composto

Fonte: Autora, 2022.

Sobre a técnica do Origami modular, discorre Mitchel (2008, p. 6) que neste:

> [...] se reúne um número de módulos simples dobrados para criar um modelo poliédrico. Esse tipo de dobragem de papel teve origem, nos Estados Unidos, nos tempos das misturas de culturas do início dos anos 60. Desde então, ganhou aderentes no Reino Unido e por todo o mundo, tornando-se popular até no Japão, o lar tradicional da dobragem de papel com uma só folha, onde é conhecido por origami unitário.

Relata-se atualmente, que está cada vez mais comum o uso de folhas retangulares para a construção de modelos poliédricos, cuja razão do lado maior para o menor é $1/\sqrt{2}$ muito utilizado neste tipo de construção, uma vez que permite ampliações dos modelos com facilidade. Um exemplo popular desse retângulo é a folha A4, que, além de ideal, se torna acessível por ser facilmente encontrada no mercado e possuir baixo custo, sem contar que toda escola possui esse tipo de papel.

O tipo do papel a ser escolhido fica a critério de quem vai utilizá-lo dependendo do que vai ser construído e o que se espera de resultado, há opções de papeis com as mais variadas medidas de gramaturas, onde as mais finas não aguentam muitas dobraduras e vincos em uma mesma parte e gramaturas grossas podem quebrar com os vincos.

O papel sulfite possui gramatura 75g, considerada uma gramatura média, no entanto, indicado para origamis, apesar do papel mais utilizado ser o papel espelho, também conhecido como papel dobradura, que contém uma face colorida e a outra face branca, tornando fácil de enxergar os vincos e dobras, além de outros que possuem gramaturas e nomes variados, tais como: *creative papers, lumi papers*, que mantêm o padrão de tamanho A4.

O uso do origami como modelo didático vem sendo explorado por entusiastas, matemáticos, engenheiros, físicos e designers na atualidade. Dentre alguns podemos destacar David Michell (2008), com seus cubos engastados e exploração de poliedros modulares, Miyuki Kawamura (2001), com seus polígonos e poliedros regulares, semirregulares e estrelados, Tomoko Fuse (1992) e suas espirais, Alperin e Lang (2006), com suas pesquisas recentes sobre os axiomas do origami.

Tomoko Fuse é uma das mais importantes origamistas da história no que se refere ao Origami Modular. Fuse (1990) menciona essa modalidade do Origami como uma forma lúdica que exige tempo e dedicação de quem se propõe a fazer. Mas ressalta que depois das unidades finalizadas e encaixadas as formas finais, estas se tornam claras e expressivas. A autora ressalta, ainda, que, para produzir Origamis Modulares, basta utilizar apenas mãos e papeis, não havendo a necessidade de nenhum tipo de adesivo.

Fuse (1990, p. 133), em sua obra "*Unit Origami Multidimensional Transformations"*, apresenta vários tipos de poliedros construídos através do Origami Modular, afirmando que: "Nós permitimos que os poliedros se desenvolvam em todas as direções no espaço para gerar novos tipos de sólidos de Origami unitários" A autora apresenta diagramas dos mais variados poliedros e, dentre eles, os Regulares.

Nesta pesquisa, será proposto construções mais acessíveis e fáceis de serem produzidas para que os alunos do 2º Ano do Ensino Médio consigam obter êxito nessas construções, dessa forma será utilizado ideias a partir da obra "*Polyhedron Origami for beginners"* (KAWAMURA, 2001) que demonstram os diagramas similares aos quais serão utilizados daqueles que são aqui propostos.

A autora exibe os diagramas modulares de cada Sólido Regular que são obtidos a partir de uma folha quadrada. Ela apresenta um módulo para o Hexaedro, outro para o Dodecaedro e um último, que permite a montagem do Tetraedro, Octaedro e Icosaedro.

No entanto, as construções propostas neste trabalho será a elaboração dos sólidos regulares de Platão, realizando os módulos a partir de uma folha retangular, que ao início se fará todo um apanhado referente aos conceitos geométricos envolvidos em cada dobra de papel, estabelecendo uma relação entre o Origami e a Geometria.

4.5 Módulos

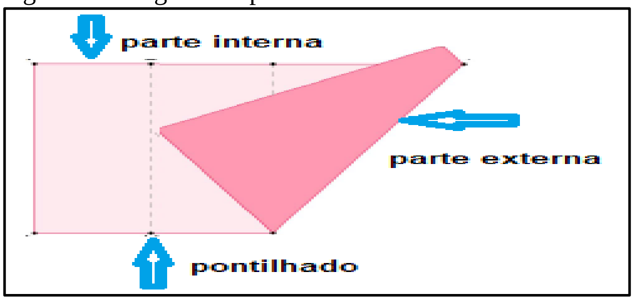
Módulos são várias peças de papel confeccionados por meio de dobraduras, chamadas Origami modular, como já mencionado, modular por ser formado por diversos módulos iguais ou simétricos, para construção desses módulos precisa ser seguindo uma série de instruções para formar o polígono desejado, em quantidades necessárias ao poliedro a ser formado, que por sua vez serão unidas, através de encaixes, com a finalidade de formar um único objeto (sólido).

Assim, os módulos produzidos neste trabalho e mostrados abaixo serão utilizados para montar os Poliedros de Platão, estes foram retirados e adaptados de Cavacami e Furuya (2010, p. 3-6). As imagens demonstradas abaixo foram desenvolvidas pela autora, com apoio de softwares matemáticos.

Para a elaboração dos módulos (Figura 19), sugere-se utilizar um papel sulfite A4, retangular, de dimensões 290 mm por 297 mm, dos quais são explicados na seguinte legenda:

- Os segmentos pontilhados indicarão os vincos a serem feitos no papel.
- O tom de cores mais claras indicará a parte interna do papel.
- O tom de cores mais escuras indicará a parte externa do papel.

Figura 19 - Legenda explicativa



Fonte: Autora, 2022.

Ao considerar os sólidos de Platão, sabemos que três deles, o tetraedro, o octaedro e icosaedro, são feitos com módulos de faces triangulares, já o Hexaedro com módulos e de faces quadrangulares, por último, temos o dodecaedro com módulos de faces pentagonais. Sendo assim, para construir tais Poliedros deverá ser realizado as dobraduras dos módulos de faces triangulares, quadrangulares e pentagonais demonstradas abaixo.

4.5.1 Módulos Triangulares

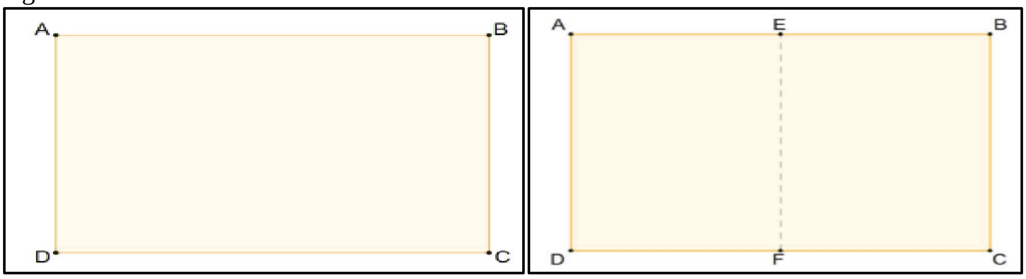
Os módulos triangulares são utilizados na construção dos poliedros de Platão com faces triangulares (tetraedro regular, octaedro regular e icosaedro regular) como já citado anteriormente, para estes módulos será construído duas figuras similares, porém simétricas, das quais será nomeada de modulo A e módulo B.

4.5.2 Módulo A

Para montagem deste modulo A, pega-se uma folha de papel, como a recomendada e siga os seguintes passos:

Passo 1 (Figura 20). Iniciar com a folha no modo retrato (dimensão na horizontal), demarcar seus vértices com as letras A, B, C e D, dobrando em seguida o maior lado da folha ao meio, vincando para formar o segmento EF.

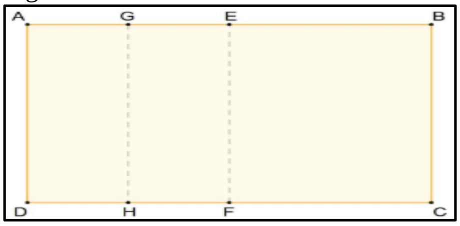
Figura 20 - Passo 1



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 21). Dobrar uma das metades obtidas ao meio novamente, por exemplo, a metade esquerda, obtendo um quarto da folha, e marcar o vinco formando o segmento GH.

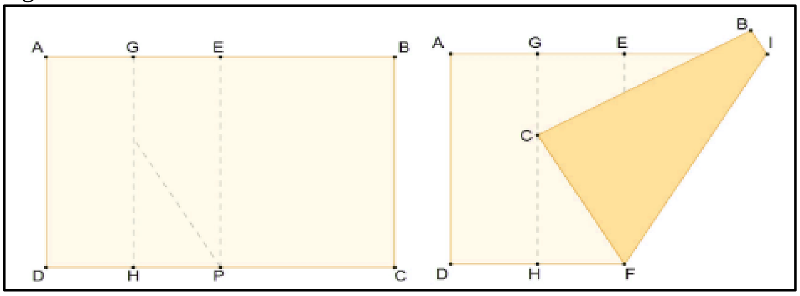
Figura 21 - Passo 2



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 22). Colocar o dedo sobre o ponto F e dobrar o vértice C até encostar no segmento GH, obtendo o segmento FI.

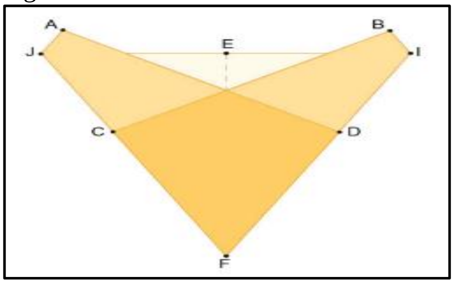
Figura 22 - Passo 3



Fonte: Autora, 2022.

Passo 4 (Figura 23). Colocar o dedo sobre o ponto F e dobrar o vértice D sobre o segmento FI, obtendo o segmento FJ.

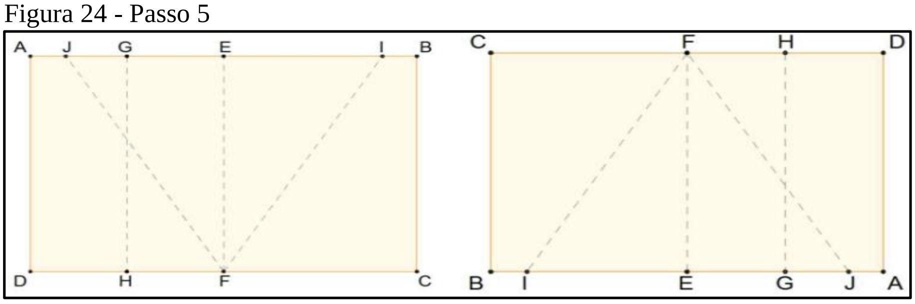
Figura 23 - Passo 4



Fonte: Autora, 2022.

Passo 5 (Figura 24). Abrir o papel e girá-lo 1800

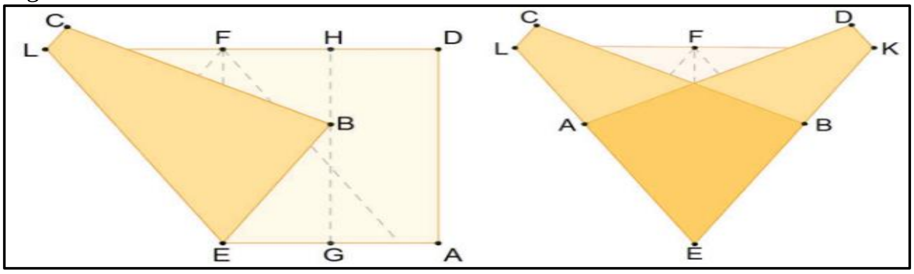
Figura 24 - Passo 5



Fonte: Autora, 2022.

Passo 6 (Figura 25). Repetir os passos 3 e 4 (colocar o dedo sobre o ponto E e dobrar o vértice B até encostar no segmento GH, obtendo o segmento EL; dobrar o vértice A sobre o segmento BE, obtendo o segmento EK).

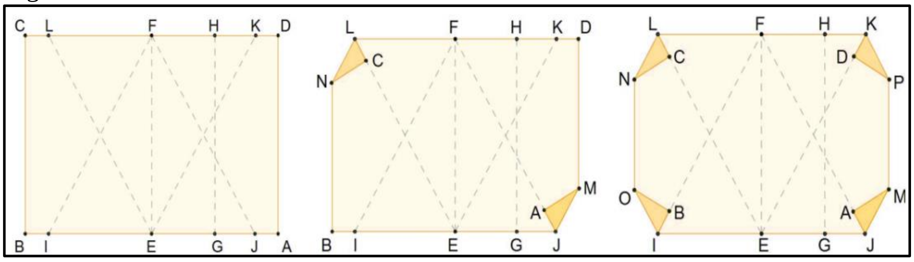
Figura 25 - Passo 6



Fonte: Autora, 2022.

Passo 7 (Figura 26). Abrir o papel e dobrar o vértice A sobre o segmento FJ, o vértice C sobre o segmento EL, o vértice B sobre o segmento FI e o vértice D sobre o segmento EK, obtendo, respectivamente, os segmentos JM, IO, LN e KP.

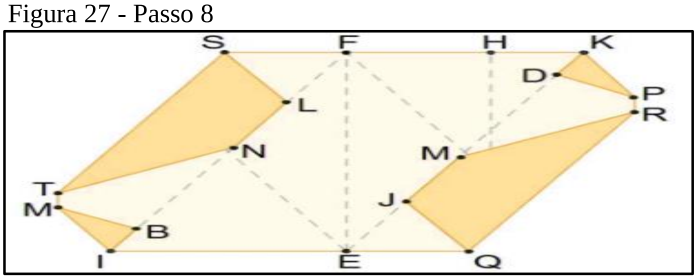
Figura 26 - Passo 7



Fonte: Autora, 2022.

Passo 8 (Figura 27). Dobrar o segmento LN sobre o segmento FI, obtendo o segmento ST, e sobrar o segmento JM sobre o segmento EK, obtendo o segmento QR.

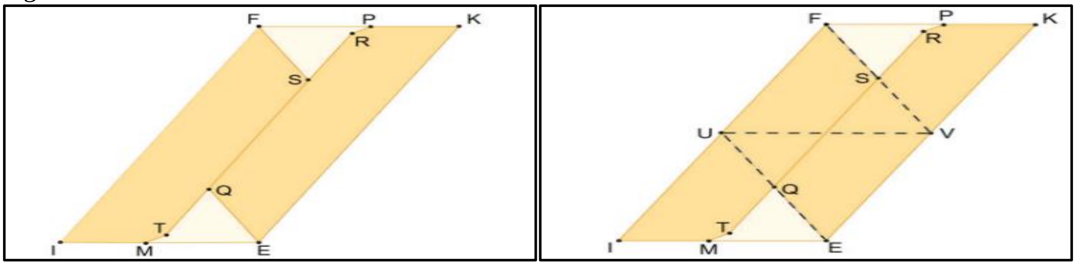
Figura 27 - Passo 8



Fonte: Autora, 2022.

Passo 9 (Figura 28). Dobrar o segmento ST em torno do segmento LN e dobrar o segmento QR em torno do segmento JM, dando sequencia dobrar o vértice K sobre o segmento FI e o vértice I sobre o segmento EK, formando quatro triângulos equiláteros (KFV, FVU, VUE e UEI) apenas para vincar.

Figura 28 - Passo 9

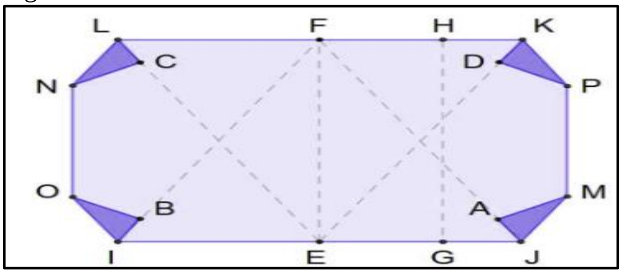


Fonte: Autora, 2022.

4.5.3 Módulo B

O módulo B é simétrico ao módulo A e sua construção só difere a partir do passo 8.Tome uma folha de papel como a recomendada e siga todos os passos do 1 ao 7 do Módulo A até obter um papel com os vincos e dobraduras como este exemplo (Figura 29):

Figura 29 - Passo 7

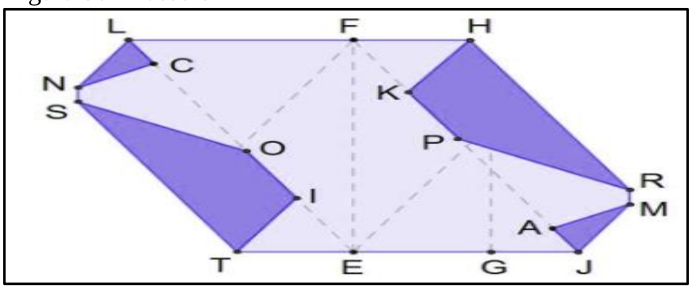


Fonte: Autora, 2022.

Para dar continuidade e obter o módulo B, segue a partir do passo 8, seguindo as seguintes instruções:

Passo 8 (Figura 30). Dobrar o segmento KP sobre o segmento FJ e dobrar o segmento IO sobre o segmento EL, obtendo, respectivamente, os segmentos HR e ST.

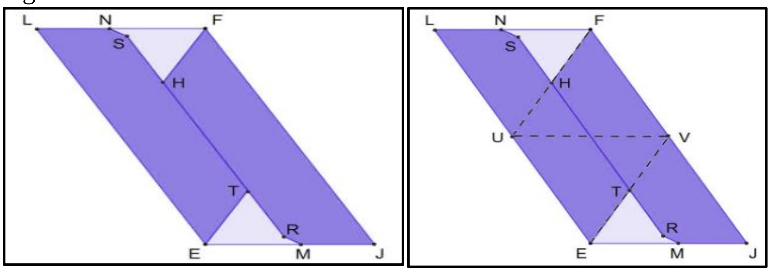
Figura 30 - Passo 8



Fonte: Autora, 2022.

Passo 9 (Figura 31). Dobrar o segmento HR em torno do segmento KP e dobrar o segmento ST em torno do segmento OI, seguindo com a dobra do vértice vértice L sobre o segmento FJ e o vértice E sobre o segmento FJ, formando quatro triângulos equiláteros (LFU, FUV, UVE e VEJ) apenas para vincar.

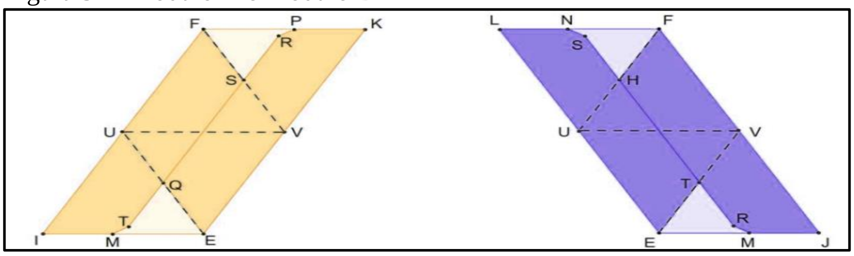
Figura 31 - Passo 9



Fonte: Autora, 2022.

Comparando o módulo A com seu simétrico B teremos (Figura 32):

Figura 32 - Módulo A e Módulo B



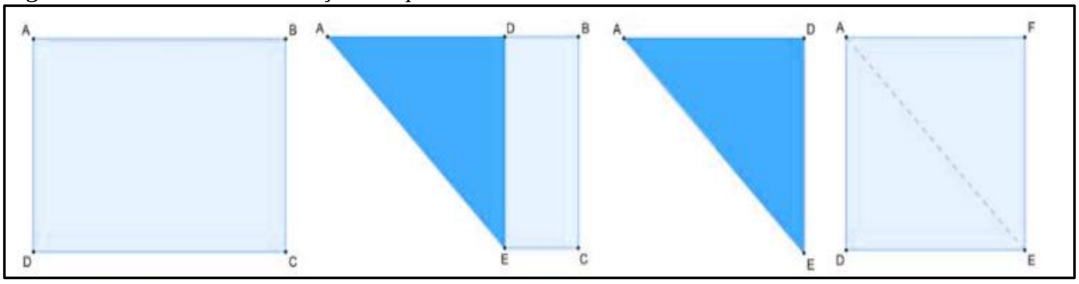
Fonte: Autora, 2022.

4.5.4 Módulo de Sonobe

Para este módulo, vamos partir de uma folha sulfite retangular tamanho A4, redimensionar manualmente essa folha de forma a retirar um quadrado da seguinte maneira (Figura 33):

a) Iniciar com uma folha retangular e marcar os vértices A, B, C e D.
b) Dobrar o vértice D sobre o segmento AB e marcar o vinco, obtendo o ponto F (coincidente com D) e o ponto E.
c) Recortar e descartar o quadrilátero DBCE.
d) Abrir o triângulo ADE que restou para obter o quadrado AFED.

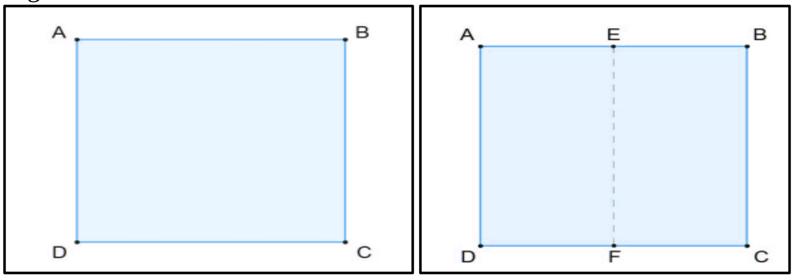
Figura 33 - Processo de obtenção do quadrado



Fonte: Autora, 2022.

Passo 1 (Figura 34). Iniciar com a folha no formato quadrado e marcar os vértices com as letras A, B, C e D dobrando-a ao meio para marcar o vinco e obter o segmento EF.

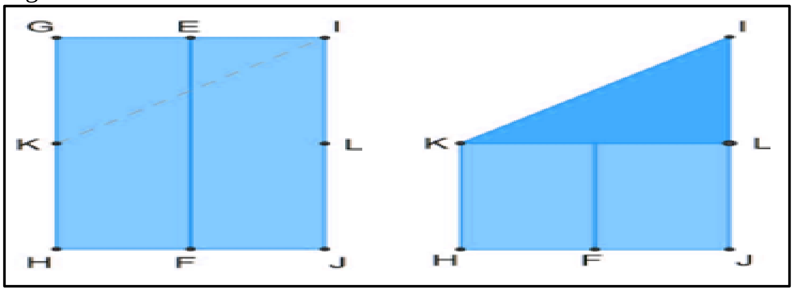
Figura 34 - Passo 1



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 35). Dobrar cada metade obtida ao meio novamente, obtendo um quarto da folha, ou seja, o retângulo GIJH.

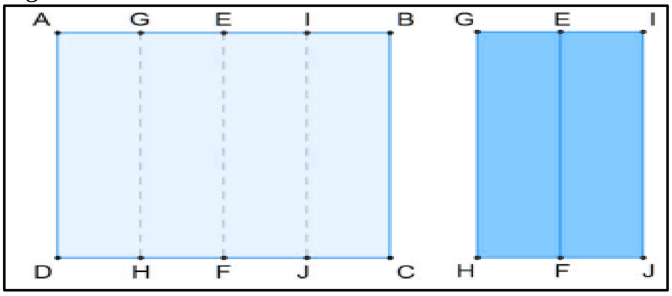
Figura 35 - Passo 2



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 36). Colocar o dedo sobre o ponto I e dobrar o vértice G sobre o segmento IJ e marcar o vinco, obtendo o segmento KI e o ponto L.

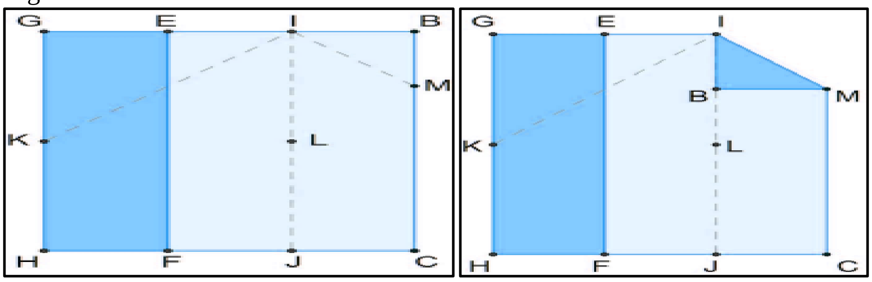
Figura 36 - Passo 3



Fonte: Autora, 2022.

Passo 4 (Figura 37). Voltar com o vértice G e abrir o lado direito, ou seja, passar o lado BC sobre IJ, dobrar o vértice B ao seguimento IJ sobre o vinco que estará marcado, formando o segmento IM e consequentemente o triângulo IBM.

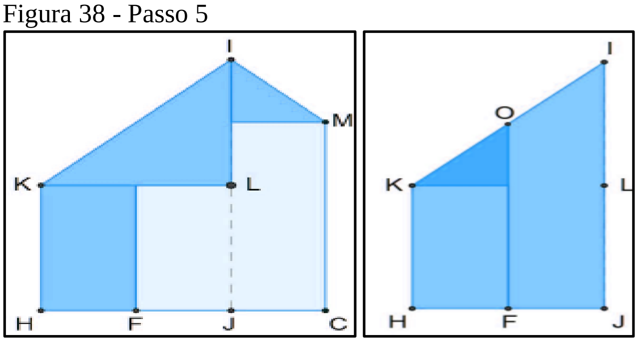
Figura 37 - Passo 4



Fonte: Autora, 2022.

Passo 5 (Figura 38). Dobrar o triângulo KGI sobre o segmento IJ, formando o triângulo KLI, dobrar o trapézio formado IJCM em torno do segmento IJ e marcar o ponto O no segmento KI.

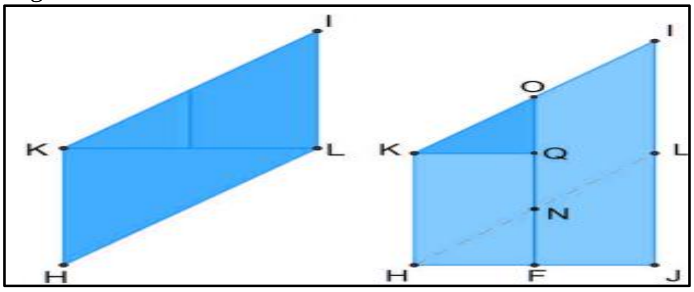
Figura 38 - Passo 5



Fonte: Autora, 2022.

Passo 6 (Figura 39). Dobrar o vértice J até o ponto K, marcar o vinco HL, voltar com o vértice J e marcar o ponto N sobre o segmento OF.

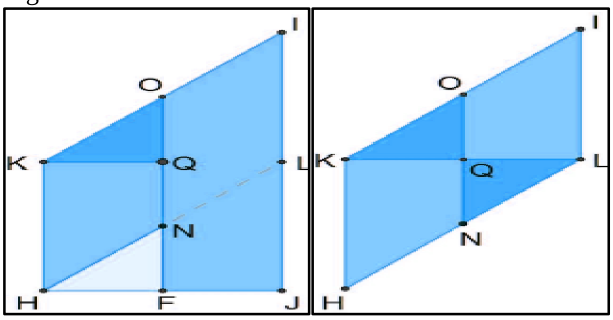
Figura 39 - Passo 6



Fonte: Autora, 2022.

Passo 7 (Figura 40). Dobrar o triângulo HFN para dentro e em torno do segmento HL, em seguida dobrar o triângulo LJH em torno do segmento HL e por dentro do trapézio NHKQ.

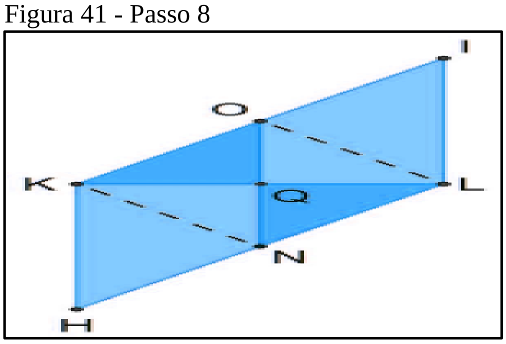
Figura 40 - Passo 7



Fonte: Autora, 2022.

Passo 8 (Figura 41). Dobrar o ponto I sobre o ponto L e o ponto H sobre o ponto K para marcar os vincos OL e KN.

Figura 41 - Passo 8



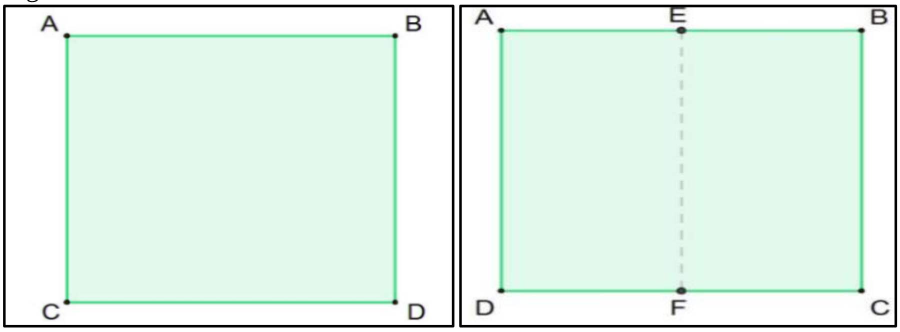
Fonte: Autora, 2022.

4.5.5 Módulo Pentagonal

Como na explicação do módulo anterior, este tambem será feito com um quadrado que será retirado da folha de sulfite A4 e será utilizado para montar o dodecaedro regular.

Passo 1 (Figura 42). Iniciar com a folha no formato quadrado e marcar os vértices A, B, C e D, dobrar a folha ao meio e marcar o vinco, obtendo o segmento EF.

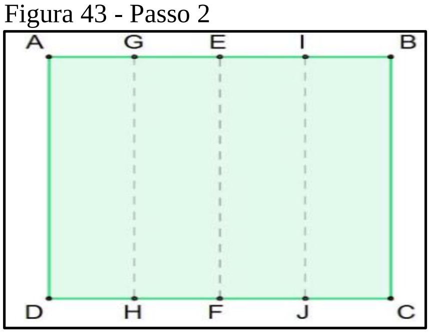
Figura 42 - Passo 1



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 43). Dobrar cada metade ao meio, o segmento AD sobre o segmento EF e o segmento BC sobre o segmento EF. Marcar os vincos, obtendo os segmentos GH e IJ.

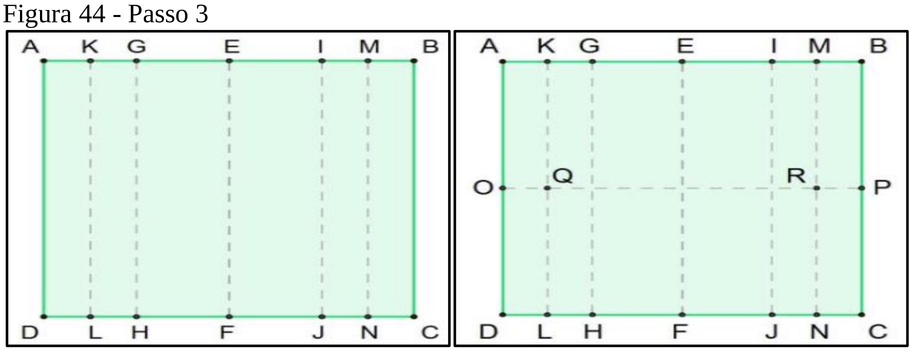
Figura 43 - Passo 2



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3(Figura 44). Dobrar o segmento AD sobre o segmento GH e o segmento BC sobre o segmento IJ. Marcar os vincos, obtendo os segmentos KL e MN em seguida dobrar o segmento AB sobre o segmento DC. Marcar o vinco e os pontos O, P, Q e R.

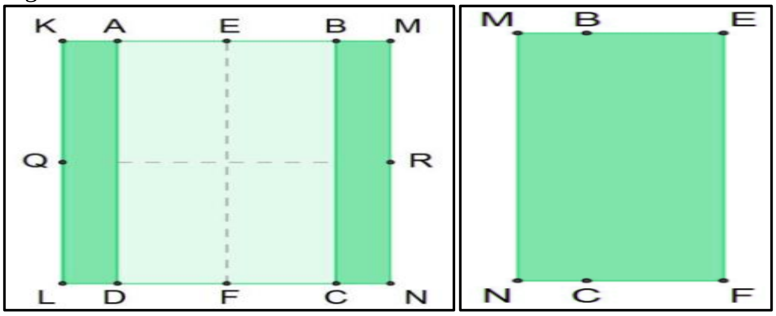
Figura 44 - Passo 3



Fonte: Autora, 2022.

Passo 4 (Figura 45). Dobrar o retângulo AKLD sobre o retângulo KGHL e o retângulo BMNC sobre o retângulo MIJN e por fim, dobrar o retângulo MEFN sobre o retângulo KEFL.

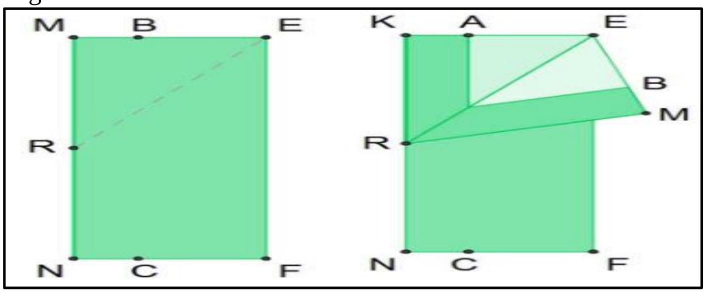
Figura 45 - Passo 4



Fonte: Autora, 2022.

Passo 5 (Figura 46). Dobrar o vértice M para o lado direito, em torno do segmento ER.

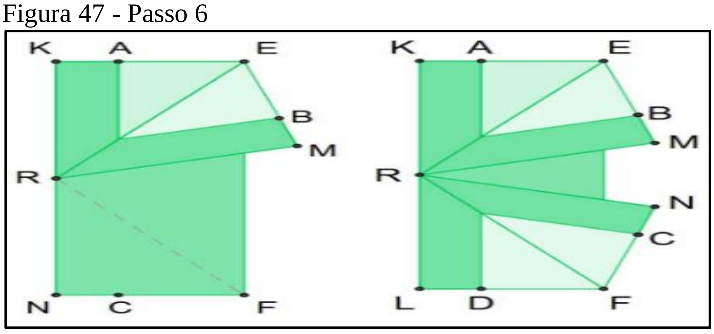
Figura 46 - Passo 5



Fonte: Autora, 2022.

Passo 6 (Figura 47). Dobrar o vértice N para a direita, em torno do segmento FR.

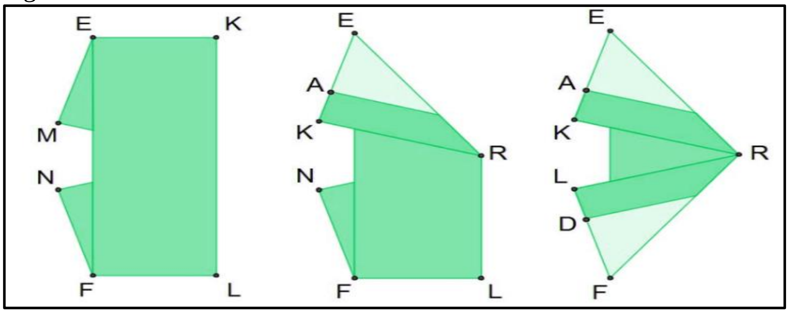
Figura 47 - Passo 6



Fonte: Autora, 2022.

Passo 7 (Figura 48). Virar a folha e repetir os passos 5 e 6. Dobrar o vértice K em torno do segmento ER e o vértice L em torno do segmento FR.

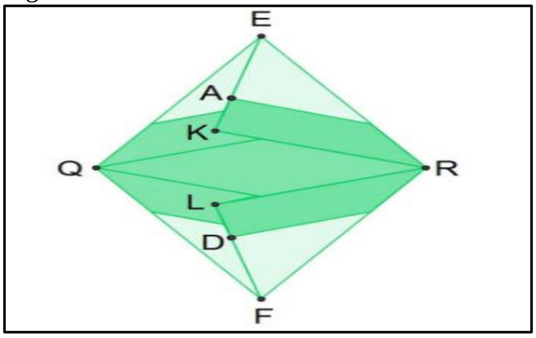
Figura 48 - Passo 7



Fonte: Autora, 2022.

Passo 8 (Figura 49). Abra a folha em torno do segmento EF, colocando os vértices K e L por cima dos vértices M e N.

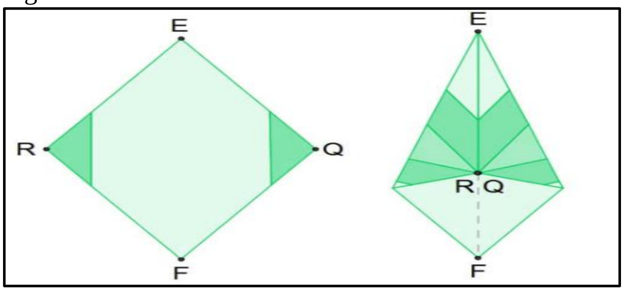
Figura 49 - Passo 8



Fonte: Autora, 2022.

Passo 9 (Figura 50). Vire a folha. Dobrar os vértices Q e R sobre o segmento EF.

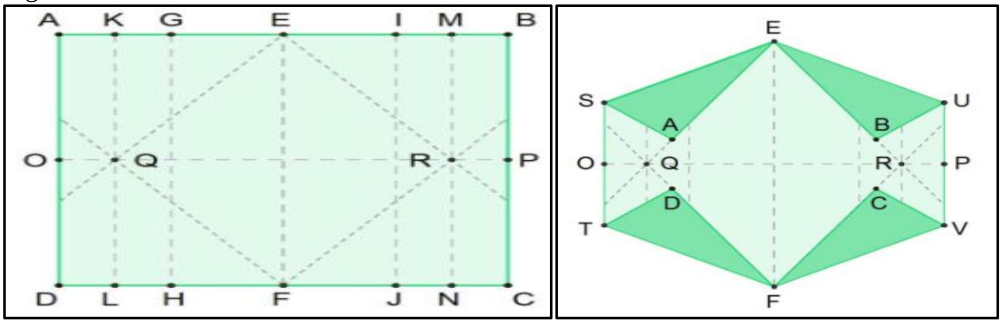
Figura 50 - Passo 9



Fonte: Autora, 2022.

Passo 10 (Figura 51). Abrir totalmente a folha e observar os vincos formados, dobrar o vértice A sobre o segmento EQ, o vértice B sobre o segmento ER, o vértice C sobre o segmento FR e o vértice D sobre o segmento FQ, obtendo os novos pontos S, T, U e V.

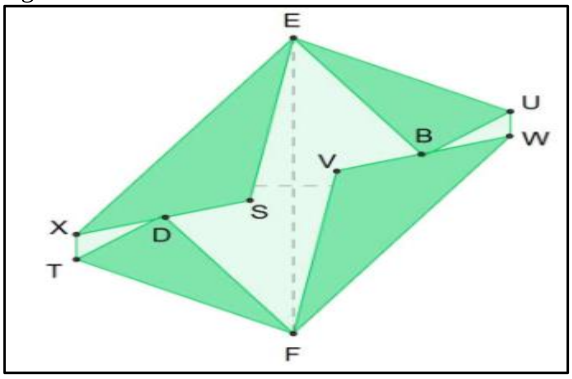
Figura 51 - Passo 10



Fonte: Autora, 2022.

Passo 11 (Figura 52). Dobrar o vértice S em torno do segmento EQ e o vértice V em torno do segmento FR. Marcar os pontos X e W.

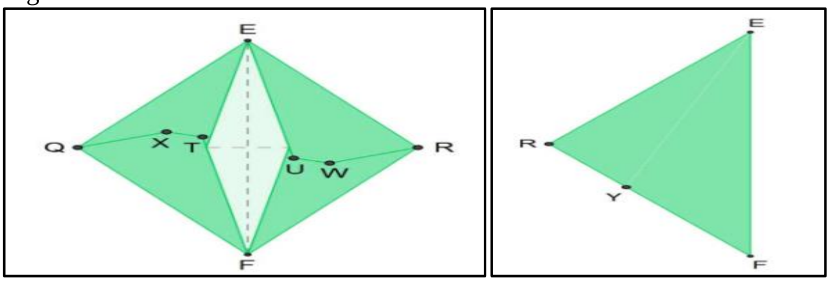
Figura 52 - Passo 11



Fonte: Autora, 2022.

Passo 12 (Figura 53). Dobrar o vértice U em torno do segmento EB e o vértice T em torno do segmento FD, para finalizar dobra-se o vértice R sobre o vértice Q. Observar um segmento com início no vértice E e marcar o ponto Y no final do segmento.

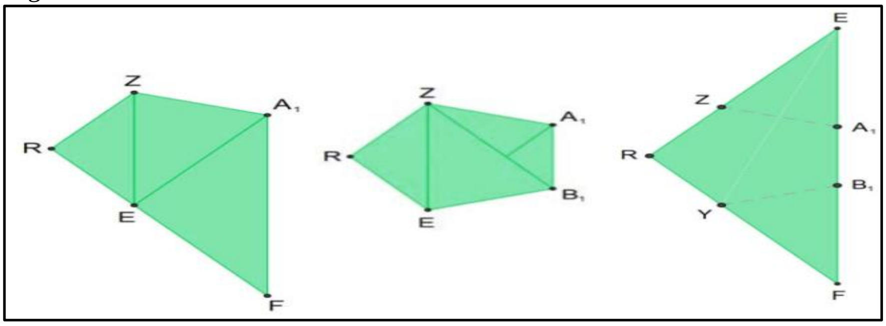
Figura 53 - Passo 12



Fonte: Autora, 2022.

Passo 13 (Figura 54). Dobrar o vértice E sobre o ponto Y e o marcar os pontos Z e A1. Em seguida dobrar o vértice F sobre o ponto Z e marcar o ponto B1. Marcar os vincos. O pentágono ZRYB1A1 servirá como as faces do dodecaedro regular e os triângulos EZA1 e FYB1 serão as abas para encaixe.

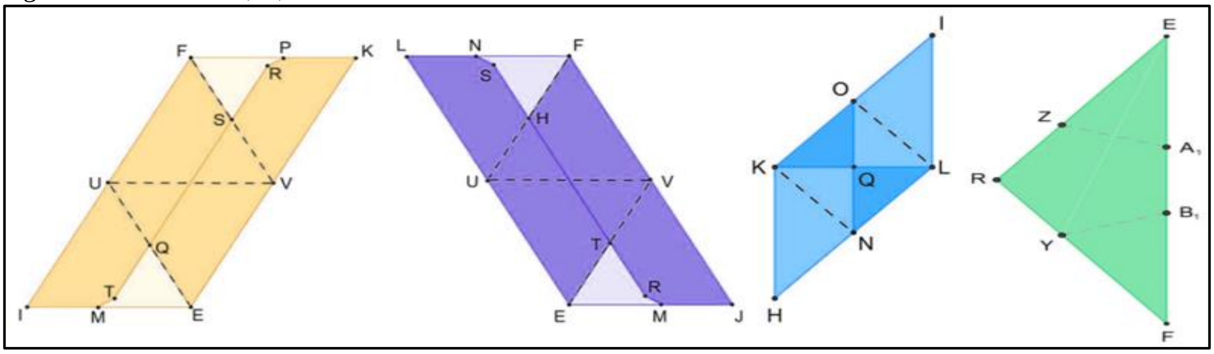
Figura 54 - Passo 13



Fonte: Autora, 2022.

Todos os módulos elaborados nesta seção, demonstrados na Figura 55.

Figura 55 - Módulos A, B, C e D



Fonte: Autora, 2022.

5 MONTAGEM DOS POLIEDROS REGULARES DE PLATÃO

A montagem dos poliedros exige uma certa paciência e destreza de quem vai montá-los, apesar de ser muito simples, pois tem que ser feito primeiramente uma planificação com os módulos de acordo com cada sólido a ser construído, devendo seguir algumas regras para os encaixes dos módulos.

Para que esse processo seja de fato instrutivo, dinâmico, prazeroso, com intuito de melhorar o desempenho e a aprendizagem matemática é que será explicado de forma bem clara o passo a passo dos encaixes dos módulos elaborados na seção, para a montagem dos poliedros de Platão. Se utilizarmos cores variadas nos módulos, mais bonito e atrativo será o resultado. Todos os módulos e poliedros aqui demonstrados nas fotos abaixo foram construídos e registrados pela autora.

Segue abaixo todos os passos de montagem dos poliedros regulares de Platão, numa sequência do primeiro ao quinto poliedro, sendo estes, tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, icosaedro regular e por fim, o último elemento o dodecaedro regular.

5.1 Tetraedro regular

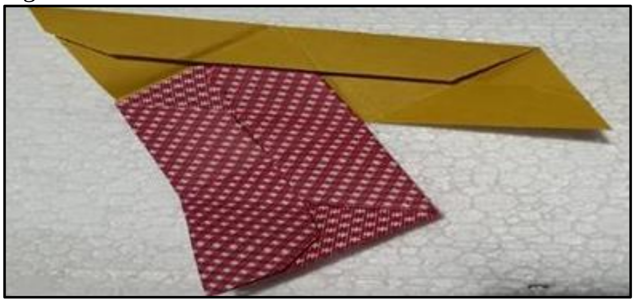
Para a montagem do tetraedro serão necessários módulos simétricos, sendo assim um será chamado de módulo A (seção 4.5.2) e o simétrico de módulo B (seção 4.5.3). Em cada módulo, os dois triângulos equiláteros centrais darão origem a duas faces do tetraedro e os dois triângulos equiláteros das extremidades serão as abas que se encaixarão em outros módulos (Figura 56).

Figura 56 - Módulos para a montagem do tetraedro, módulo A e B

Fonte: Autora, 2022.

Passo 1 (Figura 57). Inicie encaixando a extremidade de um módulo por dentro do segundo triângulo do outro módulo, conforme demostrado.

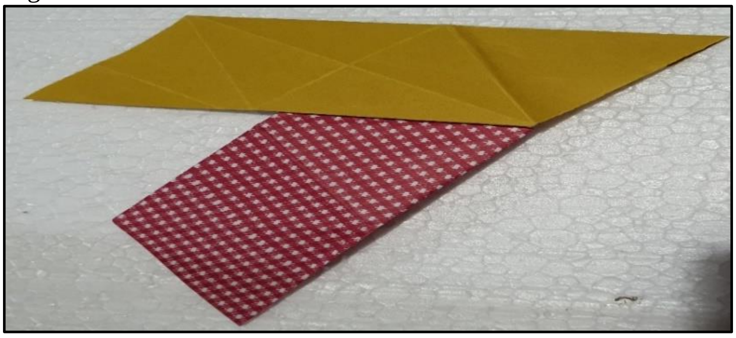
Figura 57 - Passo 1 – módulo A e B unidos



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 58). Vire os módulos encaixados:

Figura 58 - Passo 2 módulo A e B



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 59). Vire a extremidade de um dos módulos para dentro do outro e encaixe a aba mais próxima nele. Repita esse processo mais uma vez e o tetraedro estará formado. As abas dos triângulos externos sempre serão encaixadas por dentro nos triângulos internos.

Figura 59 - Passo 3 – Montagem do tetraedro

Fonte: Autora, 2022.

5.2 Hexaedro regular

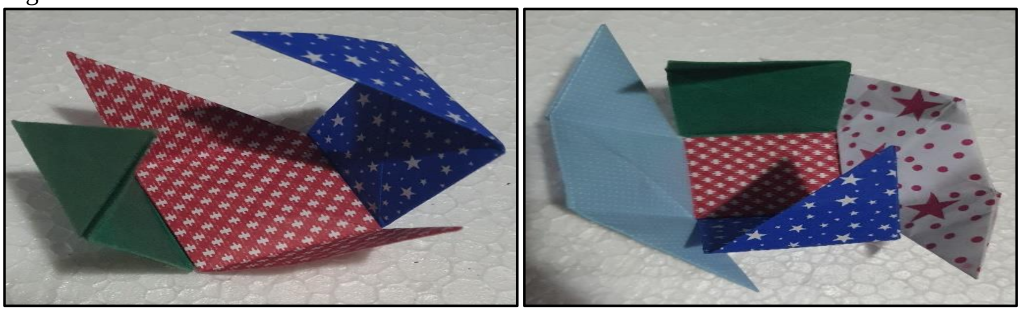
Para a montagem do hexaedro serão necessários seis módulos iguais (sessão 4.5.4). Em cada módulo, o quadrado central dará origem a uma face do hexaedro e os dois triângulos retângulos das extremidades serão as abas que se encaixarão em outros módulos (Figura 60).

Figura 60 - Módulos para a montagem do hexaedro

Fonte: Autora, 2022.

Passo 1 (Figura 61). Inicie encaixando dois módulos em um terceiro, nas extremidades do quadrado central que não contém abas triangulares, em seguida encaixe um quarto módulo entre duas abas próximas como sequência abaixo.

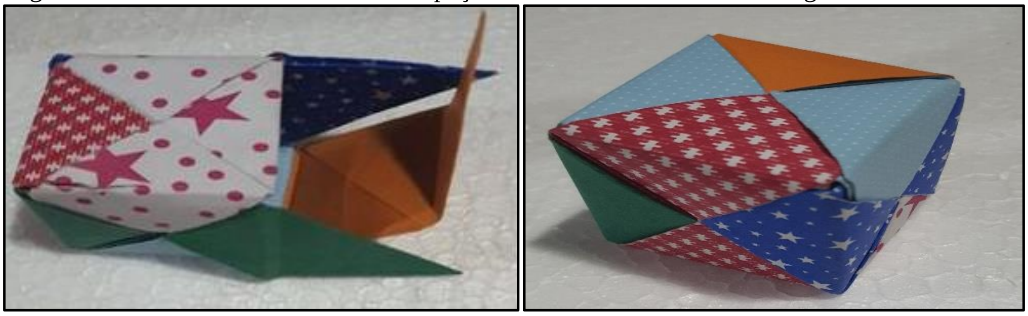
Figura 61 - Passo 1



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 62). Prossiga encaixando os dois módulos que sobraram para formar o hexaedro.

Figura 62 - Passo 2 – encaixe da última peça e fechamento do Hexaedro regular



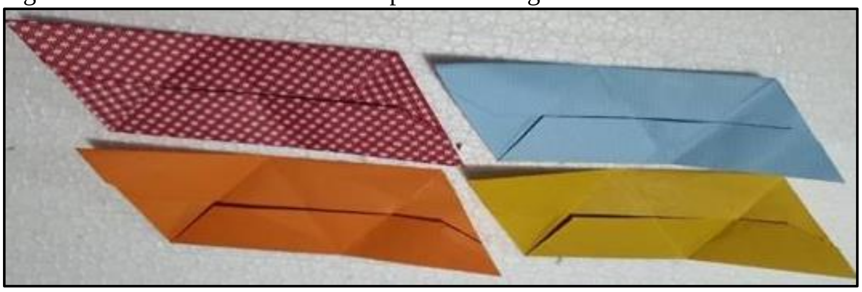
Fonte: Autora, 2022.

5.3 Octaedro regular

Para a montagem do octaedro serão necessários quatro módulos A, 4 módulos B ou dois módulos AA e BB (seção 4.1.1.1). Em cada módulo, os dois triângulos equiláteros centrais darão origem a duas faces do octaedro e os dois triângulos equiláteros das extremidades serão as abas que se encaixarão em outros módulos.

Para formar o octaedro serão feitas duas pirâmides de base quadrada e, em seguida, elas serão encaixadas (Figura 63).

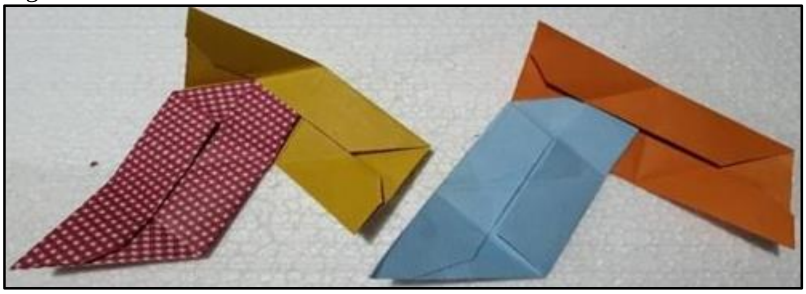
Figura 63 - Módulos de faces A e B para a montagem do octaedro



Fonte: Autora, 2022.

Passo 1 (Figura 64). Inicie encaixando um módulo no segundo triângulo equilátero de outro módulo. Repita esse procedimento com dois outros módulos para elaborar as duas pirâmides de bases quadradas simultaneamente.

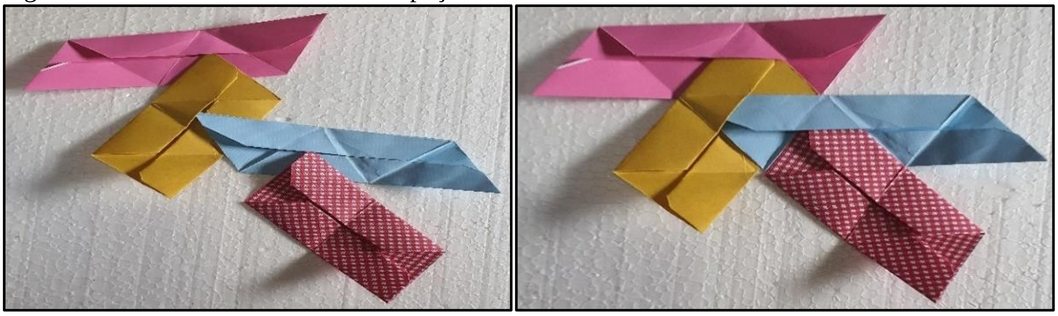
Figura 64 - Passo 1 – Dois módulos A e B encaixados



Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 65). Introduza os módulos como indicado na figura abaixo. Inicie pelos idênticos, encaixe as pontas, de modo a obter vértices com quatro arestas.

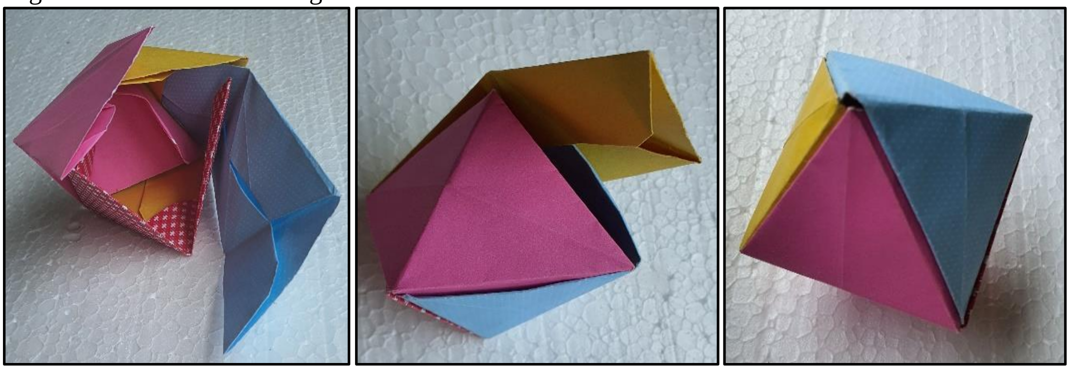
Figura 65 - Passo 2 encaixe com duas peças simétricas AA e BB



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 66). Realize os encaixes formando uma figura tridimensional, fechando enfim, seu octaedro (poliedro regular com oito faces triangulares).

Figura 66 - Passo 3 – Montagem do octaedro

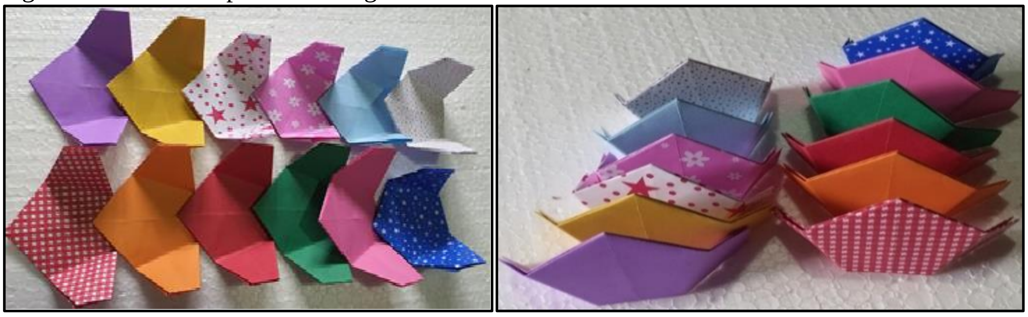


Fonte: Autora, 2022.

5.4 Dodecaedro regular

Para a montagem do dodecaedro serão necessários doze módulos (4.5.5). Em cada módulo, o pentágono central dará origem a uma face do dodecaedro e os dois triângulos das extremidades serão as abas que se encaixarão em outros módulos (Figura 67).

Figura 67 - Módulos para a montagem do dodecaedro



Fonte: Autora, 2022.

Passo 1 (Figura 68). Posicione quatro módulos como na imagem e, em seguida, encaixe os dois horizontais nos dois verticais:

Figura 68 - Passo 1

Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 69). Encaixe mais dois módulos nas aberturas dos módulos horizontais

Figura 69 - Passo 2

Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 70). Selecione mais um módulo e encaixe, ao mesmo tempo, em duas abas de dois módulos vizinhos. Repita esse procedimento com todos os módulos restantes para obter o dodecaedro.

Figura 70 - Passo 3

Fonte: Autora, 2022.

5.5 Icosaedro Regular

E por fim, para montarmos o icosaedro, serão necessários 5 módulos A e 5 módulos B, pode-se usar a mesma cor ou cores variadas, para destacar cada face e facilitar a identificação, da forma que preferir.

Damos início com duas cores distintas, A e B, encaixando as duas, e repetiremos o processo encaixando as peças A em B e depois B em A, e assim sucessivamente, como sugestão a fim de facilitar a montagem pode ser colocada fita adesiva nos encaixes na parte interna.

Após esse processo, teremos todas as peças encaixadas teremos uma peça com um formato cilíndrico.

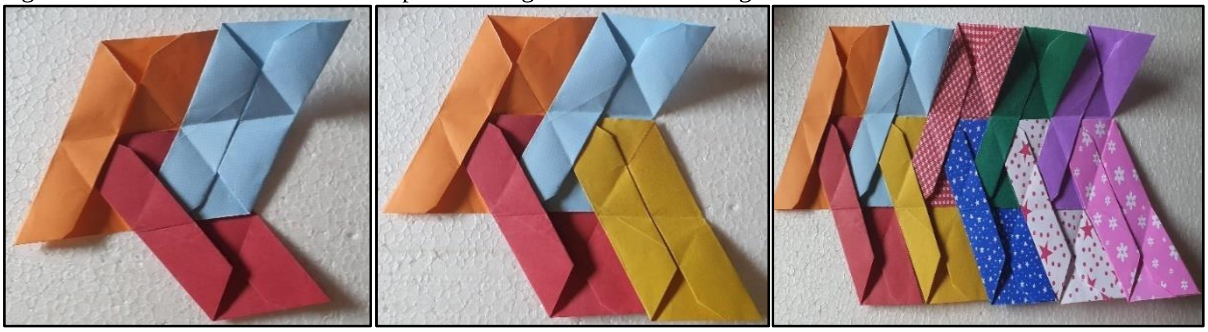
Passo 1 (Figura 71). Confeccionar 10 peças triangulares, sendo 5 do módulo A e cinco de módulo B.

Figura 71 - Passo 1 – Módulos A e B para montagem do Icosaedro regular

Fonte: Autora, 2022.

Passo 2 (Figura 72). Introduza os módulos como indicado na figura abaixo iniciando os encaixes pelos módulos simétricos e assim sucessivamente até que tenham todos encaixados.

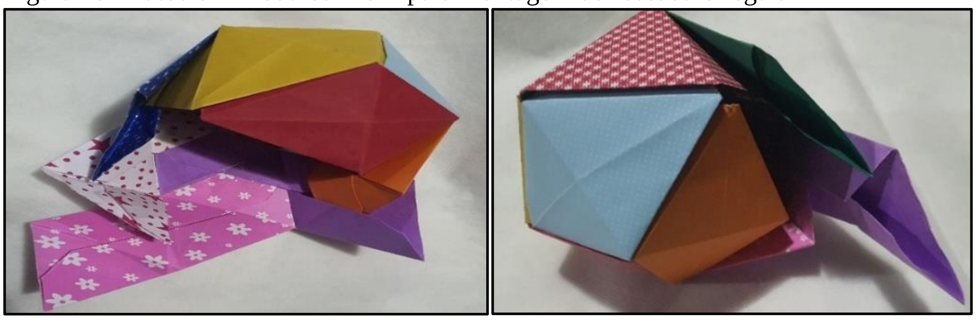
Figura 72 - Passo 2 – Módulos A e B para montagem do Icosaedro regular



Fonte: Autora, 2022.

Passo 3 (Figura 73). Encaixe as pontas de modo a obter vértices com cinco arestas, encaixe as pontas restantes formando assim o seu icosaedro (poliedro regular com vinte faces triangulares).

Figura 73 - Passo 3 – Módulos A e B para montagem do Icosaedro regular



Fonte: Autora, 2022.

Temos enfim, todos os poliedros de Platão construídos manualmente segundo as dobraduras apresentadas (Figura 74).

Figura 74 - Representação dos cinco poliedros de Platão

Fonte: Autora, 2022.

Ao utilizar desses materiais manipulativos estaremos mudando conceitos, treinando e preparando o educando para uma verdadeira aprendizagem matemática, tanto o Origami modular quanto o software que será apresentado abaixo e utilizado nesta pesquisa, vem exigir dos sentidos (tato, visão e audição), o Origami na construção dos módulos e montagem dos sólidos de Platão, já o software, para manipulação e visualização em três dimensões, sendo ambos utilizados ao apoio de resolução de atividades propostas, sugeridas no decorrer das aulas para fixar conceitos, desenvolvido com um bom planejamento, tendo objetivos claros e concisos, podendo ser uma ferramenta vantajosa na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, pois, segundo Almeida (2000, p. 27):

> A importância do material manipulativo advém do fato de que o aluno ao confeccionar ou manusear os modelos fica com um grau maior de relacionamento com o modelo porque este foi visto em diferentes etapas e ângulos, permitindo-lhe, portanto, identificar melhor os relacionamentos e as propriedades do modelo.

Verifica-se então a importância do educando nesse processo do fazer, do pôr a “mão na massa” como diz o ditado popular, neste trabalho com o Origami e o software Poly Pro, o aluno terá a oportunidade de confeccionar o seu modelo concreto que irá lhe auxiliar na compreensão de conceitos, inferências e conjecturas resultantes do intercâmbio entre o abstrato (conceitos) e seus modelos concretos.

5.6 Softwares Educacionais

Em estudos sobre esse tema pode-se descobrir que há uma diferença entre “*Software* Educacional” e “*Software* utilizado na educação”, cujo primeiro termo referencia-se a fins pedagógicos, visando apoio ao processo de aprendizagem, de uma determinada área de conhecimentos e de um determinado conteúdo. Já os *softwares* utilizados na educação, é um conjunto de recursos informáticos, desenvolvidos para os mais variados objetivos podendo ser usados em um contexto de ensino e aprendizagem, tais como: A Internet; Editor de textos; Planilhas eletrônicas entre outros, não podendo ser enquadrado na categoria de software educacional, porém, o que confere a este software ter ou não caráter de ferramenta educacional é a sua utilização no processo de ensino e aprendizagem, sabendo que hoje existe uma gama de Softwares educacionais para cada área especifica como Português, Geografia, Ciências, Matemática entre outras.

Tendo em vista todo esse contexto tecnológico, todas essas ferramentas computacionais em nosso meio, fazendo parte de nosso dia a dia e também criadas para a educação é que se verifica a necessidade cada vez maior de desenvolver novas práticas pedagógicas fazendo a inserção dessas ferramentas tecnológicas para essa a nova realidade, pensando assim é que se propõe nesse trabalho o uso do software educativo Poly Pro no intuito de buscar melhorias na produção de conhecimento matemático dos alunos como uma alternativa que faça sentido as aulas de Matemática no que diz respeito aos Poliedros regulares, sendo significativas e cada vez mais atrativas.

No entanto, o professor precisa conhecer os recursos disponíveis dos programas escolhidos para suas atividades de ensino, somente assim ele estará apto a realizar uma aula dinâmica, criativa e segura de modo responsável para estabelecer as possibilidades dos desafios e restrições do novo meio educacional, além de atentar para o desenvolvimento de conceitos e estratégias didáticas adequadas para atingir o objetivo proposto.

A ferramenta computacional deve ser utilizada como um ponto de apoio aos alunos para que possam aprender em cooperação um com o outro e desenvolvam suas habilidades. É necessário que o professor se prepare para conhecer e analisar os softwares educacionais (BRASIL, 1998).

Na *internet* é possível encontrar uma variedade desses *softwares*, sendo que a escolha do *software* a ser utilizado nas aulas, [...] deve ser baseada nos conceitos, preconceitos, informações, conteúdos, concepções de aprendizagem, pressupostos pedagógicos que estão implícitos no mesmo, comparando e analisando se esses aspectos correspondem ao objetivo que o professor quer atingir, às necessidades dos alunos e a didática de ensino (RODRIGUES, 2006, p. 31).

Deve-se então, ser levados em consideração pelo professor todas essas colocações sobre uso de softwares educacionais em suas aulas, para que este seja um elemento que venha motivar e ao mesmo tempo desafiar o surgimento de novas práticas pedagógicas, tornando o processo ensino-aprendizagem uma atividade inovadora, dinâmica, participativa e interativa de maneira a auxiliar na produção do conhecimento matemático já que às habilidades a serem desenvolvidas com auxílio dos softwares educacionais, são mencionadas na literatura, entre elas: criatividade, concentração e motivação.

5.6.1 Software para o Ensino de Geometria

O ensino de Matemática vem sendo por muito tempo ensinada de forma desprovida de significado e interesse ao educando, pois desde a antiguidade até os dias atuais se insiste em utilizar meramente a lousa, o livro didático, lápis, papel, régua e compasso como instrumentos utilizados para o ensino de geometria, sendo essas estáticas.

Deve-se perceber que o uso da tecnologia há bastante tempo vem contribuindo em várias áreas do conhecimento, inclusive na educação matemática. Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio–PCNEM, aconselham o uso das tendências metodológicas no processo de ensino e aprendizagem de qualquer que seja o conteúdo trabalhado no Ensino Médio (BRASIL, 2000). O uso do software educativo é uma entre essas tendências, utilizadas como procedimento metodológico, tornando as aulas menos tradicional, prazerosa e dinâmica. Sendo assim, é essencial que o educador se qualifique nesse meio tecnológico, para que as utilizem com mais propriedade em suas atividades pedagógicas.

De acordo com Silva e Penteado (2013), é cada vez maior o número de *softwares* que possibilitam que professores saiam desse ciclo de aula expositiva, exercícios e correção na lousa. Dentre os *softwares* encontrados como recursos didáticos para aulas de Matemática cita-se alguns como: o Geogebra, o Poly Pro, Cabri 3D e o Wingeom sendo bem promissores. Estes terão uma breve caracterização no Quadro 9.

Quadro 9 - Descrição de alguns softwares para o ensino de geometria espacial

Geogebra	O Geogebra possui duas janelas de trabalho: a janela geométrica e a janela de álgebra. A janela geométrica é o local onde os objetos são construídos. Nela, é possível colorir figuras, aumentar a espessura das linhas, medir ângulos e distâncias, habilitar coordenadas cartesianas e polares etc. (SILVA; PENTEADO, 2013, p. 3) • Windows • Linux
Poly Pro	Permite a investigação de sólidos tridimensionalmente com possibilidade de movimento, dimensionalmente planificação e de vista topológica (Edumatec, 2020) • Windows • Shareware
Cabri 3D	Permite a investigação de sólidos tridimensionalmente com possibilidade de movimento, dimensionalmente planificação e de vista topológica. Possui uma grande coleção de sólidos, platônicos e arquimedianos entre outros (SILVA, 2006, p. 40) • Windows • Freeware
Wingeom	Software que permite construções geométricas bidimensionais e tridimensionais (Edumatec, 2020) • Windows • Freeware.

Fonte: Autora, 2022.

Todos os *softwares* aqui apresentados, são muito interessantes, e com uma vasta possibilidade de usos, porém, o Geogebra, o Cabri 3D e o Wingeom é necessário um pouco mais de conhecimento geométrico e uso do software, pois, a figura é construída pelo usuário exigindo assim, muito mais tempo e preparo do professor para utilizá-lo e ensinar o aluno.

Partindo desse pressuposto, optou-se pelo uso do software Poly Pro, cujo diferencial em relação aos demais, é que este é de fácil manuseio, podendo ser utilizado, desde as séries iniciais ao ensino médio, pois suas figuras já estão prontas para visualização de maneira bem dinâmica, a interface principal desse software tem uma área de interação que apresenta três partes de comandos, barra de ferramentas com menus de pesquisa, barra de ferramentas onde exibe os sólidos na tela e a terceira mostra a configuração, exibição e manipulação dos sólidos, podendo com simples comandos, rotacionar para abrir demonstrando a planificação e fechá-las formando os sólidos geométricos, dentre outras possibilidades.

Este é voltado inteiramente à geometria plana e espacial, suas ferramentas auxiliam bastante na apresentação do conteúdo de Poliedros no Ensino Médio, sua potencialidade varia conforme a criatividade do professor para trabalhar abrangendo todos os poliedros, como os prismas, sólidos Platônicos, sólidos de Arquimedes, esferas geodésicas, entre outros, como já mencionado, a interface gráfica do *software* Poly Pro é muito simples, basicamente uma janela e um quadro de comandos. Quando se realizam as escolhas no quadro de comandos aparece desenhado na janela o poliedro desejado e no modo escolhido (tridimensional ou planificado) sendo bem atrativo para quem está começando a fazer o uso de softwares educativos.

No entanto, o professor deve fazer uma análise dos softwares educativos que surgem, para escolher o que melhor lhe convier e que desenvolva um melhor desempenho dos alunos nas aulas, de acordo com o assunto a ser estudado, com a realidade em que este está inserido ou nível de aprendizagem, sendo um agente transformador, modificando suas ações pedagógicas e se capacitar para assumir o papel de mediador na construção do conhecimento, pois essa nova informatização é característica dos tempos atuais que traz consigo inúmeras vantagens por serem atraentes, diversificada e atingir a grande massa inserida ao mundo tecnológico.

Freire (1996, p. 79) diz que “mudar é difícil, mas é possível”, é necessário que o professor se comprometa em sua ação político-pedagógica. O professor de hoje precisa se renovar e andar junto a crescente onda da tecnologia, inovando para aprender e ensinar, se não se aprende tampouco se ensina.

Sabe-se que o ensino tradicional tem sua contribuição, não se trata de abandoná-lo, no entanto, não se podem deixar o educando de hoje à margem de um processo de ensino aprendizagem que não irá contribuir com seu crescimento, fazendo necessário novas alternativas e novas ferramentas de apoio a uma aprendizagem significativa que favoreça o desenvolvimento cognitivo do educando, estimulando a autonomia através do raciocínio, reflexão e criatividade. O Quadro 10 mostra as principais diferenças de uma abordagem para outra.

Quadro 10 - Diferenças entre uma aula tradicional, com o uso do Origami e do software Poly Pro

Aula tradicional (lápis, régua, lousa)	**Utilizando dobradura com o origami (folha de papeis)**	**Utilizando o software Poly Pro (smartfone, tablet e computador)**
Figura estática Dificuldade de desenhar os poliedros tanto do professor quanto do aluno.	Dinâmico e evolutivo Manipulativo, palpável, visual.	Possibilidade de rotação das figuras. Possibilidade de melhor visualização dos poliedros.
Ensino Focado no livro didático.	Ensino Focado na produção e manipulação.	Inserção de mais recursos didáticos.

Fonte: Autora, 2022.

D' Ambrósio (2012) afirma que há maior capacidade para resolver problemas novos, quando é possível ter acesso a mais instrumentos e técnicas intelectuais e quando é feita uma contextualização correta. A capacidade de explicar, aprender e compreender criticamente situações novas é aprendizagem por excelência.

Esse trabalho vem em busca dessa aprendizagem com a utilização do software Poly Pro 1.12, para inovar trazendo para sala de aula perspectivas diferentes, uma nova ação metodológica para trabalhar e ensinar Matemática, especificamente a Geometria dos Poliedros de Platão, portanto, espera-se que este não venha apenas motivar, mas, proporcionar aos alunos uma construção de conhecimento autônomo.

5.6.2 O software Poly Pro

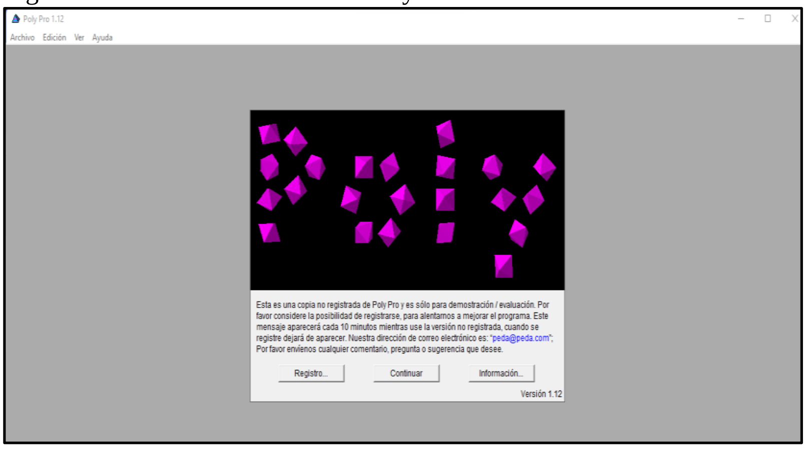
O software educacional escolhido para ser utilizado neste trabalho é o Poly Pro na versão 1.12, o Poly Pro é um software educativo para a criação e exploração de poliedros, é possível fazer movimentos rotacionais manipulando os objetos, dobrando, desdobrando e assistir a uma movimentação automática destes, estimulando a percepção espacial do educando e permitindo o aprofundamento e consolidação do conhecimento matemático.

O Software Poly Pro ainda permite uma visualização privilegiada dos sólidos geométricos, análise e estudo de formas poliédricas, além de manipular, girar e planificar as imagens exibidas em de três maneiras: incorporação topológica no plano (planificação), forma achatada (bidimensional) e a formação do sólido geométrico (imagem tridimensional). As imagens podem ser impressas para os estudantes usarem em sala de aula, facilitando a visualização para contagem de faces, arestas e vértices dos poliedros, desenvolvendo a relação de Euler.

O software Poly Pro 1.12 foi desenvolvido em 4 de abril de 2012, está disponível para download em diversos sites da internet. A versão utilizada nesta proposta foi baixada do endereço eletrônico: http://www.peda.com/poly , Poly Pro é um shareware (Programa que funciona por tempo determinado de forma gratuita ou apresenta limitações, depois precisa ser comprados), ou com finalidade de avaliação, orientando que deverá ser feito um registro para utilização, este, foi criado por Johnson e Catalán, entre outros, da empresa *Pedagoguery Software*, e se apresenta em vários idiomas, porém como ainda não há uma versão em português optou-se por utilizá-lo na versão espanhol que se assemelha ao português.

Para usar as ferramentas disponíveis neste software não necessita de uma leitura fluente do idioma adotado pois o usuário consegue compreender o significado dos poucos termos utilizados para visualizar as figuras, ao abri-lo pela primeira vez é visualizado a seguinte imagem (Figura 75).

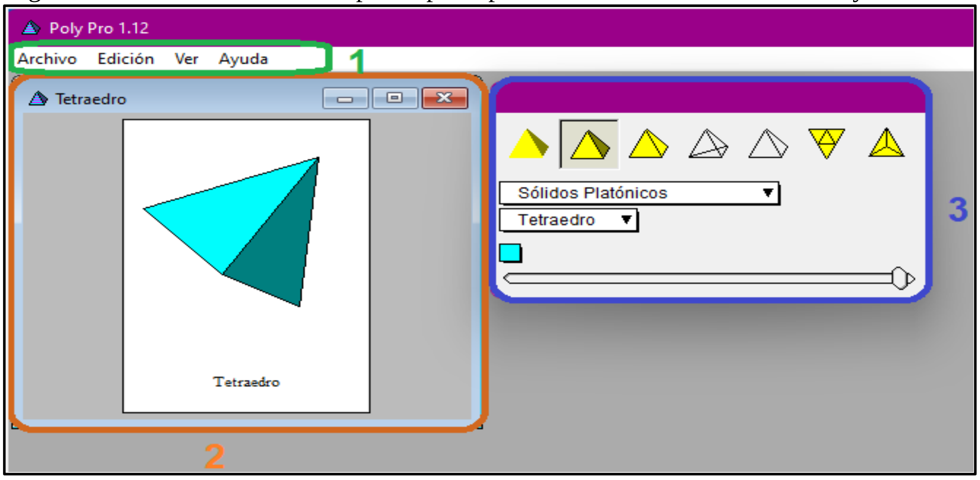
Figura 75 - Interface do Software Poly Pro 1.12



Fonte: Figura retirada do Poly Pro 1.12 pela autora, 2022.

Para dar início deve-se clicar no botão “Continuar”, este será aberto na tela inicial do Poly Pro, onde vem representando as três partes principais como demonstrado na figura abaixo (Figura 76).

Figura 76 - Tela inicial com três partes principais de comandos do software Poly Pro 1.12



Fonte: Retirada do Poly Pro pela autora, 2022.

A tela da Figura 76 foi demarcada com a numeração de 1 a 3 para facilitar a compreensão das funções básicas do Poly Pro, das quais serão explicadas nessa ordem:

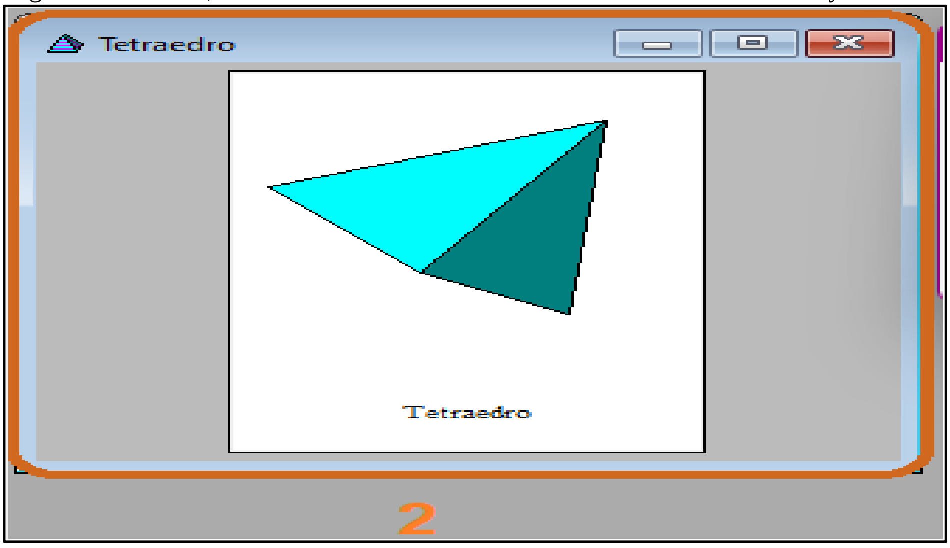
A parte de número 1 é a barra de ferramentas do *software*. A barra de ferramentas é composta por quatro menus, sendo eles: *Archivo*, *edición*, *ver e Ayuda*. Os menus *Archive*, *Edicíon*, *ver* e *ayuda* são equivalentes aos existentes em programas como editores de texto e desenho.

O primeiro menu é chamado *Archivo* (em português significa arquivo), o segundo *edición* (em Português significa editar), no terceiro *ver* (em Português significa visualizar) e no quarto *Ayuda* (em Português significa ajuda).

Seguimos com a parte de número 2, demonstrada na Figura 76. Nesta é exibida o poliedro escolhido para trabalhar as atividades de investigação, acima da imagem aparece uma barra com o nome do poliedro apresentado e com as opções de minimizar, aumentar e fechar a imagem.

Cabe destacar que, na tela principal, é possível exibir vários poliedros ao mesmo tempo, assim como manipulá-los, ou seja, ao clicar com o mouse em cima da imagem e mover, o poliedro se move acompanhando o movimento do mouse (Figura 77).

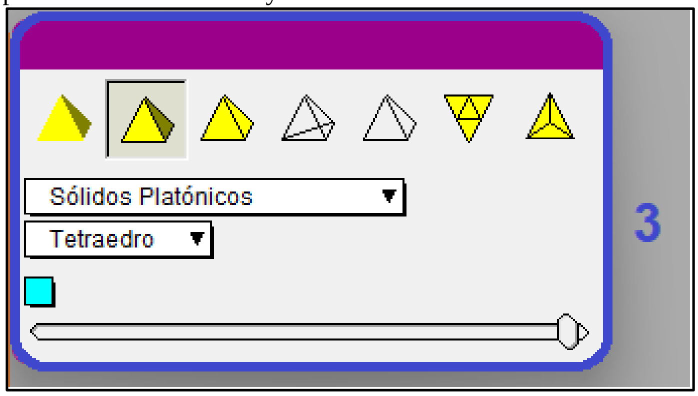
Figura 77 - Parte 2, barra de ferramentas onde exibe os sólidos na tela do Poly Pro 1.12



Fonte: Retirada do Poly Pro 1.12 pela autora, 2022.

Na parte de número 3 (representada pela Figura 78), estão as ferramentas necessárias para configuração, exibição e manipulação do poliedro com que se está trabalhando.

Figura 78 - Parte 3, configuração, exibição e manipulação do poliedro no software Poly Pro 1.12



Fonte: Retirada do Poly Pro 1.12 pela autora, 2022.

As figuras (desenhos) demonstradas acima como: pirâmides e os triângulos amarelos são os botões para escolha do modo de exibição do poliedro. Entre os botões dispostos na parte 3, há a possibilidade de escolha entre representar os poliedros em três dimensões, mostrando ou não as arestas, de forma planificada ou em duas dimensões.

As duas barras de ferramentas, colocadas logo abaixo das figuras em amarelo, são, respectivamente, para escolha da categoria e tipo de poliedro a ser exibido. Na Figura 78, parte 3 exposta acima, a escolha foi feita por um sólido de Platão do tipo tetraedro com escolha de cor azul claro.

Abaixo das barras de ferramentas é possível clicar no quadradinho azul ao qual exibe um painel de cores, podendo mudar a cor do poliedro e escolher uma cor entre tantas que existem.

Por último, observa-se uma barra de rolagem abaixo do quadradinho, com o mouse pode-se arrastar essa barrinha da esquerda para direita sendo possível abrir o poliedro até atingir sua forma planificada ou retornar esse poliedro à sua forma original.

O Poly Pro 1.12 é um software educativo da Geometria, que pode ser utilizado no Ensino Fundamental ao Ensino Médio, pois como explicado o passo a passo de suas funções, percebe-se que este é muito fácil de ser manuseado, sendo facilmente adaptado às aulas, apresentando recursos diferenciados que viabilizam a sua adequação por faixa etária e aos temas de Geometria.

Podemos encontrar e perceber os poliedros nos mais variados contextos, eles são perceptíveis em nosso cotidiano, como por exemplo: embalagens de produtos, nas formas de construções, artigos de decoração, material escolar, entre tantos outros, por isso a importância de inserir o software Poly Pro 1.12 como ferramenta para potencializar o estudo dos sólidos regulares de Platão, pois sua utilização em sala de aula irá permitir uma rápida e dinâmica visualização desses sólidos, para fazer com que o aluno entenda e o perceba sua relação com seu dia a dia desenvolvendo ainda outras competências matemáticas.

Ausubel (et al., 1980), assinala que cabe aos professores criar situações didáticas com a finalidade de fazer com que os educandos utilizem os seus conhecimentos prévios, para que sirvam de suporte na aquisição de novos conhecimentos.

O software Poly Pro 1.12 tem essa finalidade, este permite trabalhar diferentes objetivos, transmitindo aos educandos que aprender Matemática é um processo gradual, em que os conhecimentos prévios constituem recursos estruturantes para novos conhecimentos, e que todos são capazes de desenvolver o raciocínio matemático quando esses forem passados seguindo propósitos sólidos.

Para Oliveira (2014), explorar a visualização de sólidos pode não ser uma tarefa fácil, dessa maneira, o Poly se mostra como uma ferramenta que auxilia a entender a classificação e planificação de variados poliedros.

> Uma das principais dificuldades dos alunos ao aprender geometria espacial é a visualização dos sólidos no espaço. Dessa forma, é importante que os professores iniciem o estudo dos sólidos identificando as diferenças quanto ao formato e as características de seus elementos. Além disso, é importante que os alunos saibam fazer asplanificações para poderem calcular as áreas de suas superfícies sem memorizarem as fórmulas. Diante do exposto o software Poly é o mais indicado por permitir explorar sólidos de forma tridimensional com recursos de planificação e visão tecnológica (OLIVEIRA, 2014, p. 6).

Reflete-se que o uso das tecnologias na sala de aula para o ensino dos sólidos geométricos é algo que vem dando certo, os alunos se sentem motivados a aprender com a visualização das imagens na manipulação do software, pois uma das dificuldades de quando se ensina esses conceitos em sala de aula é sua visualização, com o Poly Pro é possível ver numa perspectiva tridimensional de forma dinâmica e colorida, que não o fariam com o livro didático ou até mesmo com os desenhos elaborados pelo professor no quadro negro, por isso acredita e espera-se que esta ferramenta venha ser uma grande aliada para potencializar o ensino dos sólidos de Platão, uma das metas dessa pesquisa.

6 PRODUTO EDUCACIONAL

Este produto educacional ao qual se intitula "Polygami: uma proposta para o ensino da Geometria dos poliedros de Platão com o uso do Origami modular e do software Poly Pro", disponível em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/743171, é um material a mais para auxiliar o professor, será então um paradidático, inserindo uma metodologia mais dinâmica de acordo com habilidades e orientações sugeridas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em sua prática pedagógica, tais quais: (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos e (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros entre outros.

A intenção é que, se atenda as reais necessidades dos alunos desta geração, com propósito de promover o ensino-aprendizagem de alguns conceitos de Geometria Plana e Espacial, propondo-se o uso do Origami Modular e do Software Poly Pro 1.12 nas aulas deste conteúdo, para construção e manipulação dos sólidos de Platão, com intuito de potencializar e dinamizar o aprendizado dos conceitos geométricos que os envolve.

Para tanto, considera-se necessário que o professor possua um material que o ofereça um suporte, pensando nisso, propõe-se a elaboração de um livro paradidático, com a intenção de proporcionar um apoio a esse profissional docente que se interesse em fazer o uso desses materiais manipulativos em suas aulas. Este PE, trará essas orientações que nortearão o passo-a-passo de cada dobradura sugerida, para construção das figuras geométricas e dos cinco sólidos citados, além da apresentação do software para manipulação e visualização destes, desde sua planificação aos sólidos em três dimensões.

Caso haja questionamento, mas por que um paradidático? Em resposta, Dante (2015, p. 324) retrata que "[...] os livros paradidáticos são escritos em estilo mais coloquial, abordam aspectos históricos interessantes, integram-se com outras áreas do conhecimento e não se restringem ao conteúdo matemático de determinado tema".

O livro paradidático recebe esse nome por ser uma escolha paralela aos materiais didáticos, este, aborda com mais detalhes e profundidade conteúdos vistos de forma superficial no livro didático, apoiando a realização de atividades curriculares e extracurriculares, ou seja, complementa o conhecimento adquirido pelos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem, que está em constante movimento, além de ampliar a conscientização e a relação interpessoal.

Assim, enquanto o livro didático guia o raciocínio do professor para a elaboração do plano de aula e para o ensino do conteúdo teórico e tradicional, o livro paradidático cria a relação entre o que é ensinado e a prática, de forma inovadora, dinâmica, e, muitas das vezes, relacionam a vida cotidiana do aluno.

O interesse de desenvolver o livro paradidático aqui idealizado, se deve ao fato desse tipo de material não se limitar ao conteúdo de um único tema e nem a um único ciclo de ensino, este, no entanto, vem auxiliar o professor, oferecendo a ele um apoio para complementar suas aulas em assuntos relacionados a Geometria, com material manipulável Origami modular e com Software educacional Poly Pro, possibilitando ao seu aluno um ensino de geometria mais dinâmica, atrativa e prazerosa, de modo a se envolver na prática para construção de figuras e sólidos geométricos, seguindo as orientações do professor, tornando-se um participante ativo na construção de conhecimento, por suas próprias mãos, indo além de teoremas e argumentações dedutivas.

As propostas didáticas aqui apresentadas, vem sugerir a utilização do Origami Modular para construção de figuras geométricas planas e espaciais, e, inserção do software interativo Poly Pro 1.12, possibilitando o uso das tecnologias de forma dinâmica, visto que esse, é de fácil manuseio e permite uma visualização privilegiada dos sólidos geométricos, análise e estudo de formas poliédricas, além de manipular, girar e planificar as imagens exibidas em três maneiras distintas: Forma planificada, bidimensional e tridimensional, para ampliar todos os conceitos já estudados.

Este livro paradidático, produto dessa dissertação, será organizado em cinco unidades:

- Unidade I: Um pouco de História: Geometria, Platão e Origami;
- Unidade II: Construção e classificação de Polígonos;
- Unidade III: Curiosidades do Tangram com o Origami;
- Unidade IV: Poliedros Regulares de Platão;
- Unidade V: Sólidos geométricos e a tecnologia.

Estas unidades, apresentarão uma sequência de atividades, com o uso dos recursos do Origami modular e o software Poly Pro. Atividades pensadas e sequenciadas para promover o ensino por meio da dinamicidade e interatividade proporcionada com uso da tecnologia e do material manipulativo.

Na unidade I está apresentado informações relacionadas ao contexto histórico do Origami e de Platão, fornecendo embasamento matemático para tratar de assuntos relacionados à Geometria. Lembrando que a cada abordagem dos conteúdos, serão oferecidas atividades a fim de sistematizar os procedimentos apresentados.

A unidade II foi dedicada a construção de polígonos regulares por meio do Origami, com instruções para construção de triângulos: equilátero, isósceles, escaleno e o triângulo retângulo, construção de triângulos especiais (Esquadros) escaleno e isósceles, construção de quadriláteros e do pentágono evidenciando algumas de suas propriedades.

Já a unidade III propõe a construção de um jogo de quebra-cabeças conhecido como Tangram cuja finalidade será proporcionar ao aluno um momento mais lúdico com desafios geométricos.

Na unidade IV será apresentado os cinco Poliedros Platônicos, eixo principal desta pesquisa, acompanhada das referências utilizadas para sua construção teórica.

Por fim, a unidade V vem retratar um pouco sobre o Software Poly Pro 1.12 e sua funcionalidade para fazer exploração e análise dos cinco sólidos de Platão presentes no referido software.

Em todas as unidades serão demonstrados um pouco de História com pequenos textos informativo referente ao assunto a ser tratado, acompanhado de uma tabela explicativa, contendo os diagramas e as orientações escritas sobre como cada dobra deve ser realizada, seguidas de um convite à dobradura gravadas pela autora e disponibilizado por meio de link de acesso, contendo o passo a passo de cada dobradura e montagem dos sólidos, será também, disponibilizado o link de acesso ao site para fazer download do software Poly Pro, e outro com uma breve descrição a respeito de suas funcionalidades e das características gerais do mesmo.

Como citado anteriormente, todas as unidades trarão propostas de atividades variadas e dinâmicas a fim de verificar e oportunizar a aprendizagem dos alunos, ofertando ao professor um material que o auxilie nas dobraduras e que, ao mesmo tempo, lhe traga sugestões a serem trabalhadas, que esses sejam úteis aos professores e suscitem o desejo de transformar as aulas de Matemática em encontros agradáveis.

As atividades aqui sugeridas aos professores foram idealizadas para alunos do 2º Ano do Ensino Médio, podendo ser adaptadas para multiplicar e fornecer resultados favoráveis em relação a aprendizagem e ensino de Geometria em outros contextos presentes no cenário educacional.

Destaca-se ainda, que este PE teve diagramação própria da autora, que anseia por sua compreensão e que ele venha ser para si plausível e agradável, algumas das personalizações apresentadas foram produzidas no Canva (plataforma de design gráfico online).

7 METODOLGIA DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, se fez necessário em primeiro lugar realizar pesquisas bibliográficas sobre o Origami (arte de dobrar papel) no intuito de aprimorar a técnica de dobraduras de papel para a confecção dos Poliedros regulares de Platão, além do recurso tecnológico Software Poly Pro, visando potencializar o ensino desse conteúdo de forma a contribuir com uma aprendizagem significativa, tornando o estudo dos Poliedros de Platão em algo mais atrativo e interessante para o aluno.

Pesquisou-se ainda, a teoria sociointeracionista de Vygotsky, utilizando-se desta, tanto para estruturar essa metodologia, quanto para nortear sua implementação em sala de aula, pois, tal referencial teórico educacional, demonstra, que, no processo de interação com o meio, os educandos participam desde o início das atividades construindo seu aprendizado com a participação dos colegas de classe, necessitando às vezes do auxílio de uma pessoa mais experiente (o professor), para chegar a uma conclusão sobre determinado assunto, sendo neste processo, um sujeito interativo, produzindo conhecimentos a partir de relações interpessoais e intrapessoais.

A proposta desta pesquisa foi apresentada a equipe pedagógica da Escola Francisco Mignone de Rio Crespo Rondônia do qual foi desenvolvida com os alunos do 2º Ano do Ensino médio. Esta pesquisa teve caráter qualitativo, pois, trabalhou com uma gama de significados, agentes movedores de inspirações, crenças, valores e atitudes, registrados com diálogos, diário de bordo registrado pelos alunos, bem como pelo professor pesquisador em todos os momentos desenvolvidos.

Esta pesquisa ainda tem cunho quantitativo por descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis através de dois questionários, um denominado "Questionário inicial" e outro "Avaliação diagnóstica I" ambos para verificar o interesse e conhecimento do aluno a respeito do tema tratado, cujos questionários também serviram como instrumentos de coleta de dados, na comparação entre as respostas dos questionários aplicados nos momentos inicial e final da sequência didática.

No inicial a fim de descobrir o conhecimento prévio do aluno a respeito do tema tratado e, no final, após a realização de todo desenvolvimento do projeto para aferir se houve um melhor desempenho dos alunos e ainda verificar a opinião deles sobre a proposta pedagógica mediada pelo professor com o apoio do software Poly Pro e construção dos sólidos regulares de Platão com o Origami modular, sendo todo processo registrado com fotos e gravações envolvendo a participação dos alunos.

Cada momento de aplicação teve-se o intuito de favorecer o desenvolvimento da zona de desenvolvimento proximal e da internalização do conhecimento, fazendo uso de instrumentos e signos correspondentes para que haja interação e discussão entre os grupos de alunos, proporcionando aos mesmos uma reflexão sobre os conceitos explorados, revendo e ampliando seus conhecimentos. Onde, o estudante assume um papel ativo no seu aprendizado, e o professor como mediador desse processo intervindo para a passagem dos conceitos espontâneos para os científicos e, ainda, que leve o aluno para a zona de desenvolvimento real.

O referido trabalho foi desenvolvido em três momentos:

- O primeiro momento, composto por quatro aulas, sendo duas com uma breve abordagem sobre conceitos de Geometria Espacial fazendo uso do livro didático, pincel e lousa para relembrar conceitos primitivos estudados e verificar o interesse destes em relação a aula tradicional, nesta, os alunos responderam dois questionários "Questionário inicial" e outro "Avaliação diagnóstica I" cujo intuito foi verificar sua compreensão e satisfação em relação a aula trabalhada. Dando sequência a esse momento, foi dado mais duas aulas diferenciadas das primeiras, sendo a explanação do mesmo conceito através de Slides e recursos audiovisuais, demonstrando os sólidos geométricos, fazendo relação a figuras planas, deixando claro o conceito de poliedros, sua classificação e seus elementos destacando a relação de Euler.
- O segundo momento teve-se o intuito de potencializar a aprendizagem de Geometria Espacial por meio da construção dos poliedros de Platão, fazendo uso de dobraduras de papel o Origami, de modo a contribuir com o desenvolvimento do raciocínio investigativo, aperfeiçoando seu pensamento cognitivo, por sua vez, trabalhando os conceitos matemáticos pertinente a cada atividade da dobradura, desenvolvendo a criatividade e a psicomotricidade do aluno. Esta foi executada em cinco etapas destinada a cada um dos poliedros regulares de Platão, sendo que, cada etapa corresponde a duas aulas de 50 minutos para cada sólido geométrico: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.
  - Para cada um destes poliedros foram realizadas as seguintes ações, na seguinte sequência:
  - Apresentou-se um breve histórico do filósofo matemático Platão e do Origami, a simbologia do papel, sua leitura universal (axiomas), assim como a sua relação com o ensino da matemática;

  - Formou-se grupos com número máximo de cinco alunos;
  - Amostra e entrega aos alunos do material a ser utilizado para construção do poliedro a ser aprendido;
  - Demonstração, pela professora, de como construir as dobraduras das peças a ser utilizada na construção de cada poliedro;
  - Composição (Planificação) das peças para construir o poliedro a ser aprendido;
  - Exemplos de aplicações do poliedro a ser construído;
  - Ao surgirem dúvidas por parte dos alunos de cada grupo para resolução de alguma etapa da atividade, estas eram refeitas pela professora ou por alunos voluntários, pois, esperava-se que a cada 2 aulas/oficinas os alunos aprendessem e conseguissem construir um poliedro regular de Platão, por isto, ao final de 10 aulas os alunos junto a professora pesquisadora produziram os cinco poliedros de Platão com toda explanação dos conceitos matemáticos que os envolve, podendo, a partir desse processo, conseguir resolver problemas que envolvam a geometria em várias atividades.
- No terceiro momento com duração de duas horas aulas, o aluno foi levado ao laboratório de informática da escola para fazer uso do recurso digital, explorar o software Poly Pro, o professor passou as instruções de como visualizar e manipular o mesmo, deixando que os alunos explorassem livremente os mais diversos sólidos que o software apresenta, interagindo uns com os outros de maneira cooperativa, sugeriu-se ainda, planificar os sólidos, verificar as propriedades e comprovar a relação de Euler, proporcionando uma colaboração mútua entre eles, contando sempre com a mediação do professor, na busca do conhecimento e das soluções dos problemas propostos.

Logo, o aluno fez uso dessa ferramenta para responder uma lista de exercícios já preparada anteriormente pelo professor com a finalidade de concluir o estudo, e a partir desse, perceber se houve mais empenho e satisfação do aluno ao fazer Matemática, enfim, se houve indícios de aprendizagem.

Para encerramento do projeto e comprovação desses indícios de aprendizagem foi feito uma mesa redonda, onde os alunos responderam aos pós questionário e fizeram exposição dos trabalhos (Cartazes alusivos ao tema e exposição dos poliedros de Platão feito por eles).

7.1 Local, cronograma e relato da metodologia aplicada em sala de aula.

A aplicação da sequência didática foi realizada na Escola Francisco Mignone, uma escola pública de ensino da rede estadual no município de Rio Crespo Rondônia, cuja instituição de ensino atende alunos em dois períodos, matutino e vespertino com o Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

A sequência didática proposta foi elaborada para alunos do 2º ano do Ensino médio e desenvolvida com a referente turma com o intuito de potencializar a aprendizagem de Geometria Espacial no que tange conceitos diretamente focados aos sólidos regulares, os chamados poliedros de Platão assim como mencionado na introdução desta pesquisa.

A referida sequência didática utiliza alternativas pedagógicas que coloca o foco do processo de ensino no aluno, envolvendo-o com atividades práticas para que este seja protagonista de sua aprendizagem, então, fez-se o uso de materiais manipuláveis (dobraduras), o Origami, para construção dos módulos, o estudo de seus axiomas e pôr fim a montagem dos sólidos de Platão, além da inserção de tecnologias digitais como slides, vídeos e uso do software Poly Pro, cuja exploração permite a visualização dos objetos na tela em 3D de forma concreta, vindo a ser uma metodologia a mais, ampliando a compreensão do aluno, pois a tecnologia tem sido atrativa aos olhos destes nessa era da informação.

Considerando que a Matemática que envolve esse conteúdo, ainda vem sendo trabalhada de forma tradicional, apenas com uso de quadro, pincel e livro didático, tratada de forma superficial focando apenas em problemas geométricos que privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração, cálculos dos quais os alunos não veem nenhum significado ou importância para sua vida.

Propõe-se então 16 aulas para uma turma de 2º ano do Ensino Médio envolvendo 25 alunos, estas foram elaboradas na forma de sequência didática tomando como apoio a teoria sociointeracionista de Vygotsky, que sugere uma interação com possibilidades de trocas de construção de conhecimentos, valorizando o contexto social do educando, sua relação com o outro, numa troca de experiencias com a mediação do professor pesquisador no intercambio e sistematização do conhecimento.

Esta proposta foi apresentada em 14 de março de 2023 a equipe pedagógica, direção da escola na Figura 79 e para os 25 alunos do 2º Ano do Ensino Médio, sendo 10 do período matutino e 15 do período vespertino, alunos que escolheram fazer parte da trilha de aprofundamento de Matemática, em conciliação fizeram parte dessa pesquisa, vale ressaltar que, 24 deles demonstraram satisfação e interesse em participar, levando o termo de consentimento aos responsáveis e, estes assinados, apenas um aluno não quis no momento, até perguntou a supervisão se era obrigado assinar o termo da professora pesquisadora, a este foi esclarecido que não, porém, com o passar dos encontros, desenvolvimento das aulas e produção dos sólidos, o próprio aluno pediu para assinar o termo, por estar gostando e aprendendo muito com a metodologia adotada.

Figura 79 - Apresentação do projeto de pesquisa a equipe pedagógica

Fonte: Autora, 2022.

A sequência didática foi dividida em três momentos, que foram aplicados no decorrer de março a junho de 2023, tendo ocorrido nas terças-feiras com duração de 50 minutos cada aula, demonstrado no Quadro 11 abaixo com divisão dos três momentos, descrições das ações realizadas, os recursos didáticos utilizados, data e o número de aulas correspondente a cada momento.

Quadro 11 - Descrição das ações da sequência didática

Descrição das Atividades			
Momentos	**Ações Realizadas**	**Recurso Didático**	**Data/Nº de Aulas 50 min.**
1º Convencional	Este encontro acontecerá em duas etapas: 1ª - Apresentação da proposta de trabalho. Definição de conceitos básicos, regate de conceitos, breve abordagem de geometria plana à espacial. Questionário inicial – conhecimentos prévios e satisfação em relação a aula. 2ª - Conceituar geometria espacial demonstrando os sólidos de Platão definindo seus elementos, sua planificação e relação de Euller.	Uso do livro didático, caderno, pincel e lousa - aula tradicional. Questionário digitalizado. Uso de slides e recursos audiovisuais – convencional.	14/03/23 15/03/23 –2 aulas. 15/03/23 21/03/23 – 2 aulas.

2º Manipulativo Origami	Este encontro será executado em cinco etapas destinada a cada um dos poliedros regulares de Platão, sendo duas aulas para cada sólido geométrico: Dobraduras e montagem do Hexaedro, Dobraduras e montagem do Tetraedro, Dobraduras e montagem do Octaedro, Dobraduras e montagem do Dodecaedro Dobraduras e montagem do Icosaedro. Continuação das dobraduras e montagem do Icosaedro.	Uso da dobradura o Origami modular com explanação de seus respectivos axiomas. Papel sulfite. Papel Color 7.	04/04/23 – 2 aulas. 11/04/23 – 2 aulas. 18/04/23 – 2 aulas. 25/04/23 – 2 aulas. 09/05/23 – 2 aulas. 16/05/23 + 2 aulas
3º Software Poly Pro	Este encontro acontecerá em duas etapas: 1ª - Conhecer a interface e as funcionalidades do software Poly Pro, para fazer exploração e análise dos cinco sólidos de Platão presentes no referido software seguidos de avaliação digitalizada. 2ª - Mesa redonda – Questionário final e Avaliação diagnóstica. Exposição dos trabalhos.	Uso da tecnologia – Software Poly Pro. Avaliação digitalizada. Questionário digitalizado. Mural, cartazes, poliedros	23/05/23 – 1 aula. 13/06/23 – 1 aula. 15/06/23 – Culminância a pedido da direção.

Fonte: Autora, 2022.

A aplicação da referida sequência didática seguiu o cronograma das atividades letivas em um itinerário formativo denominado “Trilhas de aprofundamento de Matemática e suas Tecnologias” que atende às recomendações apresentadas no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Estado de Rondônia, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, cujo conteúdo abordado faz parte do plano anual de curso da professora, que é a própria pesquisadora. Em função disso, ressalta-se que houve várias interrupções ao longo das aulas, interrupções que fazem parte do cotidiano da escola, como transmissão de recados, palestras aleatórias por parte da coordenação pedagógica, avaliações internas e externas, além de uma semana de formação continuada aos professores, dos quais interferiram no cronograma previsto e também no desenvolvimento de alguns momentos, tendo que readequar e continuar em outro momento, ou seja, em outra aula, desviando -se um pouco do que havia sido planejado, porém, estes aconteceram de maneira satisfatória e engrandecedora, segue-se abaixo detalhadamente todos os passos da metodologia adotada.

7.1.1 Descrição dos encontros

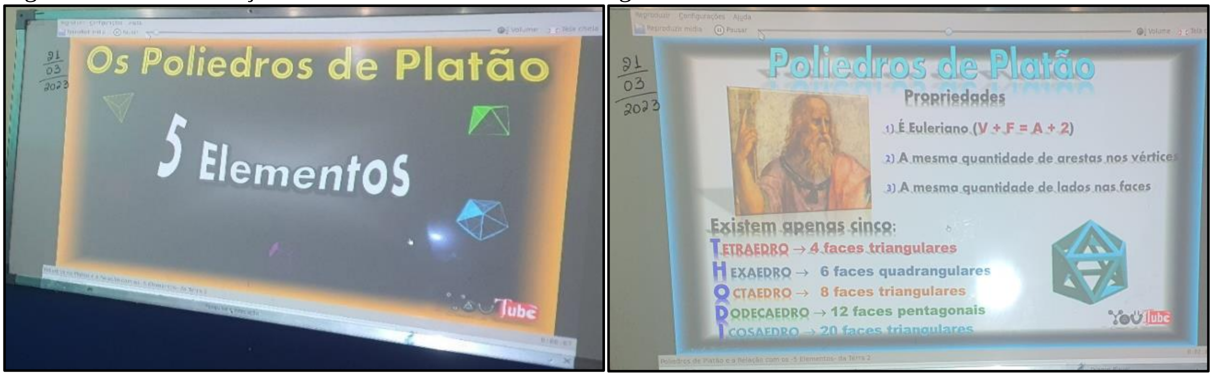
7.1.1.1 Primeiro momento – Convencional (15/03/2023 e 21/03/2023)

O primeiro momento dessa pesquisa teve como denominação, “momento convencional”, uma sequência didática preparada em duas etapas com 4 aulas de 50 minutos, no entanto, essa primeira iniciou-se com a apresentação da proposta de trabalho para a turma, explicando de forma breve como se daria a realização das atividades. Explanou-se a importância da participação, comprometimento e cooperação em grupo para o desenvolvimento dos trabalhos propostos pela professora pesquisadora, para a construção do seu próprio conhecimento. Foi ainda entregue aos alunos o Termo de Livre Consentimento para que fosse assinado pelos pais e/ou responsáveis (APÊNDICE A) e foram orientados a trazer na aula seguinte.

As duas aulas em si, foram sequencias didáticas com o uso do livro didático Conexões com a Matemática de Leonardo e Silva, caderno, lousa e pincel de forma bem tradicional fazendo uma breve explanação de conceitos introdutórios a geometria espacial, tópicos da Geometria Euclidiana para a introdução ao estudo de poliedros regulares, demonstrando seus elementos, sua classificação, relação de Euler e sua planificação, visualizando esses sólidos no livro e desenhados na lousa com algumas explanações pertinentes.

Após as duas aulas foi aplicado dois questionários, um denominado “Questionário inicial” e outro “Avaliação diagnóstica I” ambos para verificar o interesse e conhecimento do aluno a respeito do tema tratado (Apêndice B e C). Dando sequência a etapa, aplicou-se mais duas aulas, com uma revisão dos pré-requisitos necessários para a compreensão da Geometria Espacial, fazendo um breve relato da história que envolve os poliedros regulares de Platão, porém, estas foram explanadas de forma diferente das primeiras, usou-se slides demonstrativos para visualização dos poliedros e toda geometria envolvida, com perguntas variadas no decorrer das explanações de modo a envolver o aluno e prendê-lo a aula, vídeos contando um pouco da história de Platão, o porquê de só existirem 5 poliedros regulares com a demonstração da fórmula de Euler e a associação destes aos elementos da natureza. As Figuras 80 e 81 apresentam o material compartilhado:

Figura 80 - Demonstração e atividades sobre os sólidos regulares e os cinco elementos



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=t2Uv8xcqLEU>.

Figura 81- Videoaula sobre Platão e a relação entre os elementos dos poliedros

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=oSEwrglbqnI> e <https://www.youtube.com/watch?v=L8H8RAqwMMA>.

7.1.1.2 Segundo momento – Manipulativo – Origami (04/04/2023 à 16/05/2023)

O segundo momento denominado “Manipulativo – Origami” faz jus ao nome por ser um momento de aulas estritamente manipulativas, ou seja prática em forma de oficinas, com intuito de potencializar a aprendizagem de geometria espacial, por meio da construção dos poliedros de Platão, onde, o aluno teve papel fundamental na produção de conhecimento, com seu envolvimento e cooperação com o outro, fazendo uso da arte de dobrar papel que é o Origami modular, de modo que esse contribua com o desenvolvimento do raciocínio investigativo, aperfeiçoando seu pensamento cognitivo, por sua vez, trabalhando os conceitos matemáticos pertinente a cada atividade da (dobradura) dos polígonos regulares que envolve os sólidos de Platão, desenvolvendo a criatividade e a psicomotricidade do aluno.

Este segundo momento, foi executado em cinco etapas destinada a cada um dos poliedros regulares de Platão, sendo que, cada etapa correspondeu a duas aulas de 50 minutos para cada sólido geométrico: hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Nessa primeira e segunda aula do segundo momento, apresentou -se aos alunos um pouco de história sobre o Origami modular e seus axiomas, os tipos de módulos a serem dobrados e os tipos de papeis que podem ser utilizados para as dobraduras.

Iniciou-se com a explicação do passo a passo para a dobradura do módulo quadrangular para a construção do hexaedro, esclarecendo que para construir este sólido seria necessários seis módulos congruentes (seção 4.5.4). Para essas dobraduras foi escolhido o papel sulfite colorido, por esse ser mais fácil de dobrar e de recortar a partir dos vincos feitos no papel, além de ser de baixo custo, utilizou-se quatro cores diversas de modo a proporcionar um trabalho mais atraente.

Organizou-se os alunos com as carteiras em círculo, sendo entregues a cada um a quantidade suficiente de folhas para a construção dos módulos propostos, explicou-se que este módulo era o único feito com uma folha quadrada, para tal, a professora pesquisadora demonstrou aos alunos como retirar um quadrado da folha de sulfite com apenas uma dobra, após a retirada deste, foi explicado compassadamente todas as dobragens, seus axiomas e toda matemática envolvida como: Ponto, Tipos de retas, ângulos e demais tipos de polígonos de quatro lados.

Na primeira demonstração deste modulo já houve alunos que entenderam os passos com muita facilidade, alguns precisaram da mediação do professor, inclusive um deles disse “Não sei o que vai sair professora, eu tenho a mão muito pesada pra essas coisas!” outros recorreram aos próprios colegas que já tinham entendido todo processo, um deles estava nervoso pois não conseguia montar seu poliedro e queria saber o que estava saindo errado, já que, segundo ele, estava seguindo todos os passos como orientado, auxiliando-o descobriu-se que dois de seus módulos eram simétricos, sendo que para a montagem do hexaedro só é possível com os seis módulos congruentes, foi explicado o porquê do erro e refeito as peças.

Aproveitou-se essa observação para chamar a atenção da turma e dizer que, para se obter um resultado satisfatório, é necessário que as orientações sejam seguidas minuciosamente e que as dobras sejam executadas da forma mais perfeita possível, a troca de conhecimentos aconteceu tanto nas dobragens quanto para a montagem do sólido. Outra colocação foi “Agora começou a apertar as coisas! fazer figuras geométricas com dobraduras e montar as caixas vai ser de rachar o cabeção”.

Ao término desta aula oficina, orientou-se os alunos a manusear o sólido construído, levando-os a visualizar e compreender as relações matemáticas existentes, fazendo questionamentos sobre possibilidades. A Figura 82 demonstra como foi feito o trabalho na sala de aula nesse primeiro momento de prática com o Origami.

Figura 82 - Alunos no procedimento para dobraduras e montagem do Hexaedro

Fonte: Autora, 2022.

Na terceira e quarta aula do segundo momento, foi dedicado as dobraduras do módulo triangular para construção do tetraedro, apresentando os devidos axiomas e conceitos matemáticos que envolvem o triângulo, assim como a construção dos tipos de triângulos com as dobraduras, e por fim, a montagem do tetraedro demonstrando aos alunos os elementos do referido sólido.

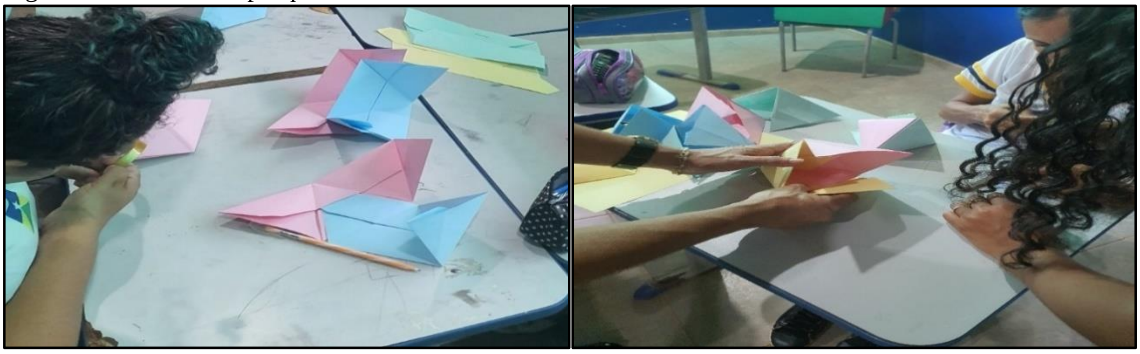
Para a dobradura desse módulo triangular usou-se a folha de sulfite inteira, pois esse se faz com o formato retangular, explicou-se que para a construção do tetraedro são necessários apenas dois módulos triangulares e simétricos, dos quais formam as quatro faces do poliedro citado.

Logo, em primeiro momento escreveu-se explicando na lousa o que seria feito, e que, precisariam de duas folhas de sulfite para confecção dos módulos e montagem do tetraedro, fez ainda algumas perguntas como: O que é um tetraedro? Porque recebe esse nome? Quantas faces, vértices e arestas tem o tetraedro? Foi orientado que utilizassem a fórmula de Euler em cada sólido.

Para a dobradura e montagem do tetraedro também se organizou os alunos em círculo e a professora frente a eles, de modo que tivessem uma boa visualização dos passos, a sugestão foi que cada um fizesse suas dobraduras e seu sólido de forma individual, podendo pedir auxílio ao professor e aos colegas caso não compreendessem na primeira demonstração. Este módulo exigiu muito mais dos alunos por ter muitas dobras, e, por necessitar de dobras diferentes para torná-lo simétrico (Sessão 4.5.3. Módulo B). Esse, provavelmente, foi o ponto mais crítico da oficina, pois, num determinado passo dobra-se o vértice superior direito e para o simétrico dobra-se o vértice superior esquerdo. Houve quem se confundisse e, neste instante, a professora fazia uma assistência mais individual.

Alguns alunos reclamaram de início por não estar conseguindo, mesmo em meio a algumas reclamações do tipo: “Meu Deus! Mal começou as dobraduras e já estou com dor de cabeça" todos conseguiram, uns fizeram na primeira explicação, outros, fizeram com a mediação do professor e de outros colegas, já para a montagem do sólido foi mais tranquilo, por este ser muito simples e por ser a junção de apenas duas peças. Assim como demonstram as imagens da Figura 83.

Figura 83 - Professora pesquisadora auxiliando os alunos



Fonte: Autora, 2023.

Na quinta e sexta aula do segundo momento, foi realizado os mesmos passos da aula anterior, pois, este foi dedicado a construção do octaedro regular, cujo sólido é construído com quatro módulos triangulares que formam as oito faces, podendo este ser construído com os quatro módulos congruentes, ou ainda com dois módulos congruentes (seção 4.5.2) e dois simétricos, (seção 4.5.3). Para essa oficina mudou-se a disposição das carteiras, colocou-se os alunos em grupos com três a quatro alunos, permitindo uma interação a mais entre eles e ajuda mutua para as dobraduras e montagem do poliedro.

Na turma do segundo ano matutino não houve dificuldade por parte deles para produção dos módulos, até pelo fato de já terem feito os mesmos módulos na aula anterior, relembraram os passos com facilidade, sempre contando com a mediação da professora pesquisadora quando solicitada, dos dez alunos participantes, apenas dois tiveram mais dificuldades nas dobras, mesmo assim não desistiram, apesar de reclamarem um pouco.

Foi notório a satisfação quando compreenderam, até pediram pra por música na sala enquanto construíram os quatro módulos, enquanto faziam as dobras e sua montagem, permitiu-se ouvir música e ao térmico pedia-se atenção de todos para as explicações dos conceitos matemáticos e anotações em seus diários de bordo, este foi um momento muito prazeroso e de interação entre eles, pois quem terminava primeiro ajudava o outro que estava atrasado, para a montagem do sólido sugeriu-se que usassem fita adesiva por dentro nos encaixes dos módulos para que estes não se soltassem, pois o sulfite é um papel fino que dificulta um pouco esse processo, alguns alunos preferiam montar sozinhos, já outros, pediam ajuda.

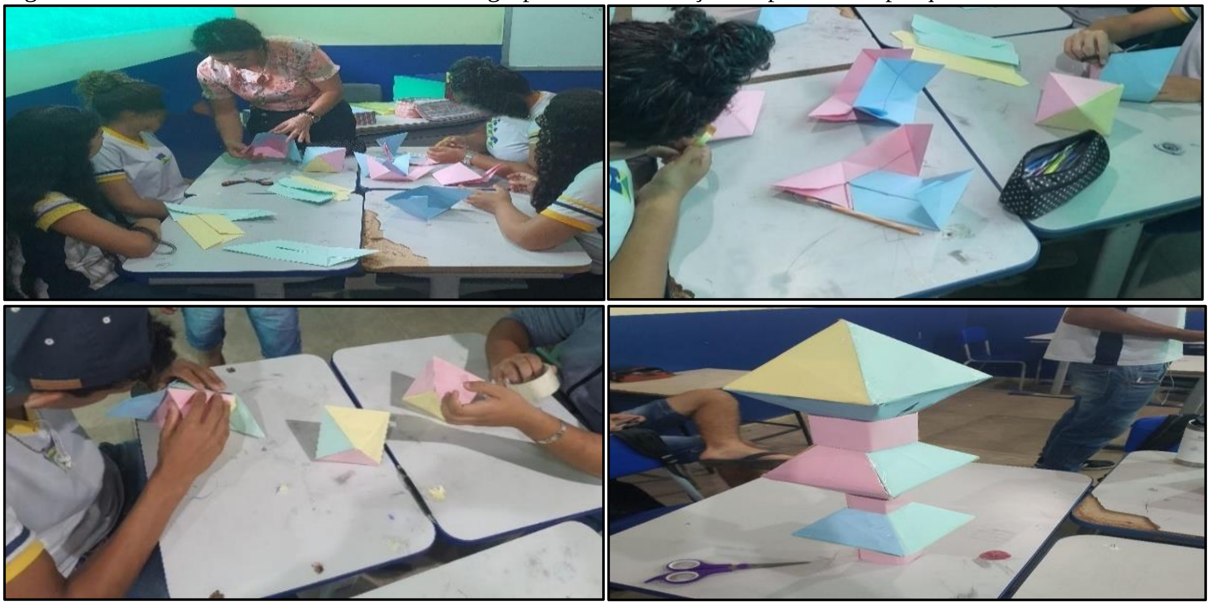
> Ao finalizarem seus poliedros, juntos em grupos, tiraram fotos variadas, brincaram sobrepondo os sólidos uns sobre os outros, criando e formando novos sólidos com a junção destes, descobrindo novos modelos, um inclusive, postou fotos no Facebook, fazendo comentários de satisfação por ter conseguido montar sozinho o seu poliedro e gostado muito da aula diferenciada que teve (DIÁRIO DE BORDO DO PROFESSOR PESQUISADOR, 2023).

No desenrolar dessa oficina, não poderia deixar de registrar algumas falas “No começo a aula estava muito chata, uma dobradura cansativa, mais depois melhorou porque entendi” e “Melhor estudar assim do que escrevendo e fazendo aquele monte de conta”.

Um aluno em especial, solicitou a permissão do professor para ir ao quadro, este, escreveu o número da oficina realizada nesse dia, o nome do poliedro e todos os seus elementos fazendo o seguinte comentário “Viu professora como a senhora tem aluno aplicado e inteligente, eu já sei que o octaedro tem oito faces triangulares, seis vértices e 12 arestas” o referido aluno adiantou o que seria explanado por mim ao final da aula oficina , com a demonstração do sólido construído, pois nas anteriores se fez essas explanações conceituando a geometria envolvida, avaliando a aprendizagem dos mesmos.

Já na turma do segundo Ano vespertino, não teve o mesmo resultado, mesmo já tendo explicado os axiomas e todos os passos da dobradura do módulo triangular teve-se que explicar novamente aos alunos, pois alguns disseram ter esquecido e outros disseram ainda não ter aprendido, foi novamente refeito todos os passos para essa turma, houve alunos que não quiseram fazer todo processo, apenas fizeram um ou outo módulo auxiliando o grupo, não se importando em fazer um poliedro pra si, pelo fato desses módulos serem simétricos, e essas dobragens se diferenciarem um pouco entre si como citado anteriormente, mesmo em meio a esses pormenores, o resultado foi satisfatório como mostrado na Figura 84.

Figura 84 - Dobraduras e sólido montado em grupo com a mediação da professora pesquisadora

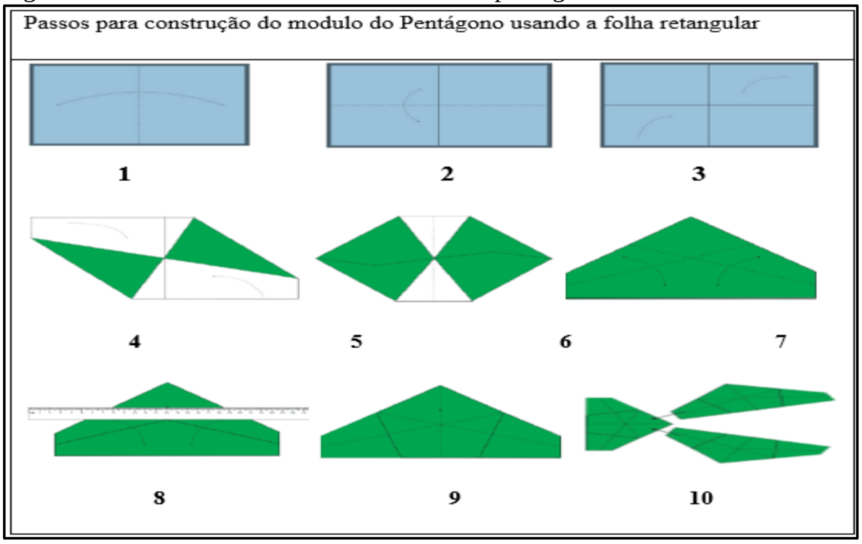


Fonte: Autora, 2023.

Na sétima e oitava aula oficina do segundo momento, foi dedicado à dobradura dos módulos pentagonais para a construção do dodecaedro, sólido regular de Platão com doze módulos congruentes.

Para a construção dos módulos pentagonais foi explicado aos alunos que ele também parte de uma folha retangular, e que para construção deste seriam necessários doze módulos, dos quais foram feitos com a folha inteira do sulfite, assim como para os demais módulos, também foi demonstrado seu passo a passo, seus axiomas e a geometria envolvida analisando sua planificação e o estudo de seus elementos após a montagem do referido sólido. Este foi feito de forma diferente do exposto anteriormente, por ser dobragens mais simples, exigindo menos dobras como demonstrado na Figura 85.

Figura 85 - Dobradura de um dos módulos do pentágono



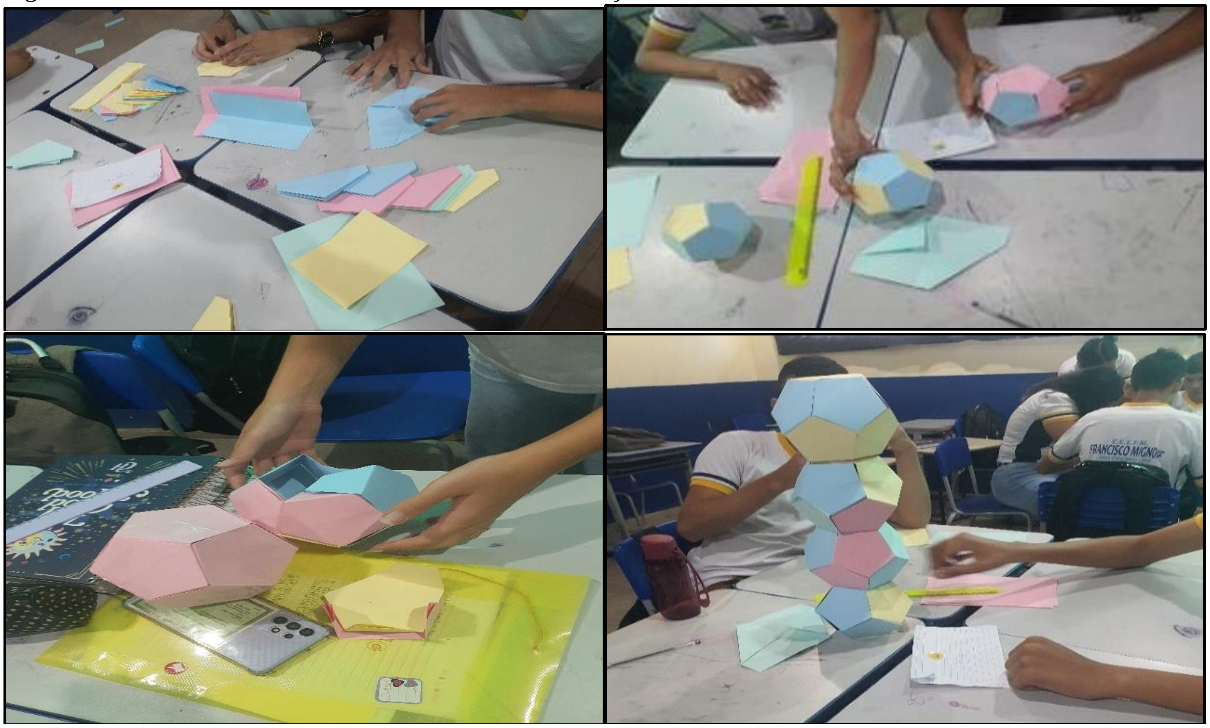
Fonte: Pimenta, 2018.

Tanto para turma do 2º Ano matutino quanto para o vespertino, houve-se a necessidade de demonstrar os passos das dobras mais de uma vez a alguns alunos que tiveram dificuldade em compreender a sequência das dobras, porém, em grupo o aluno com mais desenvoltura e compreensão auxiliava (mediava) o colega em suas dobras. e montagem do sólido, do qual não apresenta um alto grau de complexidade no encaixe, possibilitando que todos os alunos conseguissem com uma certa facilidade, para essa montagem, foi orientado que pareassem duas peças na parte que não tinham encaixes e estas encaixariam na abertura de uma terceira como demonstrado no passo dez (10) acima.

Logo, perceberam que bastava seguir esses passos até montar todo sólido, e, para essa montagem precisou ainda mais da união dos grupos, pois, enquanto um segurava as primeiras peças conectadas, outros ajudavam na realização dos encaixes finais, demonstrando o quanto a coletividade nesse tipo de tarefa, é fundamental para o sucesso de sua execução.

Houve aluno do grupo que montou sozinho, porém, teve mais dificuldade em concluí-la, exatamente porque, muitas vezes, quando se encaixa uma peça, a outra se solta, outro até tentou, mas ficou nervoso, falando inclusive que não ia montar mais, no entanto, por meio da intervenção e mediação do professor pesquisador com afeto e paciência, demonstrou que para algumas atividades dependemos da interação com o outro. Demonstra-se esse processo em equipe nas imagens da Figura 86.

Figura 86 - Alunos trabalhando coletivamente na construção do dodecaedro



Fonte: Autora, 2023.

Na nona e décima aula oficina do segundo momento, foi dedicado à dobradura dos módulos triangulares para a construção do icosaedro, sólido regular de Platão com vinte módulos congruentes.

Para construção do icosaedro também foi feito módulos triangulares, porém, usou uma dobradura diferente do construído para o tetraedro e do octaedro, por acreditar que a montagem do sólido é mais fácil e intuitiva, pois, este segue o modelo de planificação, para a dobradura referida necessita de 20 módulos triangulares e 30 módulos para encaixe, demonstra-se na Figura 87 os passos dessa dobradura.

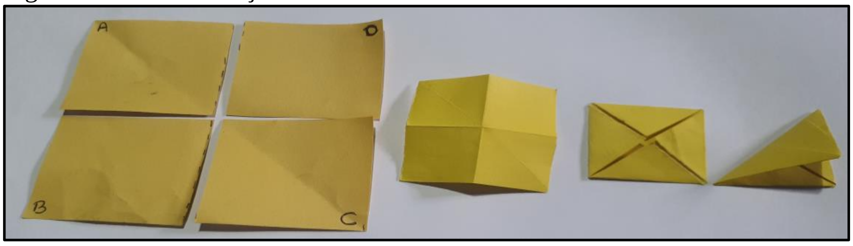
Figura 87 - Passos da dobradura do módulo triangular utilizado para o Icosaedro

Fonte: Autora, 2023.

A peça montada é um triângulo equilátero que também pode ser usado para os demais poliedros de faces triangulares. Já os módulos de encaixe parte de uma folha quadrada e para a confecção do módulo de encaixe, é necessário utilizar um papel com $1/4$ da área do papel utilizado no módulo triangular.

O triângulo obtido contém aberturas para encaixe nos três lados, onde são colocados os módulos de encaixe, unindo assim, as faces do poliedro, observe na Figura 88 os passos de sua dobradura.

Figura 88 - Demonstração dos módulos de encaixe



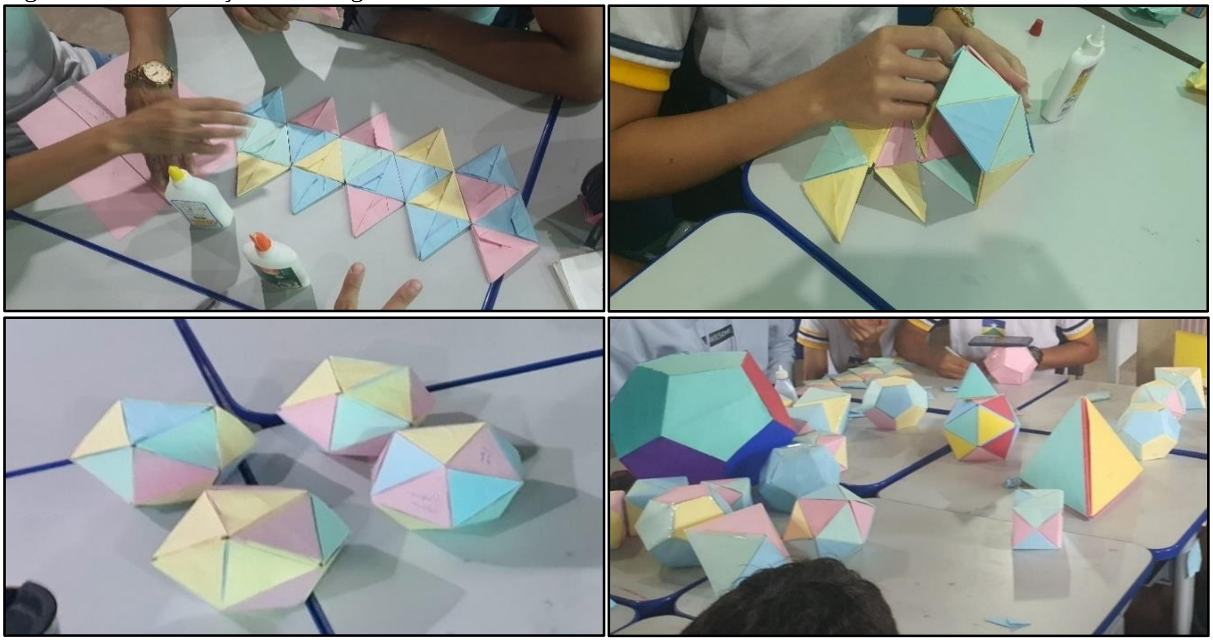
Fonte: Autora, 2023.

Em função do icosaedro precisar de 20 módulos triangulares e 30 módulos para os encaixes, foi necessário um pouco mais de tempo dos grupos para dobraduras e também para construir a planificação e montagem do Icosaedro, havia-se programado dois encontros de 50 minutos, porém precisou-se de quatro encontros.

No início da oficina organizou-se os alunos em grupos, e, explicado que fariam apenas um sólido, dividindo a quantidade de módulos entre eles, em razão deste ter muitos módulos e exigir de muito tempo para sua construção. Tanto o módulo triangular quanto o modulo de encaixe foram compreendidos com facilidade por ambas as turmas, a única reclamação é que já estavam cansados de tanto dobrar, porém para a montagem foi muito satisfatório, todos os grupos tiveram um bom desempenho, foi dado o modelo de planificação do icosaedro impresso e explicado que deveriam fazer os encaixes como no modelo, como em todas as oficinas, tiveram grupos que conseguiram montar o sólido sozinhos, seguindo os passos da planificação e troca de ideias entre eles, já outros solicitavam o auxílio da professora pesquisadora.

Houve -se comentários como “Ufa!! não aguentava mais dobrar tantos módulos, mas hoje foi muito legal, o resultado final compensou o trabalho!”, “Esse icosaedro deu um pouquinho de stress, mas, valeu a pena vê-lo montado” e “Essa foi uma experiência muito interessante, me senti muito inteligente” (DIÁRIO DE BORDO – ALUNOS, 2023). Em meio aos comentários saíram lindos trabalhos dos quais a Figura 89 demonstra esse fato.

Figura 89 - Planificação e montagem do Icosaedro



Fonte: Autora, 2023.

No decorrer dessas oficinas, observou-se, que alguns alunos eram mais dedicados, pacientes e se esforçam mais para realizar a tarefa com perfeição. Já outros, mais impacientes com as dobragens, exigiam mais tempo para entender e realizar os passos demonstrados, ou não possuíam uma coordenação motora favorável para executar esse tipo de atividade. Por isso, mostrou-se importante o trabalho em grupo de forma coletiva na interação com o outro, e, ainda com a professora pesquisadora realizando uma mediação entre eles, transmitindo incentivo e entusiasmo, mostrando que todos eram capazes de fazer o que estava sendo proposto e que, à medida que tentassem reproduzir os passos, a tendência era ter um resultado melhor.

7.1.1.3 Terceiro momento – Software Poly Pro (23/05/2023 e 13/06/2023)

O terceiro momento é denominado “Software Poly Pro”, este software educacional foi escolhido para ser utilizado neste trabalho, por ser um software educativo para a criação e exploração de poliedros, uma metodologia utilizada com intuito de potencializar o ensino dos conceitos geométricos que envolvem os poliedros regulares de Platão, neste, é possível fazer movimentos rotacionais manipulando os objetos, dobrando, desdobrando e assistir a uma movimentação automática destes, estimulando a percepção espacial do educando e permitindo o aprofundamento e consolidação do conhecimento matemático.

Por ainda não haver uma versão em português optou-se por utilizá-lo na versão espanhol que se assemelha ao português e para usar as ferramentas disponíveis neste software não necessita de uma leitura fluente do idioma adotado, pois o usuário consegue compreender o significado dos poucos termos utilizados para visualizar as figuras.

Para este momento foi utilizado duas aulas de cinquenta minutos, para a primeira aula, já foi preparado o laboratório de informática, cujo software já instalado e aberto na tela principal em todos os computadores em quantidade suficiente para os alunos. Nesta primeira aula do terceiro momento fez-se a demonstração da interface principal do software Poly Pro aos alunos, cujo objetivo foi a exploração desse recurso didático, levando-os a perceber que este, apresenta três janelas, onde uma expõe a barra de ferramentas, a segunda demonstra o poliedro e a terceira o painel de comandos, tendo uma visualização privilegiada dos sólidos geométricos.

Os alunos puderam explorar livremente o Poly, realizando movimentos rotacionais, manipulando os objetos, dobrando, desdobrando e assistindo a uma movimentação automática que este possui, acredita-se que esse momento estimulou a percepção espacial do educando, permitindo o aprofundamento e consolidação do conhecimento matemático.

A segunda aula do terceiro momento teve como objetivo desenvolver uma sequência de atividades digitalizadas, onde os alunos foram direcionados pela professora pesquisadora a uma análise e estudo das formas poliédricas, manipulando, girando e planificando as imagens exibidas em de três maneiras: incorporação topológica no plano (planificação), forma achatada (bidimensional), a formação e classificação do sólido geométrico (imagem tridimensional).

Utilizando a visualização do software Poly Pro, responderam duas atividades em forma de tabela, sendo uma para identificar, os polígonos, os diferentes tipos de poliedros, reconhecendo neles os números de vértices, arestas e faces dos poliedros desenvolvendo a relação de Euler. Outra para observar que em cada vértice incide o mesmo número de arestas. Ainda, observar (considerando a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice) que existem apenas cinco poliedros regulares, os referidos sólidos de Platão: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Momento demonstrado na Figura 90.

Figura 90 - Alunos no laboratório de informática fazendo aula com o Poly Pro 1.12

Fonte: Autora, 2023.

Ao término das aulas propostas e desenvolvidas com o software Poly Pro, dedicou-se ao questionário final e avaliação diagnostica II, cujo objetivo é comparar os dados entre os questionários iniciais, de modo a aferir as percepções do aluno frente a metodologia almejada para o ensino de Geometria Espacial, aferir ainda se ampliou o conhecimento do aluno após todo processo metodológico desenvolvido nos três momentos da pesquisa, se este pode aprender com os instrumentos e signos utilizados. Em comparação às análises dos dados demonstrados nos gráficos de antes e depois do desenvolvimento da pesquisa, percebe-se que houve índice de mudança no aprendizado desses alunos.

Na oportunidade, não poderia deixar de relatar aqui, fatos inesperados que ocorreram no decorrer dessa pesquisa, dos quais trouxeram muita satisfação, na primeira aula oficina realizando as dobraduras, um aluno do 2º Ano matutino fez um coração e entregou à professora pesquisadora fazendo o seguinte comentário “Em toda aula eu farei um coração para a professora, pequeno quando eu sentir muita dificuldade, médio quando eu conseguir, com pouca dificuldade e grande quando eu gostar muito da aula e ter aprendido o conteúdo envolvido” (DIARIO DE BORDO – ALUNO, 2023).

Na turma do 2º Ano vespertino, uma aluna também demonstrou afeto a professora pesquisadora e satisfação em estudar de forma diferenciada, dando-lhe uma flor feita com dobradura, essa aluna fazia pesquisas na internet sobre o origami, fez outros modelos de poliedros e trouxe na sala para socializar com os colegas. Essa aluna demonstrou muito interesse e facilidade na compreensão das dobraduras e montagem dos sólidos, sendo uma parceira de medição para os demais colegas.

7.1.1.4 Culminância – 15/06/23

Realizou a culminância deste trabalho no dia 15/06/2023 a pedido da Direção escolar, que em sua fala, a vice diretora disse “Expõe o que vocês fizeram para toda escola professora! Um trabalho maravilhoso como esse não pode ficar sem ser divulgado para os demais alunos e professores” (DÁRIO DE BORDO - PROFESSORA PESQUISADORA, 2023), partindo desse pedido, programou-se então, para essa exposição com muita satisfação.

Os alunos se sentiram lisonjeados em mostrar seus trabalhos, com bastante empolgação, porém com muita responsabilidade, fizeram lindos cartazes alusivos ao tema poliedros de Platão, dos quais foram expostos no pátio da escola junto aos sólidos construídos por eles nas aulas oficinas. Todas as turmas da escola do período matutino e vespertino, foram liberadas para prestigiar e conhecer um pouco mais do trabalho desenvolvido pelas turmas do 2º Ano A e B, onde, esses mesmos alunos, instruídos pelo professor pesquisador se responsabilizaram em explicar e responder as várias perguntas que foram feitas pelos curiosos, foi instruído ainda que deixassem os módulos em quantidade suficiente para que os alunos visitantes tentassem montar alguns dos sólidos expostos. As imagens da Figura 91 demonstram os trabalhos confeccionados para interação e troca de conhecimento.

Figura 91 - Exposição dos trabalhos à comunidade escolar

Fonte: Autora, 2023.

Vale ressaltar que muitos alunos não conseguiram apenas visualizar a exposição, tiveram que manusear, jogar pra cima, jogar um para outro, inclusive alguns montaram o hexaedro e o tetraedro, vivenciou nesse momento o que, em Vygotsky, seriam os conceitos espontâneos, ou seja, aqueles conceitos formados, a partir da observação, manipulação e vivência de situações concretas, muitos alunos demonstraram encantamento, inclusive os alunos do 1º Ano perguntou se a professora pesquisadora iria fazer isso com eles no 2º Ano, pois disseram querer aulas assim, pesquisando e construindo, por acreditar que seria mais gostoso de aprender. Teve outros que pediram alguns sólidos pra levar pra casa por terem achado muito bonito e interessante.

> Foi imensamente gratificante perceber e concluir que os alunos, a partir de aulas práticas com o Origami, de visualização e manipulação com o software Poly Pro, investigação, trocas de experiências e conhecimentos dentro de seu contexto social, conseguem compreender e (re)formular conceitos e teorias. Nós enquanto professores e formadores de opinião, precisamos lançar novos desafios de modo a instigá-los, desafiá-los e motivá-los a aprender, é revendo nossa prática, indo ao encontro dessa nova geração e aos seus anseios, é que daremos significado ao que ensinamos contribuindo para que nossos alunos sejam, de fato, protagonistas do seu próprio aprendizado (DIÁRIO DE BORDO – PROFESSORA PESQUISADORA, 2023).

Ao longo do desenvolvimento de todos os momentos da pesquisa pôde-se perceber um engajamento e interesse apresentado pela maior parte dos alunos. É perceptível, que houve progresso no nível de pensamento geométrico dos alunos. Mesmo não tendo como mensurar o nível de aprendizado de cada aluno, tem-se a certeza de que não se encontram no mesmo nível que iniciaram essa pesquisa.

7.2 Análise de dados e discussão de resultados

Para essa análise, foram considerados todos os dados obtidos na investigação e observações nas aulas oficinas, como as percepções e constatações da professora pesquisadora, por meio de registros feitos no diário de bordo, tanto pelos alunos, quanto pela professora pesquisadora, e ainda, na comparação das respostas entre dois questionários, sendo o primeiro para averiguar a satisfação e o conhecimento do aluno em relação a proposta a ser apresentada com o uso do Origami e o software Poly Pro, como metodologia inovadora, e o segundo como avaliação diagnóstica, cujo intuito ,investigar o conhecimento prévio do aluno em relação a Geometria que envolve poliedros de Platão, ambos aplicados antes e depois de todo desenvolvimento da pesquisa de modo a aferir se houve, mudança de conceitos e se houve indícios de aprendizagens.

Para tanto, buscou-se indícios e evidências de que as ações planejadas contribuíram para que a pergunta inicial fosse respondida: O uso do Origami modular e software Poly Pro, podem auxiliar o processo de ensino, e consequentemente, aprendizagem da geometria espacial com relação aos sólidos de Platão?

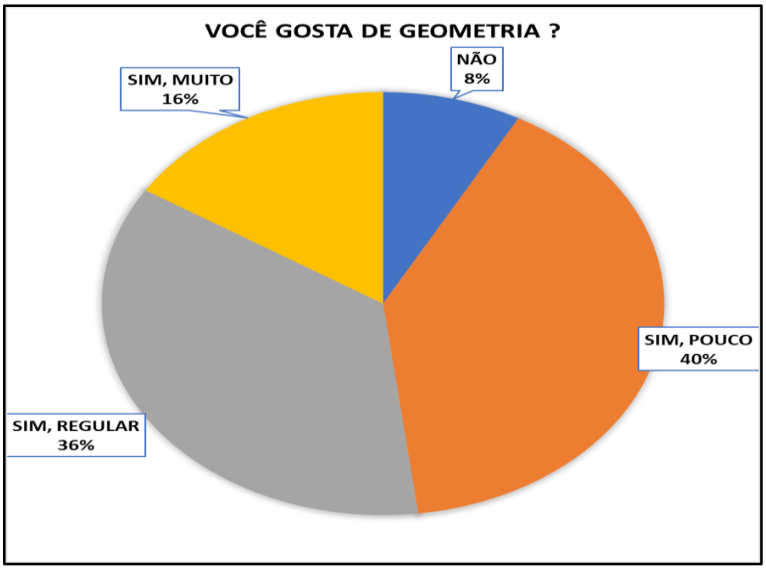
Ressalta-se, que as análises aqui apresentadas, foram pautadas na teoria sociointeracionista de Vygotsky, que nos sugere uma busca do desenvolvimento cognitivo que ocorre por meio da interação entre duas ou mais pessoas, estando elas envolvidas ativamente trocando experiências e ideias, gerando novas aprendizagens de forma mediada por instrumentos e signos.

Os três momentos desenvolvidos com os instrumentos utilizados como metodologia para coleta de dados, possibilitaram averiguar as potencialidades pedagógicas da sequência didática, para o ensino e aprendizagem da geometria que envolve os sólidos de Platão. Logo, a finalidade da pesquisa, a partir desses resultados e de sua análise, foi avaliar a pertinência da proposta desenvolvida e elaborada para o ensino do referido conteúdo aos alunos do 2º Ano do Ensino Médio.

Conforme as avaliações que se encontram nos APÊNDICES B, C e D foi verificado o que os alunos conhecem sobre o assunto de Geometria Plana e Espacial, assunto explicado com o livro didático no primeiro momento de forma convencional (tradicional).

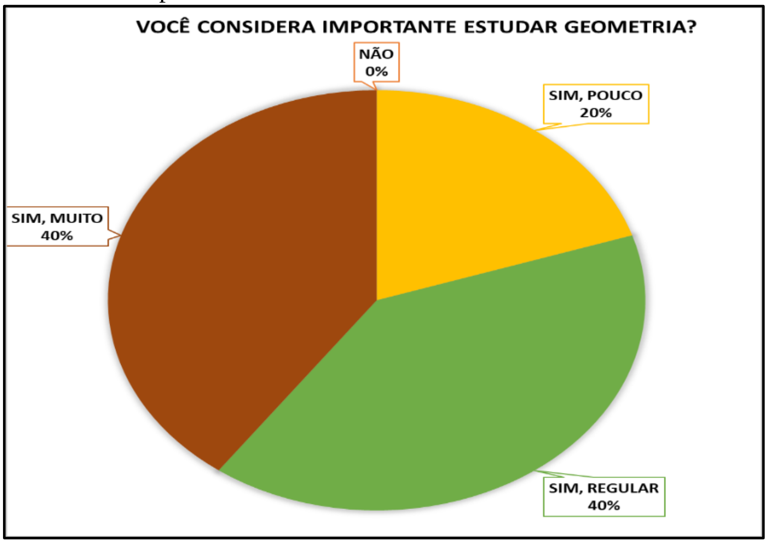
Ambas, compostas por dez questões, como citado anteriormente, o primeiro, por nome "Questionário inicial e final" teve o objetivo de averiguar a satisfação e o conhecimento do aluno em relação a proposta a ser apresentada com o uso do Origami modular e uso da tecnologia software Poly Pro. Analisando as respostas obtidas, nas questões de número 1 e 2 evidenciadas nos gráficos abaixo, onde o Gráfico 1 trata da afinidade com a Geometria e o Gráfico 2 trata da importância de se estudar Geometria, ambos, contendo quatro alternativas para serem marcadas, verificou-se por meio dos dados obtidos que apenas 8%, responderam não gostar, 40% dos alunos gostam apenas um pouco, 36 % gosta regular e somente 16% disseram gostar muito do conteúdo em questão, já o Gráfico 2 demonstra claramente que, mesmo os alunos não tendo muita afinidade com Geometria a considera importante, pois 20% sim, pouco, 40% sim, regular e 40% sim muito importante, como podemos observar a seguir.

Gráfico 1 - Nível de afinidade com a Geometria



Fonte: Autora, 2023.

Gráfico 2 - Importância de se estudar Geometria

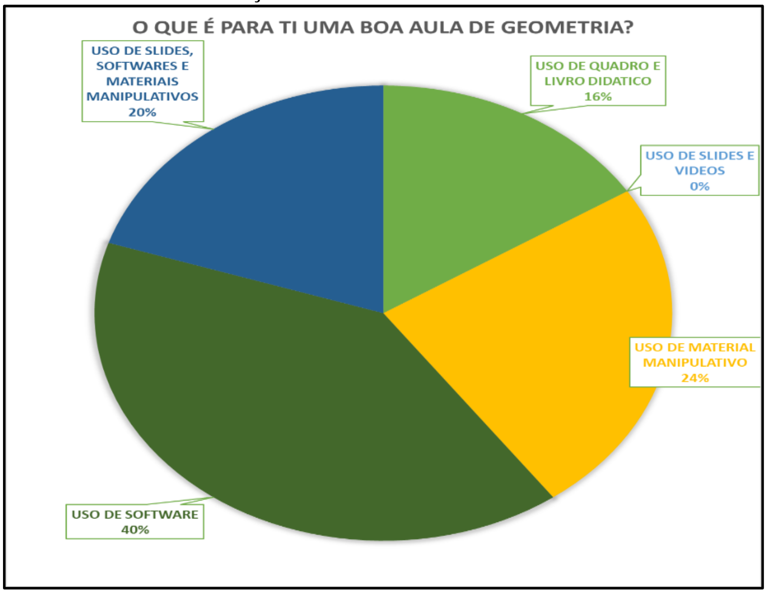


Fonte: Autora, 2023.

A partir da observação do Gráfico 1, percebeu-se que uma quantidade significativa disse gostar pouco de Geometria, uma pequena parte disse não gostar, e a maior parte tem uma certa afinidade, e o que chama a atenção no Gráfico 2, é que, mesmo os alunos que não gostam considera ser um estudo importante. Diante do analisado, vê-se a necessidade de mudar esse cenário, e, essa pesquisa tem esse intuito com a inserção do Origami modular e o software Poly Pro, para tornar as aulas atrativas aos olhos dos alunos e que percebam a importância da Geometria em nosso dia a dia.

Quando se questiona “O que é para ti, uma boa aula de Geometria?” tem-se a finalidade de saber se esse aluno já havia estudado com metodologias dinâmicas, ou seja, diferente do tradicional (uso apenas quadro e do livro didático), e/ou sondar o interesse deste para novas formas de aprender este conteúdo, com quatro alternativas de respostas, pode-se obter como resultado que 16% ainda acreditam que uma boa aula de Geometria parte de quadro e livro didático, 24 % citaram o material manipulativo com dobradura, 20% dos alunos marcaram mais de uma opção, slides e vídeos, uso de material manipulativo e uso de software, já 40%, a maior parte desses alunos responderam o uso de tecnologias com software matemático, ambos demonstrados no Gráfico 3.

Gráfico 3 - Caracterização de uma boa aula de Geometria



Fonte: Autora, 2023.

Observando os dados demonstrados no Gráfico 3, percebeu-se que poucos são os alunos que acreditam que apenas o uso do livro didático promove uma boa aula de Geometria, acredita-se ainda que essa pequena porcentagem está ligado aos alunos que também disseram não gostar da mesma, o que os levam a não se importar com a forma de se ensinar, já a maior parte dos alunos marcaram o que se esperava dessa pesquisa, que para uma aula de Geometria ser significativa, necessita do uso de materiais manipulativos e uso da tecnologia de slides, vídeos e software matemático, dando-nos a confirmação de interesse ao que foi proposto para essa turma de 2º Ano.

Quando na questão quatro é questionado, se os alunos já ouviram falar em Platão, todos responderam não, mesmo tendo perguntas “Professora esse Platão é o mesmo dos poliedros que a senhora falou?” e “Só sei que são poliedros de Platão, mas não sei porque recebeu este nome, nunca nenhum professor falou sobre ele” (DIARIO DE BORDO – ALUNOS, 2023), despertando na pesquisadora a necessidade de mostrar a matemática em outra perspectiva, ressaltando que já consta no cronograma desta, para se fazer um relato da história que envolve os poliedros regulares de Platão e consequentemente sobre esse grande filósofo e amante da Matemática.

Já as questões de número 05 a 07 se refere ao conhecimento do aluno a respeito do Origami modular, dos 25 alunos questionados, apenas oito disseram já ter ouvido falar sobre a técnica de dobradura Origami, 10 alunos responderam ter feito dobraduras apenas em aulas de Artes, todos relataram nunca terem feito Origami em aulas de Matemática, e, quando se questiona sobre o que esses alunos sabiam fazer, citaram barquinho, avião, chapéu, laço e coração.

Em sondagem ainda ao conhecimento e satisfação dos alunos, agora no que se refere ao software Poly Pro, pôde-se constatar em mais este aspecto, a importância de se fazer essa pesquisa, trazendo a oportunidade a esse alunado de fazer parte de uma aula dinâmica, interativa e inovadora aos olhos destes, pois observando as respostas das questões de número 8 e 9, analisou-se que nenhum dos 25 alunos conheciam o software Poly Pro e nem mesmo haviam estudado com nenhum outro tipo de software matemático.

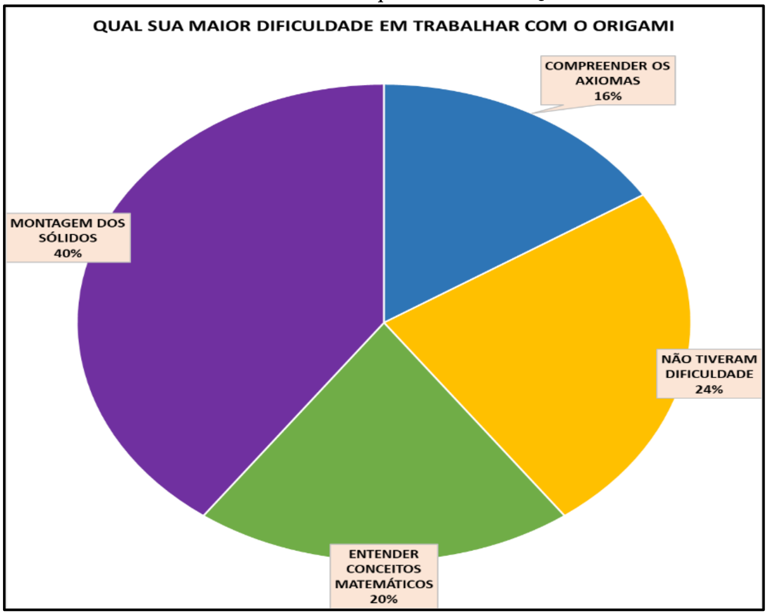
A questão de número 10 estimulou ainda mais o interesse de se fazer essa pesquisa, quando os 25 alunos de forma afirmativa responderam ter interesse em estudar Geometria fazendo uso da tecnologia além de escreverem as mais variadas justificativas, tais como:

- Aluno 1 - “Gostaria, pois acho importante o uso da tecnologia”;
- Aluno 2 - “Sim, porque aprender o novo é bom”;
- Aluno 3 - “Experiências novas”;
- Aluno 4 - “Porque melhora para nós jovens que estamos acostumados com a tecnologia a nosso favor”;
- Aluno 5 - “Gostaria sim pois acho que a tecnologia ajuda no desenvolvimento e aprendizagem da disciplina”;
- Aluno 6 - “Sim, ajuda a aprender, além de ser uma aula diferente das que temos no dia a dia”;
- Aluno 7 - “sim, eu gostaria muito de aprender coisas novas em ambientes diferentes”;
- Aluno 8 - “sim, gostaria, pois seria uma maneira mais divertida de aprender”;
- Aluno 9 - “sim, pois na informática me sinto mais à vontade, por ser uma coisa que aprendo fácil e gosto de fazer”.

Segundo a visão da autora, através de observações do interesse e desenvolvimento dos alunos no decorrer da pesquisa e ainda na observação do questionário final, respondido após os trabalhos desenvolvidos, a utilização de dobradura, material concreto e softwares por mais que demandem tempo de preparo e execução, aguçam a curiosidade dos alunos , despertando o interesse destes, e consequentemente potencializam seu aprendizado, já na forma tradicional nem todos os alunos se sentem instigados, principalmente em visualizações em três dimensões.

Pôde-se ter essa visão em análise ao questionário final como citado, sua primeira questão veio confirmar que apenas sete alunos conheciam o Origami, treze alunos não conheciam e cinco apenas tinha ouvido falar, já a segunda questão, dos vinte cinco alunos pesquisados, 22 disseram terem gostado de estudar geometria com o Origami modular e somente dois disseram não gostar, cuja justificativa foram: “É muito trabalhoso!!”, “ Tenho as mãos pesadas para essas coisas”, já a questão de número três vem demonstrado no Gráfico 4 sobre a maior dificuldade dos alunos em trabalhar com o Origami.

Gráfico 4 - Resultados obtidos da questão 03 do Questionário final



Fonte: Autora, 2023.

Percebe-se e comprova na observação do gráfico, que a maior dificuldade dos alunos foi na montagem dos sólidos, assim como algumas reclamações nas aulas oficinas, além de colocações em seus diários de bordo, tais como: “Tenho as mãos muito pesadas pra essas coisas”, “Quebrei muito a cabeça, me estressei muito , mas consegui montar com a ajuda da professora” e “O icosaedro deu muito trabalho, mais foi muito gratificante vê-lo montado”, em meio a esses, “Mesmo sendo um pouco difícil por exigir muito do raciocínio para memorizar a sequência de dobraduras, estou amando estudar Geometria com dobradura.”, “Achei muito legal estudar esse assunto com dobraduras, facilita visualizar as figuras geométricas, além de exigir muita concentração e habilidades manuais" e por fim " O Origami auxiliou muito na compreensão de conceitos geométricos, como por exemplo, ponto, retas, bissetriz, medianas, ângulos, nomes dos polígonos de acordo com o número de lados, ao confeccionar um sólido consegui assimilar melhor seus elementos, manuseando e vendo-o em 3Ds; sendo que antes de trabalhar com a dobradura, não entendia como isso era possível" (DIÁRIO DE BORDO – ALUNOS, 2023).

Mesmo em meio a algumas dificuldades nas dobraduras ou montagem dos sólidos demonstraram gostar da experiência, houve interação nesse processo de aprendizagem tanto da mediação do professor pesquisador quanto de alguns alunos que tinham mais facilidade de compreensão, levando-os do desenvolvimento real para o desenvolvimento potencial, pois segundo Vygotsky nessa interação é primordial que haja a atuação de um mediador desenvolvendo a zona de desenvolvimento proximal.

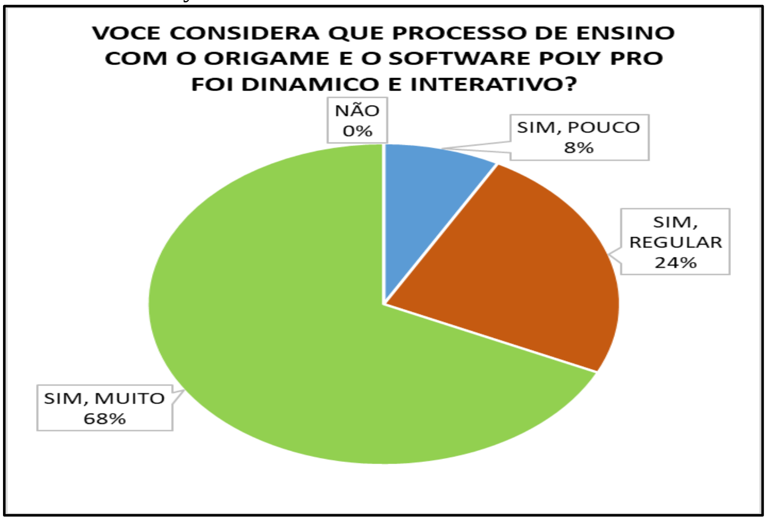
Em análise aos questionamentos sobre o uso do software Poly Pro, lançou-se as questões de número 04 e 05 com intuito de saber se os alunos gostaram de estudar a geometria que envolve os poliedros de Platão com o uso desse software, e ainda se o considerou importante para aprender o conteúdo citado, doze alunos disseram que foi bom, 13 disseram que foi ótimo estudar com o software, somente dois disseram não saber, em razão de terem faltado nos dias dessa aula, já com relação a importância desse, mesmo os alunos que faltaram disseram que acreditavam ser importantes, ligados ao fato de se trabalhar com algo novo para eles, e por ser com o uso do computador, os demais disseram que o uso do software foi muito importante na aprendizagem.

Esse momento foi muito bom, a satisfação dos alunos em estar em outro ambiente, frente aos computadores para uso do software foi visível, algo que pra eles era novo, não usam o computador para esse fim, foi uma aula muito empolgante, ambos vinham cobrando nas aulas anteriores, e como citou um dos alunos, "Estudar matemática no computador foi diferente e muito bom, pena que foram só duas aulas" e "Vendo no software fica mais fácil de aprender e usar a relação de Euler, com a planificação e o solido fechado" (DIÁRIO DE BORDO – ALUNOS, 2023).

Os alunos não demonstraram dificuldades com as funcionalidades do software, neste também pode-se ver a teoria de Vygotsky envolvida, houve interação entre os alunos, situações de trocas de experiências de uso dessa ferramenta entre os próprios alunos durante o desenvolvimento da atividade, pois em duplas fizeram os questionários pedidos pelo professor, o software foi o instrumento para reforçar o processo natural de aprendizagem do indivíduo reestruturando suas funções mentais.

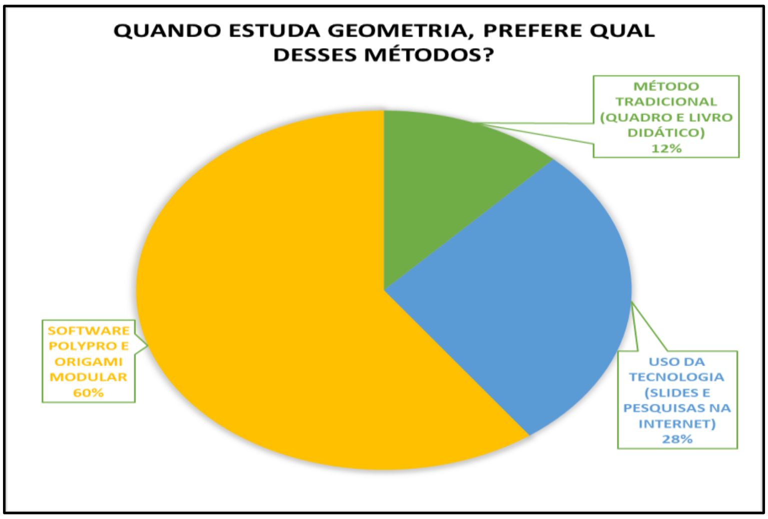
Acreditou-se que o estudo de pesquisa aqui desenvolvido com o Origami modular e o software Poly Pro tenha sido dinâmico e interativo, no entanto elaborou-se a questão de número 06, com quatro opções de respostas, sendo 8% considera importante , porém pouco, 24% regular, 68 % acham muito importante, vindo comprovar nossa hipótese, além da questão 07 com três opções de resposta vem reforçar esse fato pela preferência de metodologia utilizada para o estudo em questão, em análises aos Gráficos 5 e 6, percebe-se essa preferência em maior porcentagem.

Gráfico 5 - Interesse do aluno pelo processo de ensino com o Origami e o Software Poly Pro



Fonte: Autora, 2023.

Gráfico 6 - Preferência de método de ensino



Fonte: Autora, 2023.

O maior percentual de respostas deixa claro que este estudo vem ao encontro dos anseios dos alunos, fazendo uso de metodologias diferenciadas, materiais manipulativos

(Origami modular) e uso da tecnologia com slides, pesquisas na internet e uso do software Poly Pro, assim como respondido por eles. Questionou-se ainda se achavam a presença do professor importante para o estudo de Geometria, dos quais nove disseram importante e 16 disseram muito importante, e, ainda quando se questiona se tiveram dificuldades em usar o computador para explorar o software Poly Pro durante a aula, em sua maioria, 14 alunos disseram não ter tido nenhuma dificuldade, 6 achou regular e 5 disse ter um pouco de dificuldade, porém, esses explicaram que a dificuldade foi em resolver as atividades propostas na aula com o software.

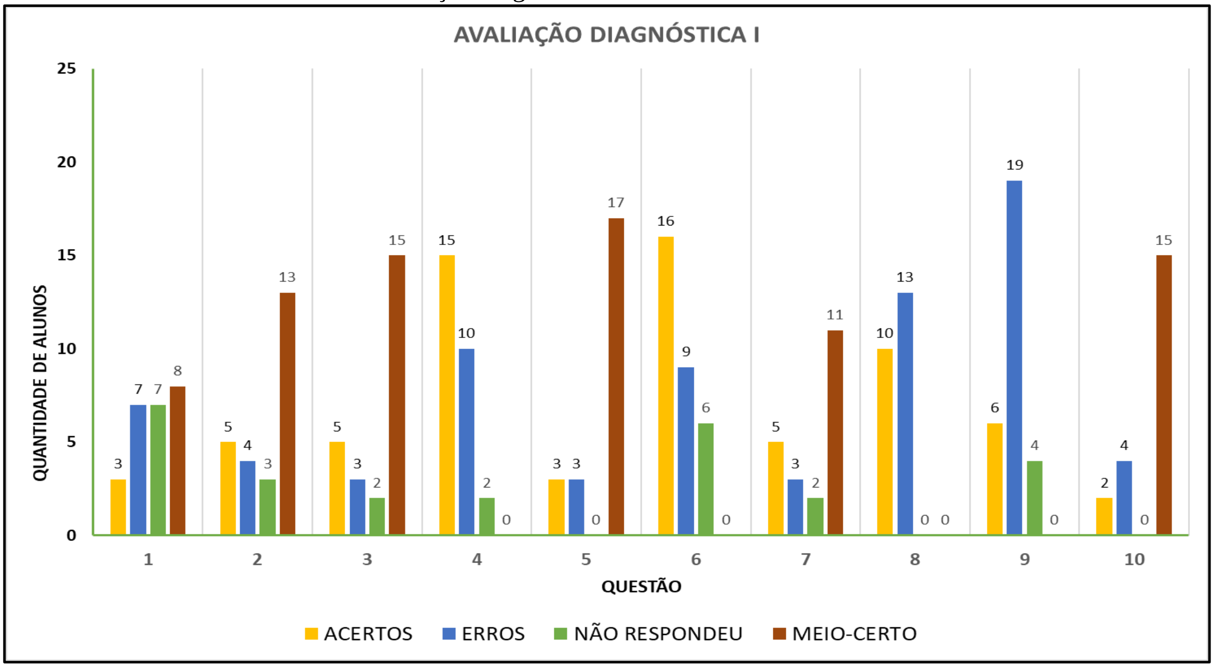
Também ao encontro de nosso objetivo, respondendo nossa pergunta de pesquisa, vieram as respostas da questão de número 10, a qual questiona o aluno referente a contribuição do Origami e do software Poly Pro para a aprendizagem do conteúdo proposto, 03 alunos disseram que contribuiu parcialmente, justificando ter sido poucas aulas com o software, e, para nossa satisfação 22 alunos consideram que essa metodologia contribuiu muito com o aprendizado.

Ainda nesse primeiro momento de pesquisa, responderam o segundo questionário denominado “Avaliação diagnóstica I” elaborada devidamente com o propósito de investigar aspectos como: visualização, identificação, classificação, características e conceitos mínimos de Geometria Plana e Espacial.

Os alunos demonstraram uma certa preocupação para esta avaliação diagnóstica, pois relataram não lembrar ou ainda por ter visto muito pouco do assunto tratado, houve alunos que tentou visualizar as respostas do colega, outro olhou anotações do caderno. “Posso deixar em branco? Não sei nada, vou tirar zero” outro “Não consigo lembrar os nomes das figuras! Nossa! muito difícil esse assunto” (DIÁRIO DE BORDO – PROFESSORA PESQUISADORA, 2023).

As dez questões foram analisadas de modo a verificar o nível de pensamento geométrico em que os alunos se encontram, levando em consideração o que foi exposto anteriormente, cujos resultados da Avaliação Diagnóstica I foram demonstrados, no Gráfico 7 a seguir.

Gráfico 7 - Resultados obtidos na Avaliação diagnóstica I



Fonte: Autora, 2023.

Observando os dados do Gráfico 7, partindo da primeira e segunda questão, cujas perguntas se referem ao conhecer Geometria Plana e Espacial, conhecer um poliedro regular, sabendo onde encontra-lo no cotidiano e se ainda sabiam quais eram seus elementos, pôde-se constatar que um número muito pequeno de alunos soube responder devidamente, levando-nos a considerar que, provavelmente, isso ocorre pela falta de compreensão de conceitos e do conteúdo de Geometria. Acredita-se que seja consequência da aula tradicional, quando o aluno recebe conceitos prontos e não construídos por ele, sendo meramente mecânico e sem significado.

Nas questões de número 3,4 e 5 os alunos deveriam classificá-las em verdadeiras e falsas, ambas tratando de conceitos relacionados a polígonos e sua classificação, condições para que um poliedro seja regular, número de faces e arestas. Dos vinte e cinco alunos, apenas 03 deles acertaram toda questão de número 03 e 05, e 15 alunos acertaram a questão 04, evidenciando assim, a falta dos conceitos mínimos para compreensão desse do conteúdo de Geometria.

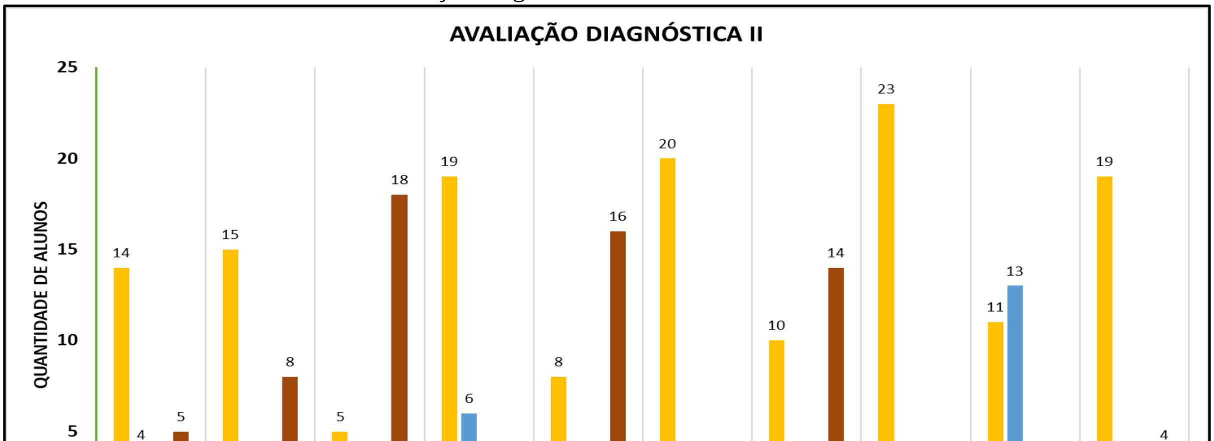
Já nas questões 6, 7 e 8 exigiu que os alunos conhecessem os elementos de um poliedro e fizessem uso da fórmula de Euler, o gráfico apresentado demonstra que, em se tratando de visualização, os alunos apresentam um nível muito baixo de compreensão de conceitos fundamentais e necessários para o estudo da Geometria Espacial.

Para verificar qual o conhecimento que os alunos apresentam sobre visualização, identificação do sólido planificado, foi proposto a questão de número nove. Para verificar conhecimento sobre faces, vértices, arestas e relação de Euler, foi proposto a questão de número dez, uma tabela com os cinco poliedros ao qual o aluno completaria especificando, face do polígono, elementos, nome do poliedro e relação de Euler. Houve deficiências, pois constatou-se que somente dois alunos apresentam tal conhecimento e os demais conseguiram resolver parcialmente, quatro alunos com muitos erros e ainda quatro alunos que não souberam responder essa questão demonstrando não compreender situações simples e, mesmo através da visualização, não conseguem perceber quais figuras planas compõem o objeto em questão.

Isso demonstra que os desenhos expressos nos livros didáticos podem não ser suficientes para que os alunos consigam desenvolver a habilidade de visualização. Em função do explicito, acredita-se que seja importante a utilização de recursos concretos e tecnológicos, os quais seguramente estimulam e potencializam esse processo.

Entende-se que, após todo processo e desenvolvimento dessa pesquisa nos três momentos de aplicação, a partir dos depoimentos dos alunos e dos resultados evidenciados, tanto nas aulas oficinas quanto na análise dos questionários final, pôde-se afirmar que a utilização da prática da dobradura Origami e das tecnologias digitais (software Poly Pro) potencializam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa afirmação é sustentada e comprovada quando se observa os resultados das avaliações finais, fazendo um comparativo entre eles. O Gráfico 8 apresenta o resultado da avaliação diagnóstica II, uma sondagem final.

Gráfico 8 - Resultados obtidos na Avaliação diagnóstica II



Fonte: Autora, 2023.

Após a aplicação desses questionários, notadamente percebeu-se os resultados que haviam sido obtidos. Por meio destes dados, pode-se comprovar os índices de aprendizagens dos alunos para níveis superiores do pensamento geométrico. A melhora foi significativa, pois para essa sondagem final não houve reclamações como na Avaliação diagnóstica I (inicial), os alunos conseguiram realizar de forma correta e satisfatória, as atividades propostas, demonstrando ter compreendido os conceitos geométricos e por conseguinte ampliado seus conhecimentos.

Percebe-se então, que a melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é com a construção de objetos manipulativos o Origami e/ou a utilização de softwares que simulem o espaço tridimensional, uma vez que a observação e suas relações espaciais estimulam o pensamento cognitivo e criativo numa interação com instrumentos e signos, com aluno-aluno e aluno-professor como mediador indo ao encontro da teoria de *Vygotsky* para o ensino e para a aprendizagem.

Os estudos diagnósticos apresentados, vem reforçar que o professor precisa propor novas práticas para ensinar geometria, ou seja, inserir diferentes metodologias com materiais manipuláveis o Origami e softwares matemáticos, para tentar reverter o quadro de dificuldades que os alunos apresentam, levando o aluno a produzir seu próprio conhecimento, estudos aqui relatados afirmam que ao visualizar um objeto (imagem mental), o aluno consegue identificar os elementos, as características e suas propriedades, consequentemente consegue construir o conceito matemático que o auxilia na resolução de situações problema.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do princípio, de que o interesse desta pesquisa foi em utilizar alternativas pedagógicas colocando o foco do processo de ensino no aluno, de forma a envolvê-lo com atividades práticas sendo ele protagonista de sua aprendizagem, sugeriu-se então, o uso de materiais manipuláveis (dobraduras), o Origami modular, para construção dos sólidos de Platão, além da inserção de tecnologias digitais como slides, vídeos e uso do software Poly Pro, cujo intuito foi potencializar o ensino do referido tema, e ainda por entender que nos dias atuais os softwares educacionais se caracterizam como recursos fundamentais, facilitando o trabalho do Professor na sala de aula, promovendo melhor estruturação para o processo ensino aprendizagem.

Por entender que essa clientela tem um diferencial, por estarem vivendo inseridos em uma nova realidade, movidos por um mundo tecnológico é que se vê a necessidade de modernização das aulas, de forma a acompanhar essa cultura digital. Cabe-se então partir de nós enquanto educador e formador de opiniões que somos, buscar estratégias diversificadas para atrair essa nova geração, de modo a melhorar o ensino aprendizagem tornando-a significativa.

Em reflexão a isso, é que surge a seguinte interrogação: O uso do Origami modular e software Poly Pro, podem auxiliar o processo de ensino, e consequentemente, aprendizagem da Geometria Espacial com relação aos sólidos de Platão?

Sabe-se que apenas o uso de uma ou outra ferramenta, não é suficiente para suprir todos os objetivos em relação aos conteúdos geométricos e resolver as dúvidas dos alunos, mas acreditou-se que a associação do Origami Modular paralelo ao software matemático Poly Pro, desenvolvidos de acordo com os PCNS, e, competências e habilidades sugeridas pela BNCC, facilitaria de forma significativa a aprendizagem dos educandos, partindo desse pressuposto, elaborou-se nesta pesquisa uma didática dinâmica, interativa, dialogando com a realidade do aluno de forma bem estruturada, envolvendo-o como um todo, considerando os aspectos culturais, sociais e cognitivos, a partir de uma sistematização de ensino mediada pelo professor pesquisador na sala de aula, assim como proposto em teorias de Vygotsky.

A partir das análises dos dados, foi possível perceber que o trabalho contribuiu para além da potencialização do ensino da Geometria Espacial no que tange os poliedros de Platão, este ainda despertou a curiosidade dos educandos, permitiu uma grande autonomia na aprendizagem, maior interação entre eles, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, raciocínio e percepção espacial.

Essa percepção se comprova no decorrer de todo processo, com a observação no fazer do aluno, em seu envolvimento, dedicação para realização das propostas apresentadas pelo professor pesquisador, sua interação nos momentos de produção dos sólidos com as dobraduras e construção dos sólidos, além das análises comparativas entre os dois questionários investigativos, dos quais apontaram em seus percentuais, que houve uma aprendizagem significativa, comprovando assim, que o uso do Origami Modular e do software Poly Pro pode ser visto como instrumentos potencializadores e motivador para o ensino de Geometria Espacial, devido seu caráter inovador e facilitador da aprendizagem, os quais ambos permitem manipulação e a visualização das construções em diversos panoramas, a criação de animações, o estabelecimento de conjecturas, a dedução de padrões e propriedades, e a verificação de resultados, caracterizando que os objetivos desejados da pesquisa foram alcançados.

Vale ainda ressaltar que este teve impacto positivo não só para as turmas envolvidas, mas também para toda escola, quando este a pedido da direção foi exposto no pátio da mesma para as demais turmas, como já citado anteriormente, os sólidos e a exposição em si chamou a atenção de muitos que não só visualizaram, mas pegaram os sólidos, brincaram e fizeram vários questionamentos, ao qual foram da melhor maneira possível explicado e respondido pelos alunos do 2º Ano, não só por meio de relato dos colegas professores, mas até no dia da exposição tiveram alunos que expressaram o desejo de estudar matemática assim, produzindo e criando os sólidos.

Assim, os três momentos desenvolvidos nesta pesquisa como sequência didática, fazem parte do Produto Educacional aqui apresentado, um paradidático proposto ao professor, não com objetivo de substituir o livro didático, mas disponibilizar a este, um material a mais com sugestões de tarefas, indicações para pesquisas e roteiros com passo a passo das dobraduras e para a utilização do software Poly Pro, que podem servir para complementar seu planejamento, enriquecendo suas aulas, podendo ser utilizado e adaptado ao contexto de sua escola ou turma a ser trabalhado.

Ressalta-se no entanto, que, para se ter um resultado satisfatório, o uso desses recursos apresentados devem ser planejados e organizados previamente, estabelecendo objetivos a serem alcançados com relação à aprendizagem, buscando promover, também, a interação entre os estudantes, deles com o professor, deles com os recursos, bem como a participação e o envolvimento de todos, constatando-se que o ambiente de participação e a ajuda mútua proporcionaram que os alunos evoluíssem dos conceitos espontâneos para os científicos. Inicialmente, estes alunos sequer lembravam dos nomes dos polígonos, nem dos poliedros, após interação e trocas de informações entre eles, passaram compreender a relação entre Geometria Plana à Espacial. Destaca-se, também, que pela mediação dos materiais, dos recursos didáticos e da professora, houve um maior aprendizado.

Logo, propor situações de aprendizagem que favoreçam trocas de ideias, interação social, e a interiorização de significados, fundamental para a formação de conceitos, segundo Vygotsky, caberá somente ao professor, essa busca por inovações que tirem o aluno da zona de conforto e os levem a fazer matemática, a produzir conceitos e se desenvolver cognitivamente. Reafirma-se então, que as metodologias empregadas e desenvolvidas em sala de aula, utilizando os diferentes recursos apresentados nesta pesquisa, sejam atividades práticas com o Origami, sejam softwares educacionais, e demonstrações para complementação do livro didático, enriquecem as aulas, motivando o aluno e consequentemente o professor à medida que esses apresentam maior interesse e, comprometimento, na construção de conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos. *A Geometria do Origami*: um estudo da Geometria das dobraduras (origami) com foco no relacionamento entre formas e 'fórmulas' matemáticas. 2000. 162 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2000.

AZEVEDO, Cláudio Márcio Medeiros de; COSTA, Agnela Kalina Silva da; SOUZA, Raissa Curinga de; COSTA, Francisco Hélio da; PAIM, Maria do Socorro Aragão. *Geometria com dobraduras: uma maneira lúdica de fixar os conteúdos matemáticos*. 2012. Disponível em: <https://docplayer.com.br/9259786-Geometria-com-dobraduras-uma-maneira-ludica-de-fixar-os-conteudos-matematicos.html>. Acesso em: 20 ago. 2022.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular- BNCC.* Brasília, DF: 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 28 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Ensino Médio). Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2000.

BRASIL. Secretaria Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. *Explorando Geometria com Origami* – Apostila OBMEP, 2010.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. *Explorando geometria com origami*. In: Bienal da SBM, 4, 2008.[S.l.: s.n.], 2008.

DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris* – Matemática – 6º ano, São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*: 6ª série. São Paulo: Ática, 2005.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica*. 6. ed. 7. reimp., São Paulo: Atual, 2005. v. 10.

FUSE, Tomoko. *Unit Origami*: Multidimensional Transformations. Tokyo: Japan Publications, INC, 1990.

GARTON, Alisson F. *Social interaction and the development of language and cognition.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.

GAZIRE, Eliane Scheid. *O não resgate das Geometrias*. 2000. 217 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GRAVINA, Maria Alice; FEIJÓ, Rodrigo Orestes; PINHO, Greice; PENTEADO, Tatiana; CARDOSO, Diego Kasper; ROSA, Alice Ribeiro Paz da. *Edumatec*: Educação Matemática e

Tecnologia Informática. Porto Alegre: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS, 2008.

HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. *Pequena História do Origami*. [s.d.] Disponível em: <https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em: 13 out. 2022.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. *Vendo e entendendo poliedros*: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros matérias concretos. 2. ed. Niterói: UFF, 2003.

KANEGAE, Mari. *Breve Histórico do Origami no Brasil*. [s.d]. Disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm>. Acesso em: 26 abr. 2020.

KATZ, Victor J. *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

KAWAMURA, Miyuki. *Polyhedron Origami*: for beginners. Tokyo: Nihon Vogue CO., LTD, 2001.

LANG, Robert J. *Origami Geometric and Constructions*. 2010. Disponível em: <https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2015.

LEONARDO, Fabio Martins de; SILVA, Willian Raphael. *Conexões com a matemática*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v. 2.

LORENZATO, Sérgio Apparecido. Por que não Ensinar Geometria?. *A Educação Matemática em Revista*, Campinas-SP, n. 4, p. 3-13, 1 sem. 1995.

MARQUES, Ramiro. *A pedagogia construtivista de Lev Vygotsky (1896-1934)*. 2007. Disponível em: <https://www.academia.edu/4627495>. Acesso em: 9 jul. 2022.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. *Origami*: Matemática e sentimento. 2004. Disponível em: <https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Artigos/apresentacao_geometria.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2022.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. *Vygotsky Aprendizado e desenvolvimento*: um processo Sócio histórico. São Paulo: Ed. Scipione, 1995.

PIMENTA, Anita Lima; GAZIRE, Eliane Scheid. *Construindo poliedros platônicos com origami*: uma perspectiva axiomática. Beau Bassin: Novas Edições Acadêmicas, 2018.

RAFAEL, Ilda. Origami. *Educação e Matemática*, n. 114, p. 16-22, 2011. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1968>. Acesso em: 5 mar. 2015.

RAFAEL, Ilda. Origami. *Educação Matemática*, Lisboa, n.111, p. 16-22, set/out. 2011.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do; GAUDENCIO JÚNIOR, Severino. *A geometria do origami*: atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2004.

RODRIGUES, Luciana Silveira. *O uso de Software Educacional no Ensino Fundamental de Matemática e a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal por alunos de 3ª série*. 2006. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Escolar e Formação de Professores) - Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2006.

SELAU, Bento; CASTRO, Rafael F. (Orgs.). *Cultural-historical approach*: educational research in different contexts. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2015.

SILVA, Aniete de Andrade; TRAJANO, Maria Lúcia da Silva. *Manual para Construção dos Poliedros de Platão com o Auxílio de Dobraduras*. Campina Grande: UFCG, 2013. Disponível em: <http://pibidmatematicaufcg.webnode.com/materiais-bibliograficos-/>. Acesso em: 15 mar. 2022.

SILVA, Guilherme Henrique Gomes da; PENTEADO, Miriam Godoy. Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade. *Ciência & Educação*, v. 19, n. 2, p. 279-292, 2013.

SILVA, Joelma Maria da; MASSARANDUBA, Dayane Marques da Silva. *Origami*: a Geometria das Dobraduras. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5, 2018, Recife. *Anais*.... Recife: CONEDU, 2018. p. 1-9. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/48432 >. Acesso em: 20 abr. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar Matemática*. São Paulo: FTD, 2010. v. 3.

TRIDAPALLI, Marília Pelinson. *Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular*. 2017.85 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. *A construção do Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes Editora, 2001.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. *Psicologia Pedagógica*. São Paulo: Martins Fontes Editora, 2010.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. *Teoria e método em psicologia*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *A formação social da mente*. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

APÊNDICE A - Termo de Livre Consentimento Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

Seu filho(a) está sendo convidado a participar da pesquisa: "**Potencializando o ensino de Geometria com o uso do Origami modular e o software Poly Pro na construção dos sólidos de Platão**" de responsabilidade da pesquisadora Jozeane C. M. Flôres e orientação do Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira. Esta pesquisa apresenta como objetivo: Oportunizar condições para o ensino dos sólidos de Platão, através da inserção e práticas do Origami, juntamente com o software Poly Pro, na intenção de potencializar o aprendizado do referido conteúdo. As atividades serão desenvolvidas durante aproximadamente 16 encontros no componente curricular de Matemática no espaço da escola e envolverá gravações de áudio/vídeo gravações dos encontros, entrevistas/aplicação de questionários/coleta de materiais produzidos pelos estudantes.

Esclarecemos que a participação do seu filho(a) não é obrigatória e, portanto, poderá desistir a qualquer momento, retirando seu consentimento. Além disso, garantimos que receberá esclarecimentos sobre qualquer dúvida relacionada à pesquisa e poderá ter acesso aos seus dados em qualquer etapa do estudo. As informações serão transcritas e não envolvem a identificação do nome dos participantes. Tais dados serão utilizados apenas para fins acadêmicos, sendo garantido o sigilo das informações.

A participação do seu filho(a) nesta pesquisa não traz complicações legais, não envolve nenhum tipo de risco, físico, material, moral e/ou psicológico. Caso for identificado algum sinal de desconforto psicológico referente à sua participação na pesquisa, pedimos que nos avise. Além disso, lembramos que você não terá qualquer despesa para participar da presente pesquisa e não receberá pagamento pela participação no estudo.

Caso tenham dúvida sobre a pesquisa e seus procedimentos, você pode entrar em contato com a pesquisadora do trabalho pelo e-mail jozeaneflores@gmail.com ou pelo telefone (69) 99920-2301 ou ainda, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo pelo e-mail ppgecm@upf.br.

Dessa forma, se concordam em participar da pesquisa, em conformidade com as explicações e orientações registradas neste Termo, pedimos que registre abaixo a sua autorização. Informamos que este Termo, também assinado pelas pesquisadoras responsáveis.

Rio Crespo, março de 2023.

Nome do participante:____

Data de nascimento: _____/_____/________

Assinatura do responsável: ____

Assinaturas da pesquisadora:____

APÊNDICE B - Questionário Inicial: Sondagem para averiguar conhecimento e interesse em relação a pesquisa

Questionário Inicial

Aluno(a)--/---------/2023.

1 – Você gosta de geometria?
( ) Não ( ) Sim, pouco ( ) Sim, regular ( ) Sim, muito

2 - Você considera importante estudar geometria?
( ) Não ( ) Sim, pouco ( ) Sim, regular ( ) Sim, muito

3 - O que é para ti uma boa aula de Geometria?
( ) uso do quadro e livro didático ( ) uso de Slides e vídeos
( ) uso de material manipulativo dobraduras ( ) Uso de tecnologias com software.

3 - Alguma vez já ouviste falar em Platão? Se a tua resposta for afirmativa descreve, brevemente, o que sabes.
( ) Não ( ) Sim, pouco
----

4 – Já ouviu falar em Origami Modular?
( ) sim. O que é o Origami?---
( ) Não

5 – Na escola você já fez alguma dobradura de papel?
( ) Sim. Em que disciplina?---
( ) Não

6 – Na disciplina de Matemática, você já usou dobradura de papel para aprender algum conteúdo? E/ou com outros materiais?
( ) Não ( ) Sim. Em quais conteúdos?---
Quais materiais? ---

7 – Você sabe construir algo a partir da dobradura de papel?
( ) Sim. O que sabe construir?---
( ) Não sei. Gostaria de aprender? ( ) Sim ( ) Não

8 – Você conhece o software Poly Pro?
( ) Sim ( ) Não

9 – Já estudou geometria fazendo uso de softwares matemáticos no computador, celular ou tablet? Quais?
( ) Não ( ) Sim ( ) Várias vezes ( ) Poucas vezes
R=---

10 – Gostaria de estudar geometria fazendo uso da tecnologia (Laboratório de informática com Softwares, Slides e videos)? Justifique sua resposta.
( ) Sim. ---
( ) Não---

APÊNDICE C - Questionário Final: Avaliar a metodologia utilizada com o Origami Modular e o Software Poly Pro

Questionário Final

Aluno(a)---/---------/2023.

1 – Você já conhecia a técnica do Origami?
( ) Apenas de ouvir falar ( ) Sim ( ) Não
( ) Outro -------------------------------------

2 – Você gostou de aprender conteúdos de geometria com o Origami? Justifique sua resposta.
( ) Sim. --
( ) Não. --

3 – Qual foi a sua maior dificuldade em trabalhar com o origami?
( ) foi compreender os axiomas ( ) foi na montagens dos sólidos
( ) foi entender os conceitos geométricos.

4 - O que achou do Software Poly Pro 1.12 para estudar as formas geométricas:
( ) bom ( ) ótimo ( ) nem sei ( ) não gostei

5 - Para você, o uso do *software* foi importante para a aprendizagem dos conceitos estudados?
( ) Pouco ( ) Regular ( ) Muito

6 - Você considera que o processo de ensino com o Origami e o software foi dinâmico e interativo?
( ) Não ( ) Sim, pouco ( ) Sim, regular ( ) Sim, muito

7 - Quando estuda geometria, prefere qual desses métodos? Assinale mais de um se quiser.
( ) Software no computador ( ) pesquisa internet ( )cópia do quadro de giz
( ) escrever no caderno ( ) livro de matemática ( ) Slides ( ) Origami

8 - Qual a importância da presença da professora no momento de estudar geometria?
( ) muito importante ( ) importante ( ) não importante

9 - Você teve dificuldade em fazer uso do computador durante a aula para explorar o *software Poly Pro* ?
( ) Pouca ( ) Regular ( ) Muita ( ) nenhuma

10 - Você considera que Origami modular e uso do Software Poly Pro contribuiu (facilitou) com a aprendizagem do conteúdo de geometria envolvendo sólidos regulares de Platão? Justifique sua resposta.
( ) Sim. ---

( ) Parcialmente.---

( ) Não. --

APENDICE D - Avaliação diagnóstica I e II: Verificar o nível de aprendizagem e pensamento geométrico dos alunos

Avaliação Diagnóstica I e II

Aluno(a)---/-------/ 2023.

1 - O que você entende por geometria? Já estudou geometria plana? E geometria espacial?

----

2 - O que é um poliedro? Onde podemos encontrar poliedros no cotidiano? Quais são os elementos de um poliedro?
R=---
----

3 - Classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas.
(   ) Todo trapézio também é paralelogramo.
(   ) Todo quadrado também é losango.
(   ) Todo losango também é quadrado.
(   ) Nem todo retângulo é quadrado.
(   ) Existem losangos que também são retângulos.
(   ) Todo retângulo também é quadrado.
(   ) Nem todo retângulo é paralelogramo.
(   ) Existem paralelogramos que também são trapézios.

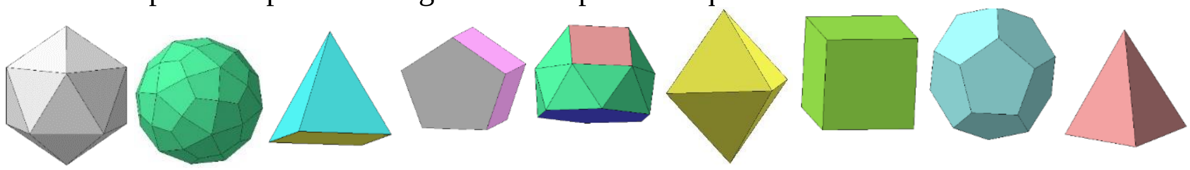
4- De acordo as informações
I - Um Hexaedro regular possui 7 faces quadradas.
II - Um dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais.
III - Um Tetraedro regular tem 4 faces triangulares.

Responda, qual alternativa verdadeira podemos afirmar:
a) (   ) I é verdadeira.   b) (   ) II é verdadeira.   c) (   ) III é verdadeira.
d) (   ) I e II são verdadeiras.   e) (   ) II e III são verdadeiras.
f) (   ) Todas são verdadeiras.

5- Para que um poliedro seja regular são necessárias três condições. Assinale as alternativas entre (V) verdadeira e (F) falsa:
I- Todo poliedro é convexo; (   )
II- Todo poliedro possui o mesmo número de aresta; (   )
III- A Relação de Euler é válida; (   )
IV- Vértice concorre com o mesmo número de aresta; (   )
V- Toda face possuir o mesmo número de aresta; (   )

6 - Qual é o número de vértices de um poliedro que possui 12 faces pentagonais e 30 arestas?
a) 10   b) 30   c) 15   d) 20   e) 5

7- Circule apenas os poliedros regulares e responda as questões abaixo:



a) Esses poliedros são regulares? Justifique.
R=---

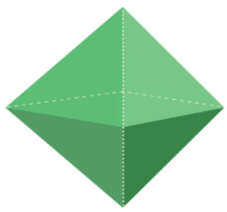
b) De acordo com a sua observação, quais polígonos compõe as faces desses poliedros?
R=--

c) Esses polígonos são congruentes? Justifique.
R=---

d) Determine o número de faces, arestas e vértices desses poliedros.
R=---

e) A Relação de Euler é válida para este poliedro? Justifique.
R=---

8 - Um garimpeiro encontrou uma pedra preciosa que possui o formato igual ao do poliedro a seguir:

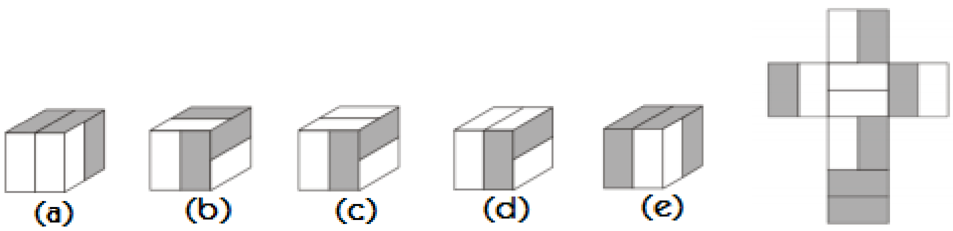


Analisando o poliedro a seguir, podemos afirmar que a soma do número de faces, vértices e arestas é igual a:

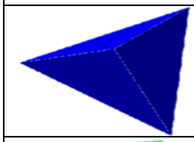
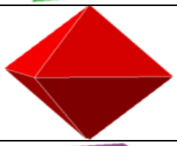
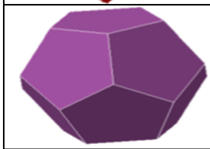
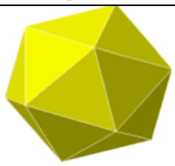
a) ( ) 26. b) ( ) 25. c) ( ) 24.

d) ( ) 23. e) ( ) 22.

9- Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?

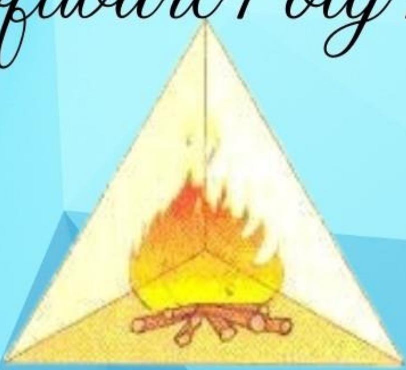


10- Completar a tabela abaixo:

Poliedro	**Face do Polígono**	**Nº. de Faces**	**Nº. de Arestas**	**Nº. de Vértices.**	**Nome do Poliedro**	**Relação de Euler V + F = A+2**
						
						
						
						
						

UPF
PPGECM
Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Matemática

Polygami: Uma proposta para o ensino da Geometria dos poliedros de Platão com o uso do Origami modular e do software Poly Pro.



Jozeane C. Moreira Flôres
Luiz Henrique F. Pereira.

Passo Fundo
2023

CIP – Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F634p Flôres, Jozeane Candido Moreira
Polygami [recurso eletrônico] : uma proposta para o ensinoda geometria dos poliedros de Platão com o uso do Origami modular e do software Poly Pro / Jozeane Candido Moreira Flôres, Luiz Henrique F. Pereira. – Passo Fundo: EDIUPF, 2023.
4.2 MB ; PDF. – (Produtos Educacionais do PPGECM).

Inclui bibliografia.
ISSN 2595-3672

Modo de acesso gratuito: http://www.upf.br/ppgecmEste material integra os estudos desenvolvidos junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), na Universidade de Passo Fundo(UPF), sob orientação do Prof. Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria espacial. 3. Poliedros. 4. Tecnologia educacional. 5. Origami. 6. Material didático. I. Pereira, Luiz HenriqueFerraz. II. Título. III. Série.

CDU: 372.851

Bibliotecária responsável Juliana Langaro Silveira – CRB 10/2427

Sumário

Apresentação

O produto educacional aqui apresentado é fruto de uma pesquisa de mestrado profissional, é um paradidático destinado ao professor, este propõe o uso da dobradura, o Origami modular como objeto manipulável para o ensino de geometria, com enfoque nos poliedros regulares de Platão, visando trabalhar formas e conceitos da geometria plana e espacial de forma atrativa e interativa, aliado à uma aprendizagem que faça uso das tecnologias digitais, e a sugerida aqui é o software geométrico Poly Pro na versão 1.12, ambos como instrumento metodológico com intuito de inovar, dinamizar, e, enfim, potencializar o ensino de conceitos geométricos referente aos sólidos regulares de Platão.

Este trará várias sugestões de atividades a professores que optam por práticas diferenciadas de trabalho em sala de aula, que buscam metodologias mais dinâmicas de acordo com habilidades e orientações sugeridas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em sua prática pedagógica, de modo a despertar o interesse e a curiosidade dos educandos por meio do uso do Origami e do software na construção dos polígonos e sólidos regulares, elaborados por eles mesmos, cujo objetivo é torná-los os principais agentes do processo de construção do conhecimento, assim como citado na teoria sociointeracionista de Vygotsky, que sugere uma interação com possibilidades de trocas de construção de conhecimentos, valorizando o contexto social do educando, sua relação com o outro, numa troca de experiências com a mediação do professor no intercambio e sistematização do conhecimento.

Esse produto educacional foi idealizado por mim, Jozeane Candido Moreira Flôres, numa dissertação de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, RS, intitulada “Potencializando o Ensino de Geometria com o uso do Origami modular e o software Poly Pro na construção dos sólidos de Platão” sob a orientação do professor Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira.

As atividades aqui sugeridas aos professores, foram idealizadas para alunos do 2º Ano do Ensino Médio, podendo ser adaptadas para multiplicar e fornecer resultados favoráveis em relação a aprendizagem e ensino de Geometria em outros contextos presentes no cenário educacional.

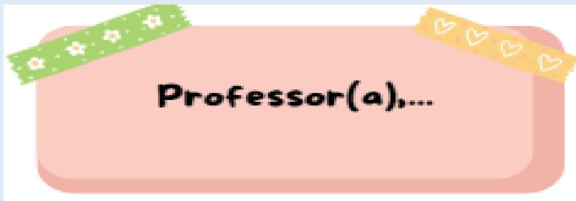
Este livro paradidático, produto dessa dissertação, será organizado em cinco unidades:

- Unidade I: Um pouco de História: Geometria, Platão e Origami;
- Unidade II: Construção e classificação de Polígonos;
- Unidade III: Curiosidades do Tangram com o Origami;
- Unidade IV: Poliedros Regulares de Platão;
- Unidade V: Sólidos geométricos e a tecnologia.

Estas unidades, apresentarão uma sequência de atividades, com o uso dos recursos do Origami modular e do software Poly Pro. Atividades pensadas e sequenciadas para promover o ensino da geometria que envolve os sólidos de Platão, por meio da dinamicidade e interatividade proporcionada com uso da tecnologia e do material manipulativo, a fim de verificar e oportunizar a aprendizagem dos alunos, ofertando ao professor um material que o auxilie nas dobraduras e que, ao mesmo tempo, lhe traga sugestões metodológicas a serem trabalhadas, que esses sejam úteis aos professores e suscitem o desejo de transformar as aulas de Matemática em encontros agradáveis.

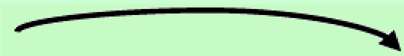
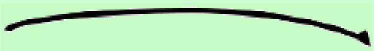
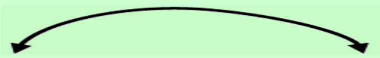
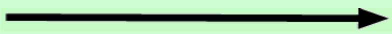
Destaca-se aqui que este PE teve diagramação própria da autora, que anseia por sua compreensão e que ele venha ser para si plausível e agradável, algumas das personalizações apresentadas foram produzidas no Canva (plataforma de design gráfico online), não poderia deixar de registrar ainda, que este Produto Educacional está disponível de forma livre e on-line na página do PPGECM e na EduCapes, para os professores da educação básica que o considerarem relevante, para se utilizar na íntegra ou em partes, modificando e/ou adaptando-o de acordo com os objetivos educacionais.

Figura 1 - Apresentação das unidades deste Produto Educacional.

Layout de apresentação Padrão das Unidades deste PE.	
Título de cada unidade Layouts semelhantes a estes, lhes apresentará cada unidade a ser apresentada neste PE.	
Dobrando conhecimentos Este balãozinho será um convite a dobradura, o qual aparecerá sempre que for lhe ensinar uma dobradura diferente.	
Hora do desafio Este lhes trará várias sugestões de Prática pedagógica para uso com os alunos.	
Professor(a),... Quando aparecer quadros iguais a esse, será dado sugestões metodológicas a você professor(a).	
Saiba mais Quando aparecer esse Balãozinho aparecerá indicações e curiosidades de pesquisas para você professor(a), no intuito de que entenda mais sobre o assunto tratado.	
Aprendendo com a tecnologia Este layout apresenta o Software Poly Pro e propostas de atividades a serem realizadas no laboratório de informática com o software.	
Material do Aluno Este layout retrata o material que será disponibilizado a você professor, para que venha ser reproduzido e utilizado na prática pedagógica ao qual for sugerido.	

Para se fazer um origami é preciso seguir um passo a passo, deixado através de imagens, que mostram a sequência de dobras que devem ser feitas. Esse passo a passo foi chamado de diagrama de símbolos demonstrados na tabela abaixo.

Figura 2 - Diagrama de símbolos para as dobraduras do Origami.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
	Linha vale (dobra para frente)
	Linha montanha (dobra para trás)
	Dobrar para frente
	Dobrar para trás
	Dobrar e abrir novamente (vincar)
	Encaixar
	Dividir em partes iguais

ALGUMAS DICAS PARA A EXECUÇÃO DAS ATIVIDADES SUGERIDAS

- As atividades abaixo vêm como uma sugestão da ação pedagógica. A todo momento, o docente pode intervir para a melhoria no processo ensino e aprendizagem;
- Pesquisar antes da elaboração da sequência didática as concepções prévias dos alunos acerca do tema;
- A problematização deve ser um espaço para a conversação entre os alunos e o professor;
- Oportunizar situações para que o educando assuma uma postura reflexiva e se torne sujeito do processo de ensino e aprendizagem;
- Reconhecer que nem todos aprendem no mesmo tempo, mas criam-se oportunidades para que ocorra futuramente;
- Ao usarmos diferentes metodologias e modalidades didáticas, atendemos as diferenças dos nossos alunos.

Um pouco de História

1. INTRODUÇÃO

Geometria

A palavra Geometria vem do grego *geo* "terra" e *metria* "medida". Na antiguidade, acreditava-se que a Terra era plana e, por isso, o significado "medida da terra".

Estudos relatam que desde as mais antigas civilizações já faziam o uso de algumas noções geométricas, por assim dizer, em suas atividades diárias, tanto na agricultura, em construções e no movimento dos astros.

No entanto, o testemunho de conhecimento mais antigo da Geometria são as construções das pirâmides e templos pelas civilizações egípcia e Babilônica. Contudo, muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, desde a Babilônia à China, passando pela civilização Hindu.

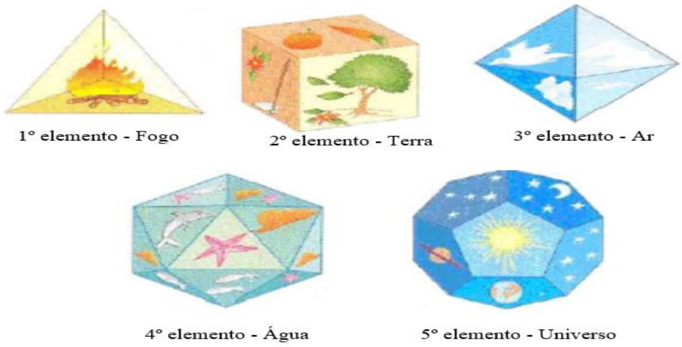
Platão

Comumente é dito que Platão, filósofo grego, teve muito entusiasmo com a Matemática em sua obra "Timaeus", na qual explana seus pensamentos sobre os sólidos em um possível encontro com o pitagórico Timeu de Locri. Neste diálogo, ele expôs suas ideias sobre os Poliedros Regulares, que ficaram conhecidos como Poliedros Platônicos.

> Este montou uma Academia em Atenas, considerada a primeira Universidade no mundo que continha, em sua porta de entrada, a seguinte escritura: a frase grega ΑΓΕΩΜΕΤRΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, cujo significado "Que nenhum ignorante de geometria entre aqui", demonstrando que apresentava relação entre o papel da geometria e a formação do espírito humano, (KATZ, 2010, p.67).

Acredita-se, também, que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros especiais: o Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Icosaedro e o Dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao Octaedro; terra, associada ao Hexaedro; fogo, associado ao Tetraedro; e água, associada ao Icosaedro. O quinto e último poliedro foi o Dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

Figura 3 - Representação das ideias de Platão e suas associações a elementos da natureza.



Fonte: Organizada pela autora a partir de <https://goo.gl/hMjqJb>

Origami

De origem japonesa, a palavra Origami significa dobrar papel. Prieto (2002) explica que *Ori*: dobrar – deriva do desenho de uma mão – e *Kami*: papel – provêm da representação de uma seda. Essa arte foi estabelecida por todo o mundo. No Brasil, é conhecida com dobradura, na língua espanhola como *papiroflexia*, no inglês como *paperfolding*.

Fonte: LUCAS, 2013.

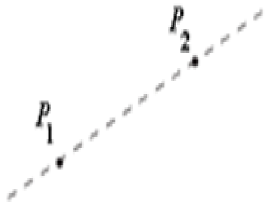
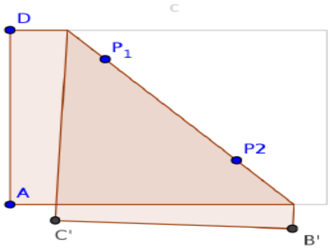
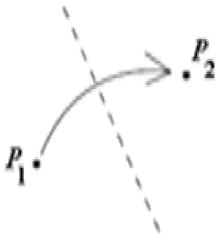
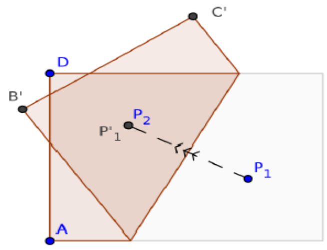
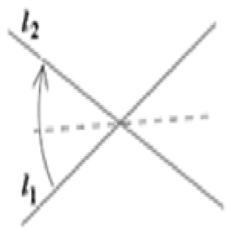
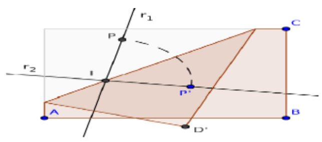
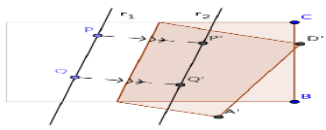
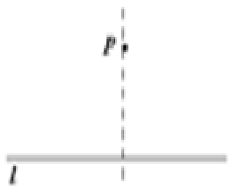
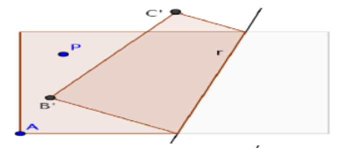
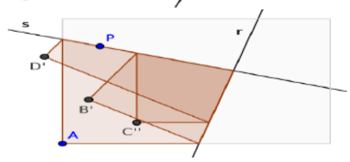
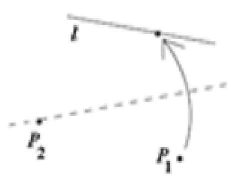
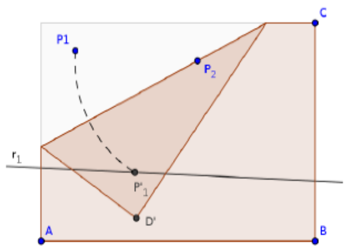
Acredita-se que essa arte seja tão antiga quanto à origem do próprio papel. O Origami pode ser simples ou modular, sendo o primeiro feito a partir de dobras em uma única folha de papel, e o segundo consiste no encaixe de diversas peças geometricamente iguais sem o uso de tesouras ou colas. Atualmente, está cada vez mais comum o uso de folhas retangulares para a construção de modelos poliédricos. O retângulo, cuja razão do lado maior para o menor é $\frac{1}{\sqrt{2}}$, é muito utilizado neste tipo de construção, uma vez que ele permite ampliações dos modelos com muita facilidade. Um exemplo bem popular desse retângulo é a folha A4, que, além de ideal, se torna acessível por ser facilmente encontrada no mercado e possuir baixo custo.

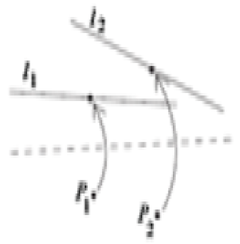
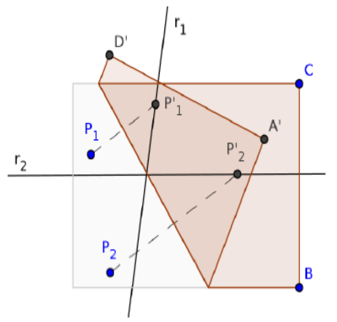
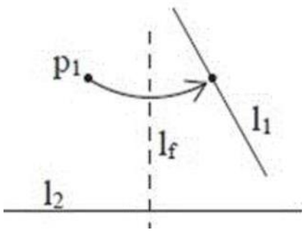
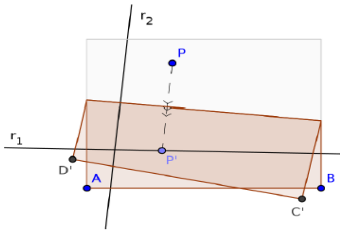
As construções geométricas tradicionais feitas por dobraduras também são regidas por um conjunto de axiomas que permite provar a existência de cada dobra possível de ser realizada. Rafael (2011) destaca o matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, da universidade de Pádua na Itália – nasceu no Japão, mas viveu muitos anos na Itália – que, na década de 70, criou as seis operações que ficaram conhecidas como axiomas de Huzita.

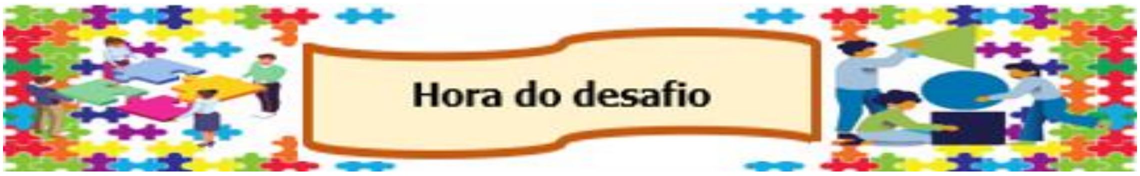
Em 2001, Koshiro Hatori mostrou uma dobragem diferente dos axiomas existentes, surgindo, então, o sétimo axioma.

Vejamos, na prática, como reproduzir os "Axiomas do Origami".

Quadro 1 - Representação dos Axiomas do Origami

Descrição dos axiomas	Diagramas	Corpo axiomático
Axioma 01 Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos, descrição semelhante ao primeiro postulado do livro 1 de Euclides.		
Axioma 02 Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que as torna coincidentes, propriedade justificada pelo quarto postulado do livro 1 de Euclides.		
Axioma 03 Dadas duas retas, I1 e I2, há uma única dobra que as torna coincidentes, justificado pelas sexta e sétima "noções comuns" do livro 1 de Euclides.		 
Axioma 04 Dados um ponto P e uma reta I há uma única dobra perpendicular a I que passa por P. Pode-se com este axioma determinar a menor distância entre uma reta e um ponto fora desta reta.		 
Axioma 05 Dados dois pontos, P1 e P2, e uma reta I, se a distância de P1 a P2 for igual ou superior à distância de P2 a I, então há uma única dobra que faz incidir P1 em I e que passa por P2.		

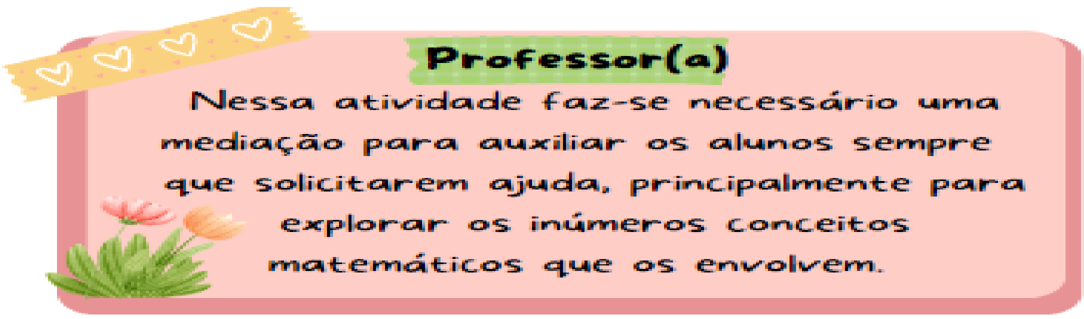
Axioma 06 Dois pontos P1 e P2, e duas retas I1 e I2, se não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma única dobra que incide P1 em I1 e P2 em I2 gerando os pontos P1’ e P2’.		
Axioma 07 Dado um ponto P e duas retas I1 e I2, se as retas não forem paralelas, há uma única dobra que faz incidir P em I1 e é perpendicular a I2.		



O objetivo dessa aula é que os alunos consigam adquirir um breve conhecimento sobre o corpo axiomático da Geometria do Origami., a fim de perceberem a importância da Matemática nessa técnica e os vários conceitos elementares da Geometria Plana que podem ser relembrados, como, por exemplo, pontos e retas coincidentes, retas paralelas, concorrentes e perpendiculares.

Conhecendo e construindo os axiomas do Origami

Seria interessante levar ao seu aluno um pouco de conhecimento sobre o que é o Origami, e, demonstrar a eles a existência dos sete axiomas de Huzita-Hatori, sugere-se então, que isso seja feito com o auxílio de um projetor de imagens.



1º - O slide a ser exposto deve vir com os sete axiomas descritos, porém sem os diagramas e sem o corpo axiomático, sem desenho algum, (diagrama disponível no “Material do Aluno”. Tendo apenas a descrição, os alunos não serão induzidos a simplesmente reproduzirem o que visualizavam, e, sim, fazê-los experimentando.

2º - Entregue pedaços de papel aos alunos e proponha, que experimentem, e tentem construir os origamis, que foram apresentados no slide.

Conhecendo um pouco sobre Platão e seus sólidos regulares.

Que tal analisarmos a importância que o filósofo matemático Platão teve na construção dos sólidos regulares? Assim, leve seu aluno a assistir aos vídeos sugeridos abaixo, disponível nos sites:

1. Um pouco sobre Platão. Duração: 8 min e 8 seg.
https://www.youtube.com/watch?v=tL36cKPQzsw

2. Os sólidos de Platão. (Mão na forma) Duração: 9min e 54seg
https://www.youtube.com/watch?v=oSEwrglbqnI

Professor(a)

Nessa atividade você pode levar seus alunos ao laboratório de informática, caso sua escola não disonibilize desse ambiente, faça download dos vídeos sugeridos e exponha-os em sala de aula com o projetor de imagens.

Refletindo sobre os vídeos

01 - Para essa reflexão sugere-se, que respondam algumas perguntas, tais como:

❖ Norma afirma que os gregos descobriram “coisas” incríveis. Quais foram essas descobertas? Você também as considera incríveis? Por quê? Quais são os triângulos elementares? Por que esses triângulos são importantes?

❖Norma teve uma experiência com os Hexaedros. Depois imaginou se cortasse o Hexaedro ao meio. Apareceram dois quadrados. E se Norma ao invés de cortar ao meio cortasse uma diagonal, o que apareceria? De acordo com Norma as partes do Hexaedro montadas em formas diferentes, formam um poliedro. Qual poliedro?

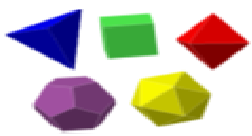
❖ Norma também pensou... Se a pirâmide tivesse todos os lados iguais, o poliedro formado seria o Tetraedro. Você concorda com Norma? Por quê?

❖ De acordo com Norma uma face do Tetraedro é igual a face da pirâmide de base quadrada. Então o Tetraedro se encaixa no Hexaedro. Concorda com Norma? Por quê?

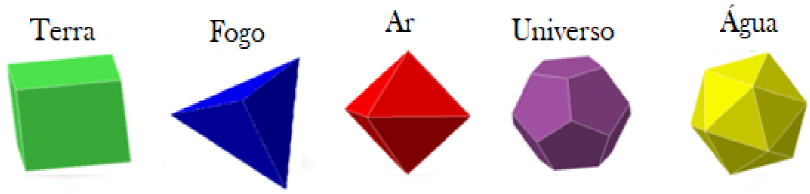
Caro(a) professor(a)

Após os alunos responderem as perguntas é possível verificar e confrontar as respostas em grupo. É possível ainda verificar quais respostas/situações surgirão a partir das atividades propostas.

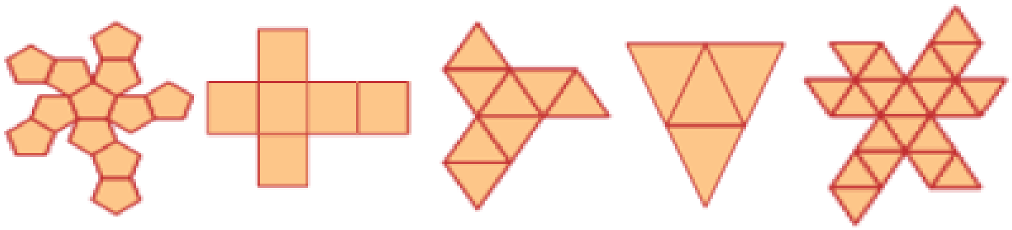
02– Platão relacionou os cinco **poliedros regulares** a cinco elementos da natureza: o Tetraedro (fogo), Hexaedro (Terra), Icosaedro (água), Octaedro (ar), dodecaedro (universo), para ele a Matemática, inclusive os sólidos cósmicos, estão presentes na natureza. Pesquise e investigue os porquês dessas relações em:(https://www.youtube.com/watch?v=B66EkzPshlY)



03 - Os sólidos a seguir são chamados de poliedros de Platão.



Segundo Platão, o seu criador, cada poliedro representava um elemento da natureza, observe agora, a planificação desses poliedros.



A sequência das planificações é:

a) Ar, Água, Fogo, Universo e Terra

b) Água, Terra, Fogo, Ar e Universo

c) Terra, Universo, Ar, Água e Fogo

d) Água, Ar Terra, Fogo e Universo

e) Universo, Fogo, Ar, Água e Terra.

Trabalhando figuras geométricas planas: Polígonos

O que são polígonos:

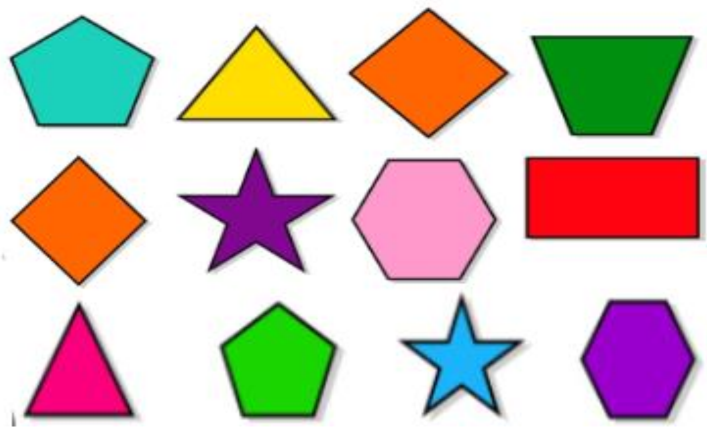
Um polígono é uma figura com formas geométricas **plana e fechada formada por segmentos de retas**, chamados de lados. De acordo com a quantidade de lados que as formam estas figuras possuem nomes e formatos diferentes.

Uma característica importante para reconhecer um polígono é saber que **seus segmentos de retas nunca se cruzam**, exceto nas extremidades, estes são estudados a fundo dentro da Geometria Plana, pois nela estudamos suas características, suas principais propriedades e o cálculo de suas áreas.

Quais são as formas geométricas?

As formas geométricas podem ser classificadas em planas ou não planas, dependendo se possuem duas ou três dimensões, respectivamente. Vejamos algumas das formas geométricas mais importantes.

Formas geométricas planas



Ainda, um polígono é um **polígono regular** quando é convexo e possui todos os lados e ângulos congruentes. Se pelo menos um lado não for congruente, o polígono é um **polígono irregular**.

Formas geométricas não planas

As formas geométricas não planas, também chamadas de **sólidos geométricos**, são objetos tridimensionais. Essas formas **possuem comprimento, largura e espessura**. São estudadas na Geometria Espacial.

TRIÂNGULOS

O triângulo é considerado uma das figuras mais importantes no estudo da Geometria. Ele é o menor polígono, em relação aos lados, que pode ser formado, sendo composto por três lados e três ângulos que são responsáveis por sua classificação. A ele são atribuídas várias relações métricas e a mais importante delas é o famoso Teorema de Pitágoras. Este revela que:

> **Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.**

As principais propriedades de um triângulo são:

❖ A medida de um lado deve ser sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados;

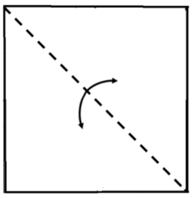
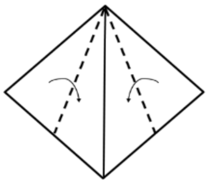
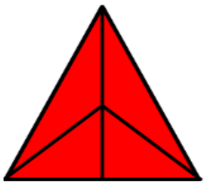
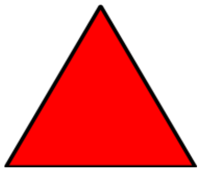
❖ A soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

❖ A medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma dos dois internos opostos a ele.

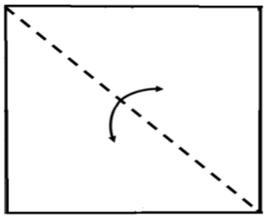
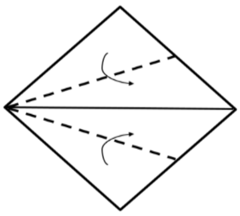
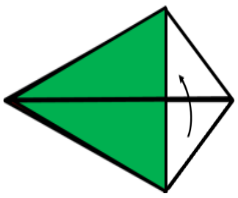
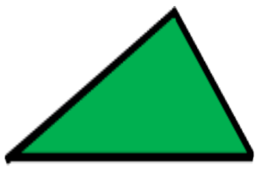
Professor(a)

Agora, é o momento de levar seu aluno a compreender melhor como classificar e conferir a aplicabilidade das propriedades dessa figura geométrica que acabamos de apresentar, vamos confeccioná-las com o Origami seguindo os passos nos diagramas abaixo.

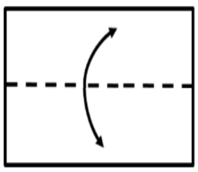
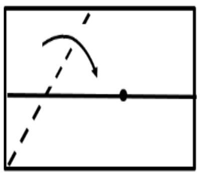
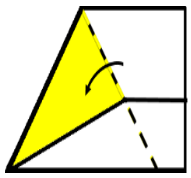
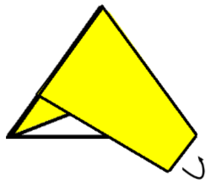
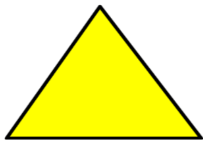
Quadro 2 - Construção do triângulo isósceles.

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES				
01- Utilize uma folha quadrada e obtenha sua diagonal.	02- Leve dois lados deste quadrado sobre a diagonal obtida.	03- Dobre para cima o vértice inferior.	04- Marque bem o vinco a fim de obter os vértices da base do triângulo (vire).	05- Está pronto seu Triângulo Isósceles (este, possui dois lados e dois ângulos congruentes).
				
Classificação: Classificando este Triângulo quanto aos ângulos, damos a ele o nome de Acutângulo, pois ele possui três ângulos agudos.				

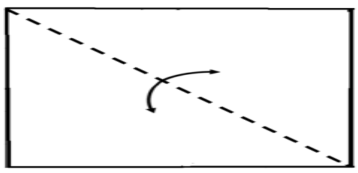
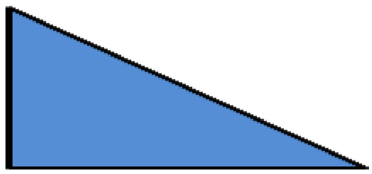
Quadro 3 - Construção do triângulo escaleno

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ESCALENO			
01- Utilize uma folha quadrada e obtenha sua diagonal.	02- Leve dois lados deste quadrado sobre a diagonal obtida.	03- Dobre sobre a diagonal.	04- Está pronto seu Triângulo Escaleno (este, possui os três lados e ângulos com medidas distintas).
			
Classificação: este Triângulo quanto aos ângulos, damos a ele o nome de obtusângulo, pois ele possui um ângulo obtuso.			

Quadro 4 - Construção do triângulo equilátero

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO				
01- Utilize uma folha retangular e dobre-a ao meio no sentido horizontal.	02- Leve o vértice superior esquerdo até a marca central obtendo um novo vértice inferior esquerdo.	03- Sobreponha o lado superior ao lado esquerdo da figura.	04- Dobre para trás a ponta excedente e em seguida a introduza dentro do módulo (vire).	05- Está pronto seu Triângulo Equilátero (triângulo que possui os três lados e ângulos congruentes).
				
Classificação: Classificando este Triângulo quanto aos ângulos, damos a ele o nome de Acutângulo, pois ele possui três ângulos agudos.				

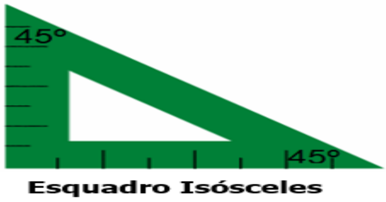
Quadro 5 - Construção do triângulo retângulo

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO	
01- Utilize uma folha quadrada e obtenha sua diagonal.	02- Está pronto seu Triângulo Retângulo (triângulo que possui um ângulo de 90°)
	
Classificação: Classificando este Triângulo quanto aos lados, damos a ele o nome de Isósceles, pois ele possui dois lados congruentes e quanto ao ângulo, damos a ele o nome de ângulo reto quando um dos seus ângulos internos forem de 90º.	

Professor(a)!! Veja mais sobre "Classificação de triângulos" em: **https://brasilescola.uol.com.br/matematica/classificacao-de-triangulos.htm** e, também em **https://www.youtube.com/watch?v=6CB1xgKRxX4**

Veja também: Vídeo da professora pesquisadora explicando como realizar as dobraduras dos triângulos. (Triângulo Isósceles, triângulo Escaleno, triângulo Equilátero e triângulo Retângulo). https://youtu.be/414nUqA539E

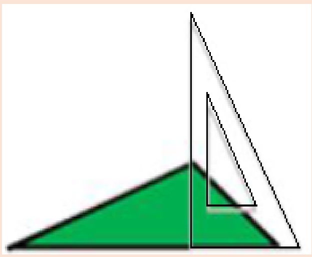
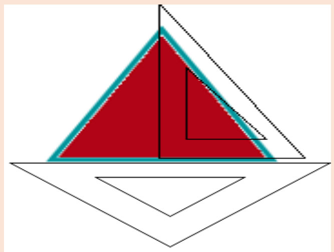
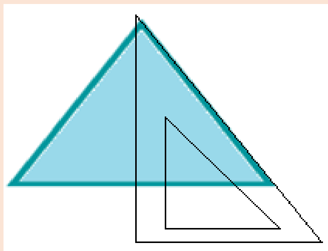
O par de esquadros é composto por duas peças geralmente triangulares: um triângulo retângulo escaleno e um triângulo retângulo isósceles.



Este instrumento é chamado de esquadro, é muito utilizado em aulas de Geometria eles possuem muitas utilidades dentre as quais se destacam o traçado de linhas perpendiculares / paralelas e a demarcação de ângulos e ainda é muito usado para Desenho Geométrico. Contudo, esta ferramenta didática preferencialmente graduada, pode auxiliar o traçado de cevianas em um triângulo. Observe:

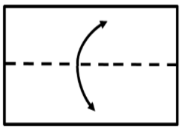
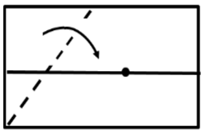
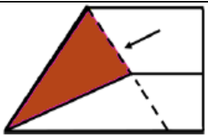
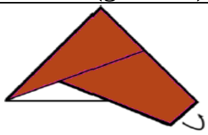
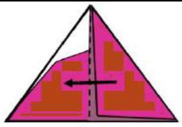
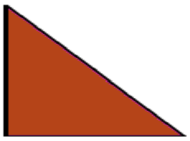
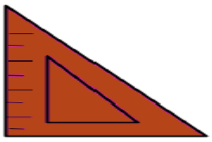
Cevianas são os segmentos que unem um vértice de um triângulo ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento.

Quadro 6 - Segmentos notáveis de um triângulo.

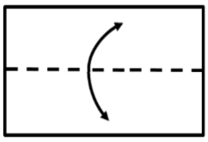
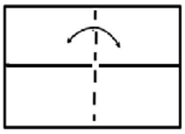
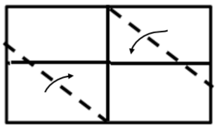
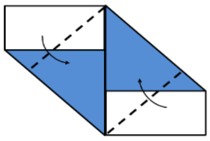
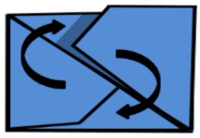
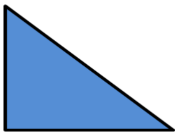
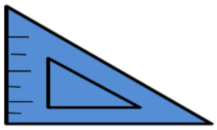
CEVIANAS ESPECIAIS - SEGMENTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO		
ALTURA	**BISSETRIZ**	**MEDIANA**
É o segmento de reta que une um de seus vértices ao seu lado oposto ou prolongamento formado com este, um ângulo de 90º 	É o segmento de reta que une um de seus vértices ao seu lado oposto dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos com medidas iguais. 	É o segmento de reta que une um de seus vértices ao seu lado oposto dividindo este lado em dois segmentos congruentes. 

Que tal aprender a fazer o par de Esquadros com Origami?

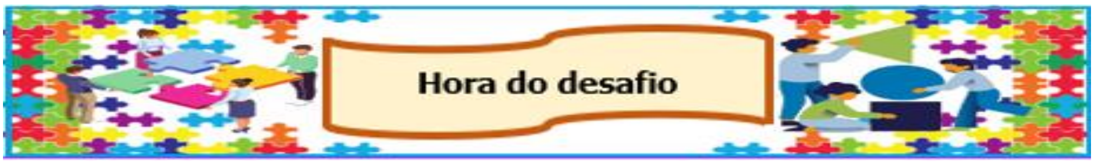
Quadro 7 - Dobradura do Esquadro Escaleno

CONSTRUINDO ESQUADRO ESCALENO				
1º -Utilize uma folha retangular A4 e dobre-a ao meio no sentido horizontal.	**2º**- Leve o vértice superior esquerdo até a marca central de modo a obter um novo vértice inferior esquerdo.	**3º** - Sobreponha o lado superior ao lado esquerdo da figura e em seguida introduza-o sob a “aba” obtida.	**4** - Dobre para trás a ponta excedente e em seguida a introduza dentro do módulo (gire 90°).	**5º** - Encaixe a “aba” do lado direito no “bolso” do lado esquerdo da figura...
				
6º - Está pronto seu Esquadro de 30º e 60º.	**6º** - 	**7º** - Com o auxílio de uma régua faça as devidas marcações de medida.	**7º** - 	

Quadro 8 - Dobradura do Esquadro Isósceles.

CONSTRUINDO ESQUADRO ISÓSCELES				
1º - Utilize uma folha retangular A4 e dobre ao meio no sentido horizontal.	**2º** - Agora dobre-a ao meio no sentido vertical.	**3º** - Leve o vértice superior direito e inferior esquerdo até o centro da figura.	**4** - Leve também ao centro os outros dois vértices.	**5º** - Encaixe as “abas”, como indica a figura ao lado.
				
6º - Está pronto seu Esquadro de 45º.	**6º** - 	**7º** - Com o auxílio de uma régua, faça as devidas marcações de medida.	**7º** - 	

Professor(a)!!, você pôde observar o passo a passo dessas dobraduras com diagramas, agora você acompanhará o vídeo da professora pesquisadora fazendo essa demonstração em: https://youtu.be/zglFhMfQ2iU



Ao desenvolver as dobraduras dos triângulos com seus alunos, sugere-se que faça um levantamento dos conhecimentos prévios destes em relação ao estudo de formas planas. Algumas perguntas provocativas e atividades podem ser utilizadas nessa etapa, tais como:

01- Preencha a cruzadinha utilizando os triângulos confeccionados com Origami, verificando a compreensão do seu aluno.

1 - Triângulo que possui um ângulo de 90°.

2 - O ângulo principal do triângulo retângulo.

3 - O triângulo equilátero tem ângulos...

4 - Que triângulo possui os três lados congruentes?

5 - Qual o menor polígono possível de ser formado?

6 - Qual o nome dos ângulos do triângulo acutângulo?

7 - Qual Triângulo possui um ângulo obtuso?

8 - Triângulo que possui três lados diferentes.

9 - Triângulo com dois lados congruentes.

BRINCANDO E APRENDENDO

1						**T**							
2						**R**							
3						**I**							
4						**Â**							
5						**N**							
6						**G**							
7						**U**							
8						**L**							
9						**O**							

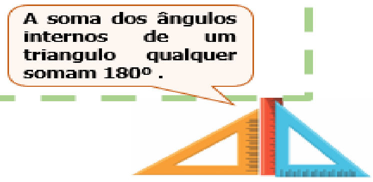
OBS: Segue modelo da cruzadinha para reprodução em anexo no “Material do aluno”.

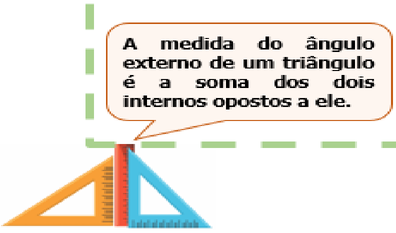
02- Analise as duas afirmativas abaixo, assinale a correta e justifique:

a) Todo triângulo isósceles também é equilátero.

b) Todo triângulo equilátero também é isósceles.

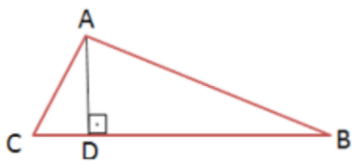
03- Utilize sua criatividade e as dobraduras que aprendeu para demonstrar as propriedades dos ângulos internos e do ângulo externo de um triângulo. Desenhe, colora ou faça uma colagem no quadro abaixo com sua solução:





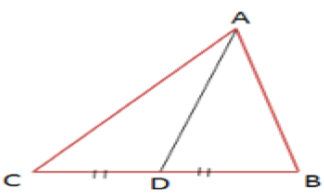
04- Analise as figuras e escreva o nome de cada ceviana traçada:

a)



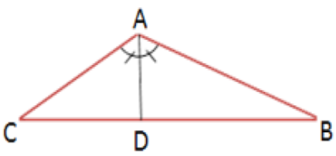
$\overline{AD}$ É ________________

b)



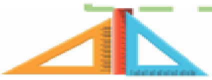
$\overline{AD}$ É ________________

c)

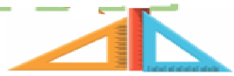


$\overline{AD}$ É ________________

05- Dobre um triângulo equilátero como mostrado anteriormente e com a ajuda do esquadro que você confeccionou vinque as três alturas relativas a cada lado desse triângulo. Escreva abaixo suas conclusões a respeito das cevianas marcadas.

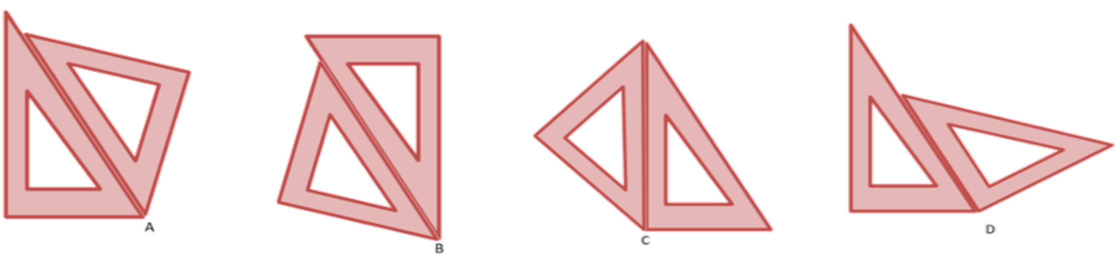


06- Repita o procedimento da questão anterior, porém, agora, utilize o triângulo isósceles. O que você pode concluir?



07- Utilize seu par de esquadros e diga quanto mede os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$:

a) b) c) d)



_______________ _______________ _______________ _______________

QUADRILÁTEROS

Quadriláteros são polígonos formados por quatro lados, muitos deles são especiais possuindo características importantes.
Possuem três classificações básicas:

Trapézios: Possuem um par de lados paralelos;

Paralelogramos: Possuem dois pares de lados paralelos.

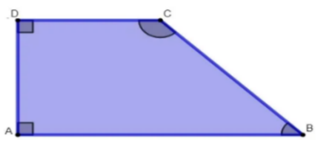
Outros: Não possuem lados paralelos;

Classificação do trapézio

Existem três possíveis classificações para um trapézio de acordo com o formato que ele possui. Sendo assim, o trapézio pode ser retângulo, isósceles ou escaleno.

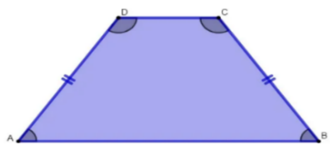
Trapézio retângulo

Possui dois ângulos retos medindo 90°.



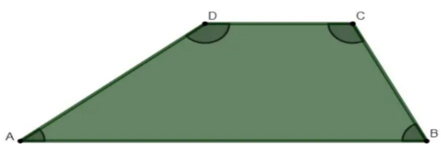
Trapézio isósceles

Possui os lados oblíquos congruentes, ou seja, os lados não paralelos possuem a mesma medida."

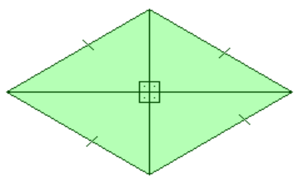


Trapézio escaleno

Possui todos os lados distintos.



Já nos paralelogramos, podemos destacar o **quadrado,** os **retângulos** e os **losangos**.



Todo quadrilátero possui duas diagonais. Essas, por sua vez, são segmentos que unem dois vértices não consecutivos. Observe suas propriedades abaixo:

1 – Os ângulos opostos de um **paralelogramo** são congruentes. Observe, na figura a seguir, que os ângulos opostos são aqueles que não compartilham lados do paralelogramo;
2 – Dois ângulos adjacentes de um **paralelogramo** são suplementares, ou seja, a soma dos dois é igual a 180 graus;
3 – As diagonais de um **paralelogramo** cruzam-se em seus pontos médios;
4 – Os lados opostos de um **paralelogramo** são congruentes (possuem a mesma medida).

Como os **retângulos** também são paralelogramos, as quatro propriedades já citadas também valem para qualquer retângulo.

Todo retângulo possui diagonais congruentes.

Os **losangos** são **paralelogramos** cujos lados são congruentes. Isso significa que seus lados possuem medidas iguais. Além disso, a propriedade que se refere unicamente aos losangos é a seguinte:

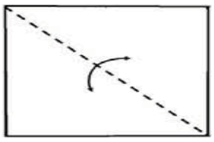
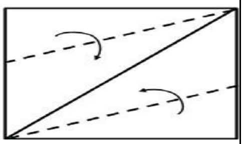
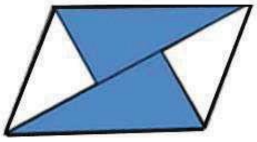
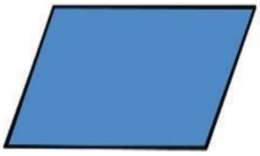
Todo losango possui diagonais perpendiculares.

Os **quadrados** são **paralelogramos** que possuem lados congruentes e ângulos de 90°. Isso significa que todo quadrado é também losango e retângulo ao mesmo tempo. Por isso, é propriedade dos quadrados:

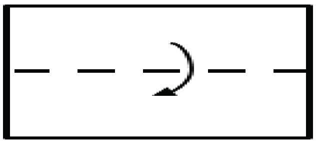
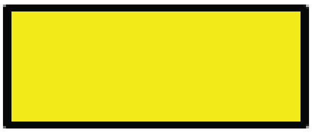
Todo quadrado possui diagonais congruentes e perpendiculares.

Depois de conhecer um pouco sobre os quadriláteros, é hora de realizar, na prática, dobras que resultarão em cada uma das figuras aqui apresentadas.

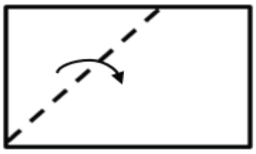
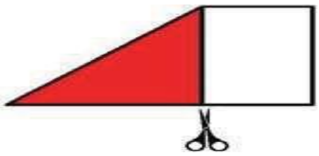
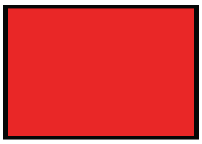
Quadro 9 - Dobradura do Paralelogramo

CONSTRUÇÃO DO PARALELOGRAMO			
01- Utilize uma folha quadrada e obtenha sua diagonal.	02- Dobre os lados superior e inferior rente à diagonal.	03- Vinque bem as laterais de modo que "abas" não se sobreponham no centro da figura (vire).	04- Está pronto seu Paralelogramo (quadrilátero que possui lados e ângulos opostos congruentes e paralelos).
			

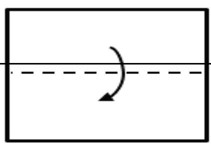
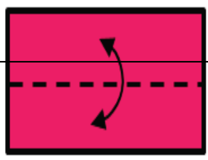
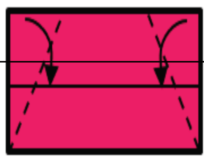
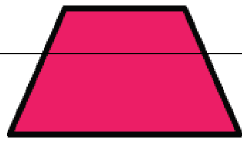
Quadro 10 - Dobradura do Retângulo.

CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO	
01- Utilize uma folha quadrada e dobre-a ao meio no sentido vertical.	02- Está pronto seu Retângulo (paralelogramo que possui ângulos internos iguais a 90°)
	

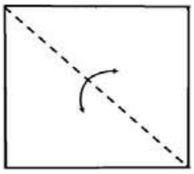
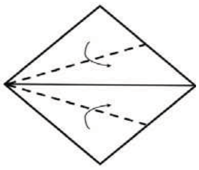
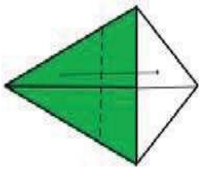
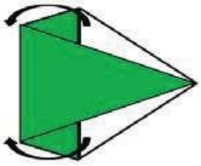
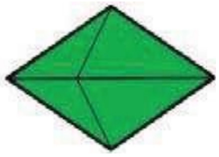
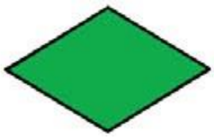
Quadro 11 - Dobradura do quadrado.

CONSTRUÇÃO DO QUADRADO		
01- Utilize uma folha retangular e dobre o vértice superior esquerdo rente ao lado inferior da folha retangular.	02- Recorte o excesso como indica a figura ao lado.	03- Está pronto seu Quadrado (paralelogramo que possui lados congruentes e ângulos internos iguais a 90°)
		

Quadro 12 - Dobradura do Trapézio.

CONSTRUÇÃO DO TRAPÉZIO			
01- Utilize uma folha quadrada e dobre-a ao meio no sentido horizontal.	02- Dobre ao meio novamente no sentido horizontal.	03 - Dobre os vértices superiores até o vinco formado, obtendo as trissetrizes dos respectivos ângulos inferiores.	04 - Está pronto seu Trapézio (quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos)
			

Quadro 13 - Dobradura do Losango.

CONSTRUÇÃO DO LOSANGO				
1º - Utilize uma folha quadrada e obtenha sua diagonal.	**2º -** Leve dois lados deste quadrado sobre a diagonal obtida.	**3º -** Leve um vértice ao outro como indica a figura.	**4 -** Retorne a dobra, trazendo consigo as aberturas nas laterais como indica a figura ao lado.	**5º -** Reforce bem os vincos (vire).
				
6º - Está pronto o seu Losango.	(paralelogramo de lados congruentes e ângulos opostos).			

Professor(a)!! Você pôde observar os diagramas para construção dos quadriláteros, agora acompanhe o vídeo da professora pesquisadora, fazendo essa demonstração.

https://youtu.be/dnN18KDMVpQ

Ao realizar as dobraduras dos quadriláteros com seus alunos, sugere-se que junto faça um apanhado de todos os conceitos geométricos envolvidos, para enfim sugerir as seguintes atividades e poder avaliar se ouve indícios de aprendizagem.

01- Utilize os quadriláteros que confeccionou através do Origami e preencha a cruzadinha abaixo:

1 - Polígono formado por quatro lados.

2 - Aberturas formadas pelos lados dos quadriláteros.

3 - Paralelogramo de lados paralelos congruentes e ângulos retos.

4 - Paralelogramo de quatro lados e quatro ângulos congruentes.

5 - Pontos de interseção de lados consecutivos de um quadrilátero.

6 - Quadrilátero que tem apenas um par de lados paralelos.

7 - Quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

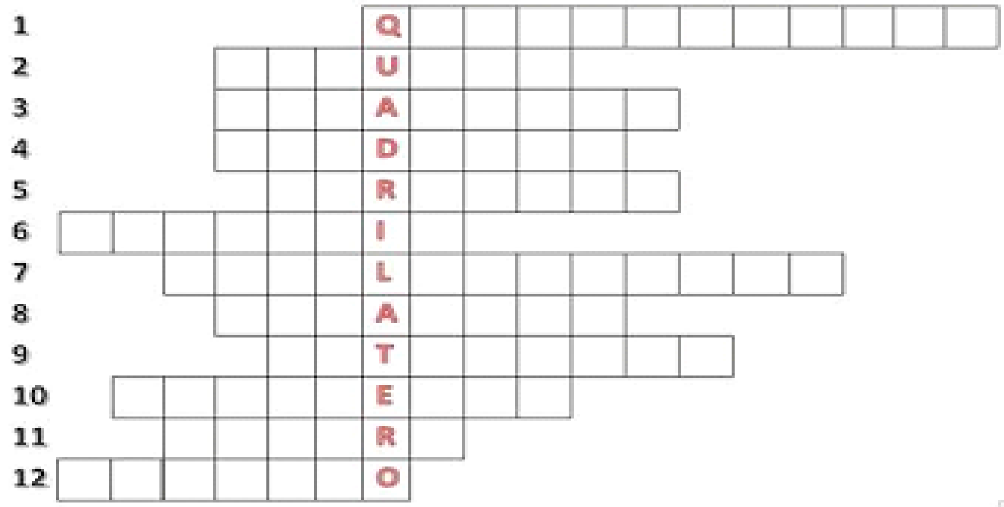
8 - Trapézio de quatro lados com medidas diferentes.

9 - Trapézio que tem dois ângulos retos.

10 - Trapézio que tem os dois lados não paralelos congruentes.

11 - Distância medida na perpendicular entre as bases do trapézio.

12 - Paralelogramo de quatro lados congruentes e ângulos opostos congruentes, sendo dois agudos e dois obtusos.



OBS: Segue modelo da cruzadinha para reprodução em anexo no "Material do aluno".

02- Classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas.

( ) Todo trapézio também é paralelogramo.

( ) Todo quadrado também é losango.

( ) Todo losango também é quadrado.

( ) Nem todo retângulo é quadrado.

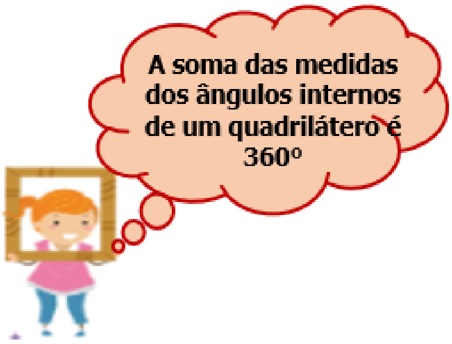
( ) Existem losangos que também são retângulos.

( ) Todo retângulo também é quadrado.

( ) Nem todo retângulo é paralelogramo.

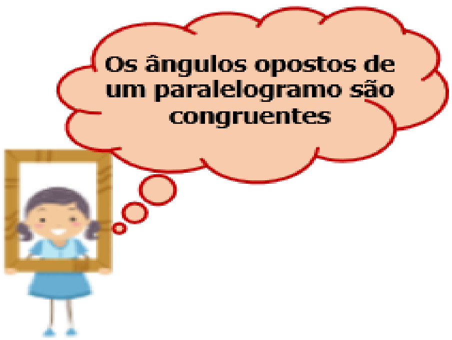
( ) Existem paralelogramos que também são trapézios.

03- Seguindo as orientações das dobraduras descubra as medidas dos ângulos internos do paralelogramo, do losango e do trapézio que você confeccionou, registre nos quadros abaixo, os procedimentos que o levou a esta conclusão.



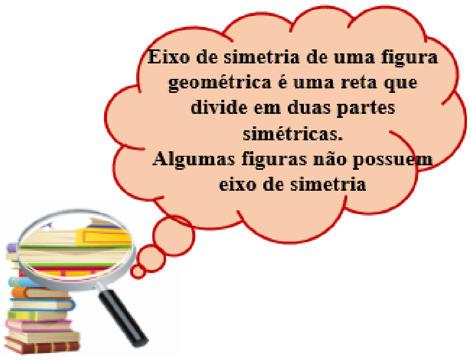
Paralelogramo

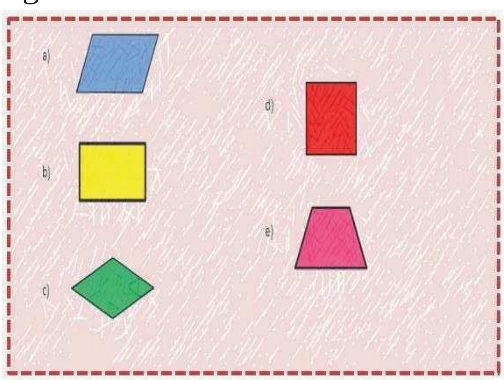
Trapézio



Losango

04- Com os quadriláteros que foram produzidos, identifique os eixos de simetria de cada um deles e marque os eixos sobre as figuras abaixo sinalizando com um X quando os mesmos se coincidirem com a diagonal.

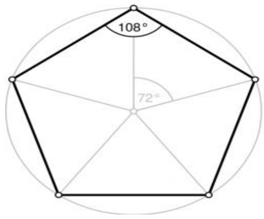




PENTÁGONOS

O que é um pentágono regular:

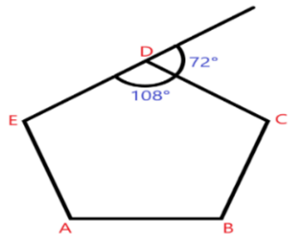
A geometria plana estuda basicamente este tipo especial de Pentágono que é uma **figura geométrica formada por cinco ângulos e lados**.



Nos estudos da geometria, os pentágonos (polígonos de cinco lados), podem ser divididos em **regulares** e **irregulares**. No caso de um pentágono regular, todos os lados e ângulos são de igual tamanho, sendo cada ângulo interno com a medida de 180º.

Ângulos do pentágono regular

Todos os ângulos internos deste pentágono medem 108° e todos os ângulos externos medem 72°.



Vejamos como são feitos os cálculos das medidas dos ângulos do heptágono:

Ângulo externo	**Ângulo interno**
$A_e = \frac{360^0}{n}$ $A_e = \frac{360^0}{5}$ $A_e = 72°$	$A_i = 180° – A_e$ $A_i = 180° – 72°$ $A_i = 108°$

Número de diagonais do pentágono regular

Este pentágono possui apenas 5 diagonais e o cálculo é feito da seguinte forma:

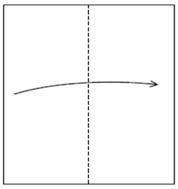
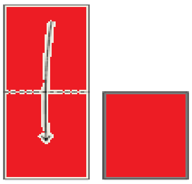
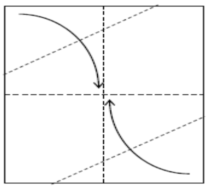
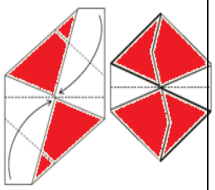
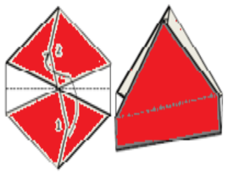
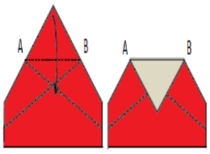
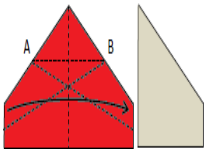
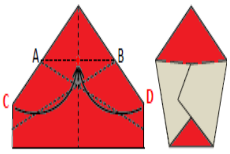
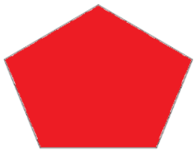
$$d = \frac{n.(n-3)}{2} \quad d = \frac{5.(5-3)}{2} \quad d = \frac{5.2}{2} \quad d = \frac{10}{2} \quad d = 5$$

Área do pentágono

Podemos calcular a área de um pentágono regular através da seguinte fórmula matemática:

$$A = \frac{a^2.\sqrt{25+10.\sqrt{5}}}{4}$$

Quadro 14 - Dobradura do Pentágono.

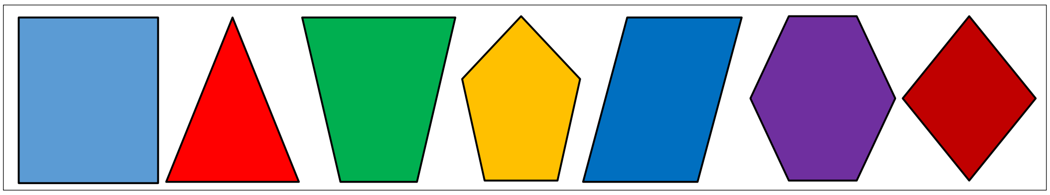
CONSTRUINDO O PENTÁGONO				
1º - A partir de uma folha retangular obtenha a mediatriz.	**2º-** Dobre -ao meio novamente. Obtém-se as duas mediatrizes.	**3º -** Dobre os vértices superiores esquerdo e inferior direito ao centro da folha.	**4-**Una, os vértices superiores esquerdo e inferior direito e marque novamente ao centro da folha.	**5º -** Dobre ao meio encaixando a parte um por baixo da parte dois.
				
6º - Faça uma dobra que passa pelos pontos A e B.	**7º -** Dobre a peça ao meio e desdobre	**8º**- Leve C e D ao ponto indicado	**9º**- Está pronto seu Pentágono**.**	
				

Professor(a)!! Você encontrará os nomes de todos os polígonos de três a vinte lados em: https://www.ufrgs.br/reamat/PreCalculo/livro/g-poligonos.html

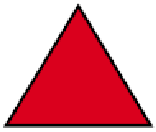
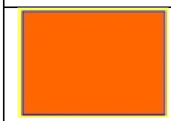
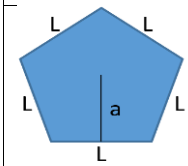
Sugestão de Leitura: FAINGUELERNT, E.K; NUNES, C.A.R.A. Fazendo Arte com a Matemática. 2ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2015. https://books.google.com.br/books?hl=ptBR&lr=&id=nxyvCQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=FAINGUELERNT,+E.K%3B+NUNES,+C.A.R.A.+Fazendo+Arte+com+a+Matem%C3%A1tica.+2%C2%AA+Edi%C3%A7%C3%A3o.+Porto+Alegre:+Artmed,+2015.&ots

Veja também: Vídeo produzido pela professora pesquisadora com o passo a passo da dobradura do Pentágono demonstrado nos diagramas acima: **https://youtu.be/ip2vuyq8UyI**

01 - Escreva o nome de cada figura, o número de faces, vértices, arestas e ângulos?



02 - A partir dos Polígonos elaborados, complete a tabela abaixo com a nomenclatura da figura poligonal, quantidade de lados, quantidade de diagonais, cálculo do perímetro e da área de cada um.

POLIEDRO	NOME DO POLÍGONO	Nº. DE LADOS	Nº. DE DIAGONAIS	PERÍMETRO	ÁREA
	Triângulo	3	0	Soma das medidas dos lados	$\frac{BASE\ X\ ALTURA}{2}$
	Quadrado	4	2	Soma das medidas dos lados	LADO X LADO OU $(LADO)^2$
	Pentágono	5	5	Soma das medidas dos lados.	5 x Lado x apótema
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

❖ Área de polígonos: https://www.todamateria.com.br/area-dos-poligonos/

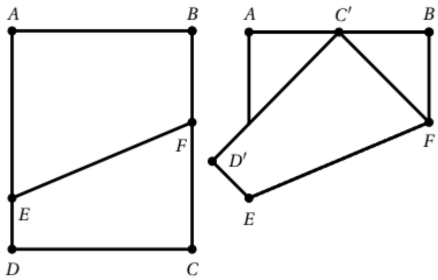
Caro(a) professor(a)

A partir dos três polígonos presentes nos Poliedros de Platão, sugere-se complementar o quadro da atividade 02, incluindo os polígonos que faltam, como hexágono, heptágono, até o icoságono.

❖ Ficará sempre a critério do professor o quanto ele pode aprofundar o assunto.

03 - Vamos dobrar papel?! O retângulo ABCD de medidas AB = 240cm e BC = 288cm representa um papel que será dobrado pelo segmento EF, onde E pertence a AD e F pertence à BC, de modo que o ponto C ficará sobre o ponto médio de AB.

a) Qual o comprimento de CC’?



EF divide o segmento CC’ ao meio e é ortogonal a ele.

Como o 4CBC’é retângulo em B, pelo Teorema de Pitágoras, temos $CC' = \sqrt{120^2 + 288^2} = 312\,\text{m}.$

b) Qual o comprimento de EF?

Tomando G ∈ BC tal que EG ⊥ BC, podemos concluir que o 4EFG é semelhante ao 4CC0B. Assim

$$\frac{EF}{EG} = \frac{CC'}{BC}$$
$$\frac{EF}{240} = \frac{312}{288}$$
$$EF = 260\,\text{m}.$$

04 – Vamos descontrair um pouco descobrindo quantos polígonos existem no caça palavra abaixo.

P	E	N	T	Á	G	O	N	O	D	B	F
O	U	N	D	E	C	Á	G	O	N	O	D
A	T	R	A	P	É	Z	I	O	T	O	O
A	M	I	T	H	E	S	H	E	R	C	D
O	Q	U	A	D	R	A	D	O	I	T	E
N	I	E	A	O	Y	R	N	N	Â	Ó	C
R	O	I	O	B	R	S	A	N	N	G	Á
E	F	T	N	N	V	I	I	L	G	O	G
C	A	A	M	O	B	M	A	S	U	N	O
O	W	R	E	T	Â	N	G	U	L	O	N
T	H	H	E	X	Á	G	O	N	O	R	O
R	H	T	L	O	S	A	N	G	O	Y	A

a) Escreve o nome dos polígonos que foram encontrados no caça palavras.

R=--

----

b) Faça o desenho dos polígonos encontrados com pelo menos três tamanhos diferentes, calcule os ângulos internos e área de cada polígono.

R= --

Curiosidade do Tangram com Origami

TANGRAM

O objetivo do jogo aqui sugerido é proporcionar ao aluno um momento mais lúdico com desafios geométricos, vindo a ser um grande aliado da Matemática, com ele, é possível reconhecer, compor e decompor figuras; explorar o cálculo de áreas e perímetros; incentivar o estudo dos ângulos; demonstrar o Teorema de Pitágoras; dentre outros, ele é composto por 7 peças geométricas: sendo 2 Triângulos Grandes, 1 Triângulo Médio, 2 Triângulos Pequenos, 1 Quadrado e 1 Paralelogramo. E a única regra do jogo é que as peças sejam unidas sem que haja sobreposição das mesmas.

O que conta a lenda?

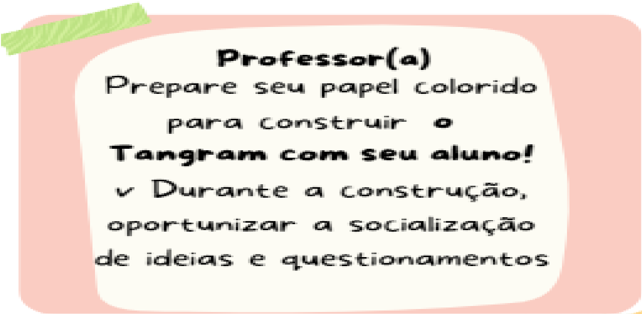
Existem várias lendas sobre a história do Tangram, em uma dessas lendas, conta-se que um imperador chinês, cansado de tanto tédio, chamou um de seus servos e ordenou que este saísse por seu império e desenhasse em uma cerâmica quadrada toda a beleza que ele encontrasse em seu caminho.

Assim o servo fez, seguiu em sua importante missão. Porém, ao tropeçar em uma pedra, antes mesmo de deixar o palácio, deixou a cerâmica cair de suas mãos quebrando - a em sete pedaços.

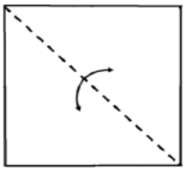
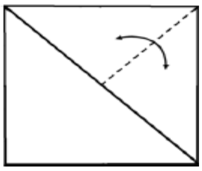
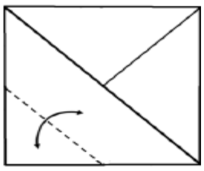
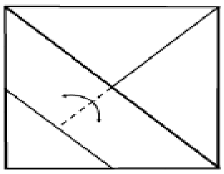
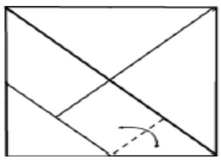
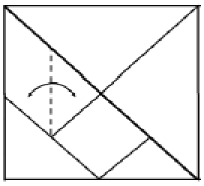
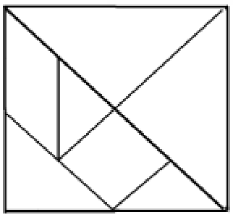
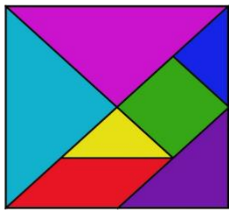
O pobre homem, temendo ser castigado pelo imperador, mais do que depressa, tentou reunir as peças e formar novamente o quadrado, porém, a cada tentativa o servo percebia que se formava ali uma figura diferente, maravilhado com tantas imagens que conseguira montar, foi de encontro ao imperador mostrar-lhe sua grande descoberta.

O imperador estranhou tamanha agilidade do servo, por voltar tão rápido e, percebeu que em suas mãos havia apenas pedaços da cerâmica que lhe fora entregue, o humilde servo mostrou ao imperador que ele não precisava percorrer toda a china para retratar- lhe as belezas daquele lugar, bastava que aquelas sete peças fossem unidas com criatividade e as mais belas figuras se formariam.

O imperador ficou encantado com tamanha descoberta e deu o nome de Tangram àquele mágico quebra-cabeças. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas, onde uma delas, com certeza, seria a paciência.



Quadro 15 - Dobradura do Tangram.

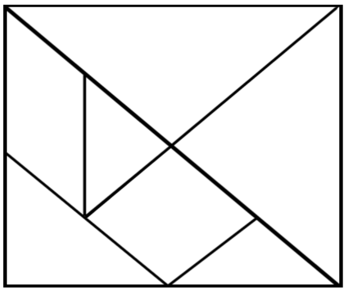
CONSTRUINDO O TANGRAM				
1º - A partir de uma folha quadrada obtenha a diagonal.	**2º-** una os vértices superior esquerdo e inferior direito, faça o vinco até o limite da diagonal obtida.	**3º -** Leve o vértice inferior esquerdo até o centro do quadrado e obtenha a dobra.	**4-**Una, os vértices superior esquerdo e inferior direito e marque o vinco até o limite da última dobra obtida.	**5º -** Leve o vértice inferior direito até o centro da figura e marque o vinco entre as duas dobras existentes.
				
6º - Encontre o lado esquerdo do quadrado com seu centro e faça um vinco entre as dobras existentes.	**6º-** 	**7º -** Está pronto seu Tangram (quebra-cabeças chinês composto por sete peças geométricas).	**7º-** 	
Sugestão: Realizar a montagem em grupo com folhas de diversas cores, ao finalizar recorte as peças e troquem entre si para que tenham um Tangram bem colorido.				

Para saber mais, assista ao vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=ae7fVotMQ3Y

❖ Você pode levar o seu aluno ao laboratório de informática aprender brincando no endereço: **https://rachacuca.com.br/raciocinio/tangram/**

Veja também: Vídeo explicativo da professora pesquisadora com as dobraduras do Tangram, demonstrado nos diagramas acima: https://youtu.be/_xQqD6jq5-U

01 – Antes de utilizar seu quebra-cabeças geométrico para formar diversas figuras, marque os ângulos internos de cada uma das 7 peças que o compõem.

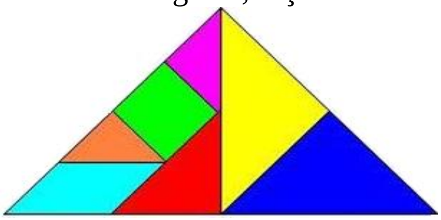


Em um quadrado as diagonais também são bissetrizes.

A soma dos ângulos de um triângulo é 180° e do quadrilátero é 360º.

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

02 - Em grupo, com as peças de três Tangrans, façam três montagens iguais a essa.

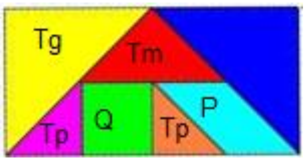


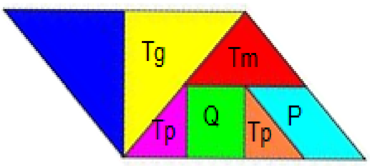
03 – Observar os triângulos confeccionados na atividade anterior: Movimentando apenas uma peça, tente transformar um triângulo em um:

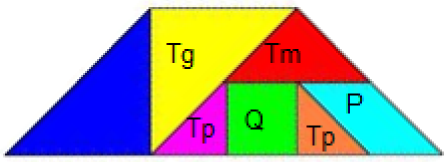
a) retângulo b) trapézio c) paralelogramo

d) escreva o que fez em cada uma das tentativas escrevendo as diferenças e semelhanças entre as três figuras.

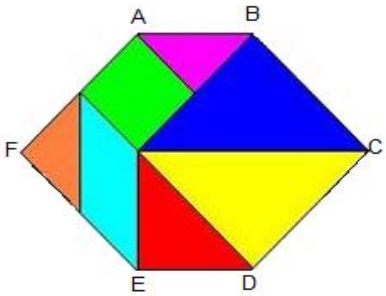
Professor(a)!! Peçam que os alunos movimentem apenas uma peça (o triangulo grande). Oriente-os a retornarem o triângulo inicial sempre que uma hipótese for descartada.







04 – Construir um Hexágono com as 7 peças do Tangram e informar a medida dos ângulos internos desse polígono.



Â ______________________

B̂ ______________________

Ĉ ______________________

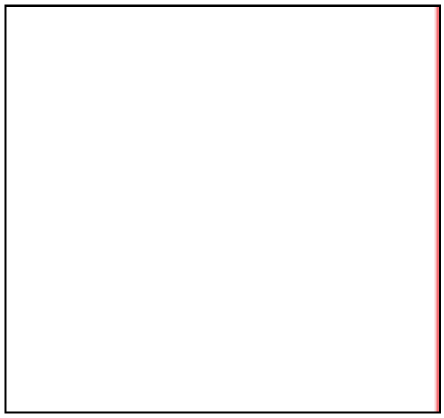
D̂ ______________________

Ê ______________________

F̂ ______________________

05 – Usar a superfície do Tangram para montar e responder:

Superfície do Tangram



a) Quantos triângulos grandes eu preciso para cobrir a superfície do Tangram? Que fração ela representa? (4T)

b) Quantos triângulos médios eu preciso para cobrir a superfície do Tangram? Que fração ela representa? (8T)

c) Quantos triângulos pequenos eu preciso para cobrir a superfície do Tangram? Que fração ela representa? (16T)

d) Quantos quadrados eu preciso para cobrir a superfície Tangram? (8Q)

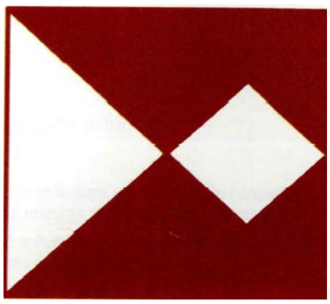
e) Quantos paralelogramos eu preciso para cobrir a superfície Tangram? (8P)

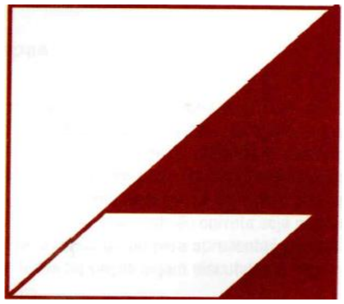
Professor(a)

Nesta atividade voce deixará seu aluno fazer por tentativas, fazendo uso das peças do Tangram que foi confeccionado por eles, quando preciso, faça intervenções de modo a auxiliá-los, você pode ainda, fazer o download do vídeo explicativo abaixo e projetar em sala para correção.

https://www.youtube.com/watch?v=ae7fVotMQ3Y

06 - Usando as peças do Tangram, descubra de quantas maneiras diferentes é possível preencher os espaços em branco da figura.

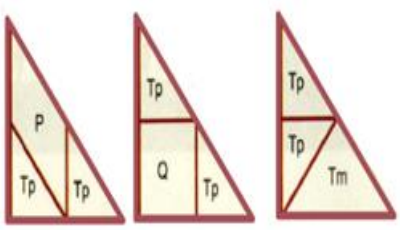




Respostas

Figura 1

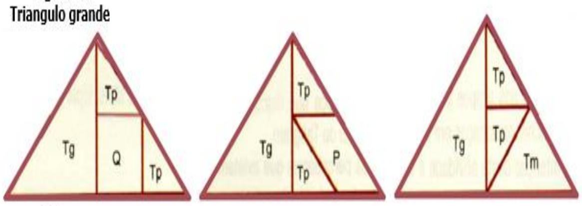
Triangulo grande



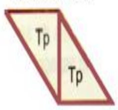
Quadrado

Figura 2

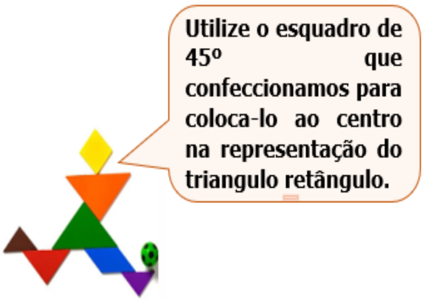
Triangulo grande

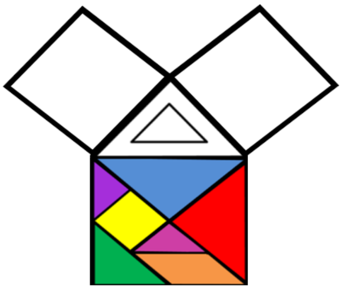


Paralelogramo



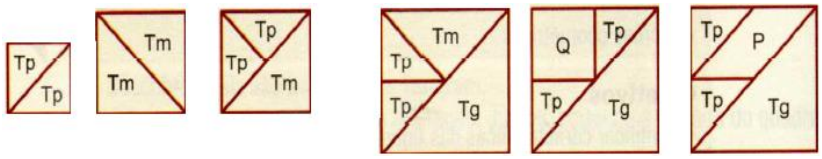
07 - Utilize seu Tangram para demonstrar o famoso Teorema de Pitágoras.



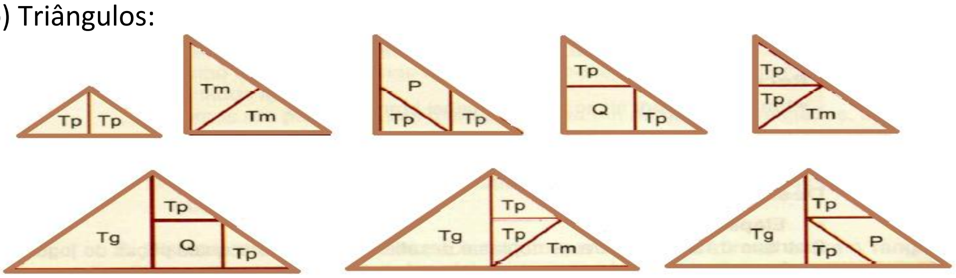


08 – Em duplas utilize o jogo que você acabou de confeccionar e investiguem as formas possíveis de serem construídas com duas, três ou quatro peças do Tangram, começando por:

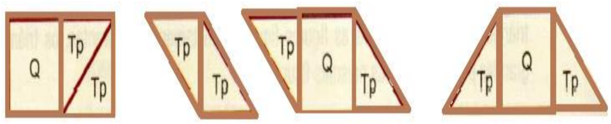
a) Quadrado:



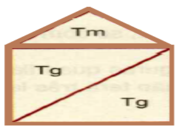
b) Triângulos:



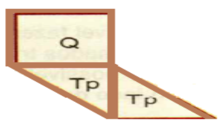
c) Outros quadriláteros:



d) Pentágono:



e) Hexágono:



Professor(a)!! Veja mais sugestões de exercícios sobre Tangram em:
http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=175

Veja também: Jogos matemáticos de raciocínio

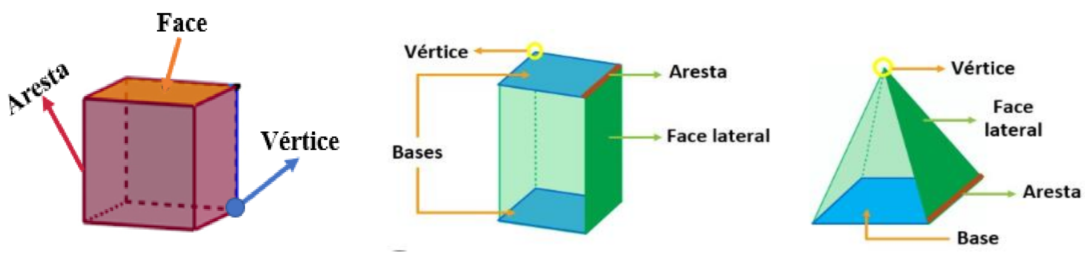
http://iffmauricio.pbworks.com/w/page/57045945/Jogos%20Matem%C3%A1ticos%20de%20Racioc%C3%ADnio

Trabalhando figuras geométricas espaciais: Poliedros

Esta unidade foi destinada à construção dos cinco Sólidos Regulares, os poliedros de Platão, a partir de dobras feitas com o Origami. No decorrer dessas construções o professor deve abordar conceitos importantes da Geometria plana aos alunos, pois, ao realizarem as dobraduras, estes se familiarizam com as formas geométricas, realizam movimentos que as transformam e exploram propriedades através das simetrias realizadas. Conceitos como retas perpendiculares e paralelas, ângulos e bissetrizes, figuras planas que trazem consigo a intenção de contribuir com o estudo da Geometria Espacial, dos quais já foram abordados anteriormente.

Poliedros

Os **poliedros** são formas tridimensionais cujas faces são polígonos. Os segmentos que delimitam as faces são chamados de arestas, e as extremidades dos segmentos são os vértices do poliedro. Exemplos comuns de poliedros são o **cubo**, o **prisma** e **pirâmide**.



Um poliedro pode ser chamado de poliedro **convexo** se dados dois pontos quaisquer em seu interior, o segmento com extremidades nesses pontos também está no interior do poliedro. Uma propriedade importante dos poliedros convexos é que eles satisfazem a **Relação de Euler** ($V + F = A + 2$). Quando isso não ocorre, o poliedro é um **poliedro não convexo**.

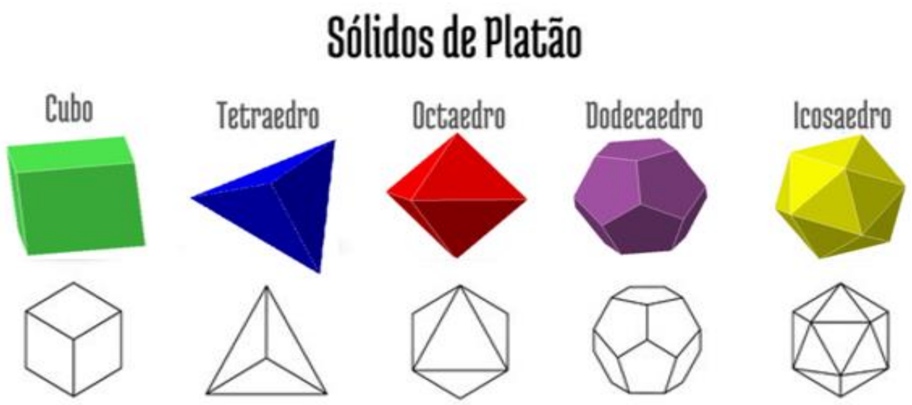
Além disso, um poliedro é um **poliedro regular** se todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes e se os ângulos são congruentes. Existem cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, cubo (hexaedro regular), octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular. Quando o poliedro não atende a esses critérios, é um **poliedro irregular**.

Poliedros regulares ou Sólidos de Platão

Os sólidos de Platão são poliedros que satisfazem três condições:

- são poliedros convexos;
- todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- todos os vértices são extremidades do mesmo número de arestas.

Consequentemente, existem cinco classes de sólidos de Platão: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Navegue e saiba: https://www.youtube.com/watch?v=oSEwrglbqnI

Vídeo sinfonia dos poliedros https://www.youtube.com/watch?v=WG0e57Dpe_g

Professor(a)

Você pode dar inicio nesta unidade com o vídeo sinfonia dos poliedros citado acima aos seus alunos, finalize com um diálogo, reforçando que os poliedros de Platão são poliedros regulares; convexos; todas as faces tem o mesmo número de arestas (faces são polígonos regulares congruentes); que em cada vértice concorre o mesmo número de arestas e que percebam que todo poliedro regular é sólido de Platão, mas nem todo sólido de Platão é poliedro regular.

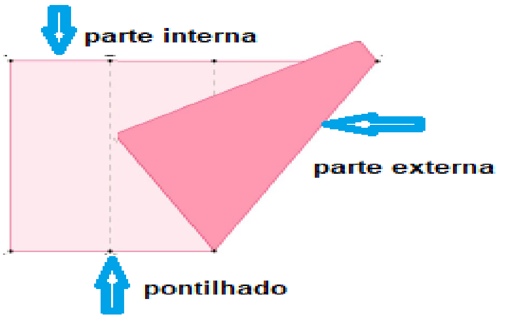
❖ Entenda as técnicas necessárias para a confecção dos módulos individuais dos origamis que servirão como faces dos poliedros regulares.

❖ É interessante que o professor tenha clareza de cada construção antes de demonstrar e fazer com os alunos, para que possa questioná-los de forma adequada e contribua ainda mais com o aprendizado dos mesmos.

Construção dos módulos

Módulos são várias peças de papel confeccionados por meio de dobraduras, chamadas Origami modular assim, os módulos produzidos neste trabalho e mostrados abaixo serão utilizados para montar os Poliedros de Platão (CAVACAMI; FURUYA).

Para a elaboração dos módulos, sugere-se utilizar um papel sulfite A4, retangular, de dimensões 290 mm por 297 mm, sendo estes branco ou colorido para que fique mais atrativo aos olhos dos alunos, ou ainda papel Color set por ter uma ótima gramatura e cores mais variadas, além de serem mais acessível.

Legenda explicativa das dobras	**Demonstração**
• Os segmentos pontilhados indicarão os vincos a serem feitos no papel. • O tom de cores mais claras indicará a parte interna do papel. • O tom de cores mais escuras indicará a parte externa do papel.	

Ao considerar os sólidos de Platão, sabemos que três deles, o tetraedro, o octaedro e icosaedro, são feitos com módulos de faces triangulares, já o Hexaedro com módulos de faces quadrangulares e, por último, temos o dodecaedro com módulos de faces pentagonais.

Daremos início as dobraduras do Origami, damos preferência a construção dos módulos do Hexaedro que possui dobragens mais simples e fáceis de encaixar.

Professor(a)

Para realização das dobraduras e montagem dos sólidos de Platão sugere-se que:

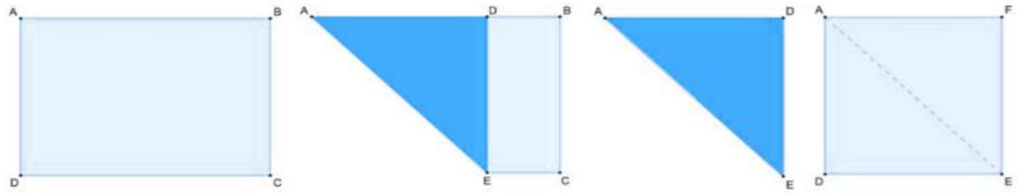
- disponhe os alunos em grupos e entregue o material necessário para cada construção.
- explore o conhecimento dos alunos a partir das propriedades e classificações dos polígonos até chegar no sólido construído
- aprendam a fazer matemática de forma lúdica e satisfatória.

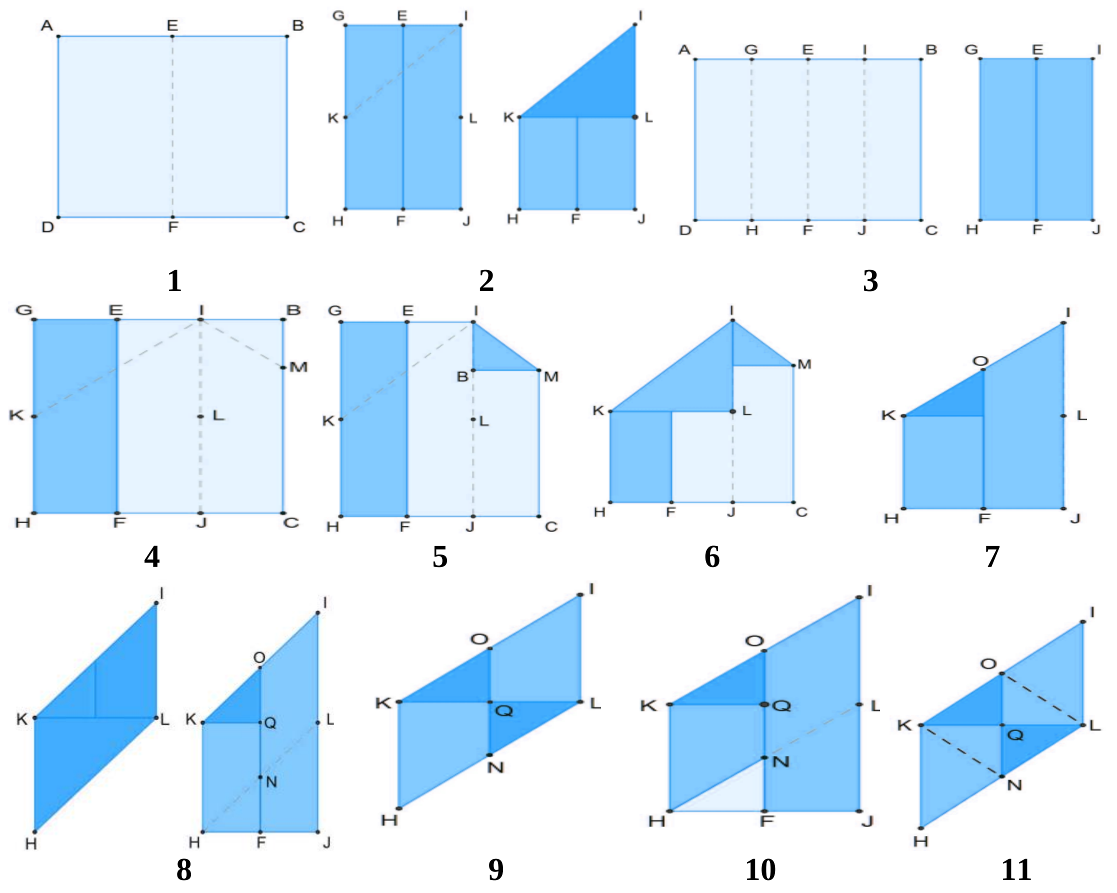
Módulo quadrangular (Hexaedro)

Para este módulo, vamos partir de uma folha sulfite retangular tamanho A4, redimensionar manualmente essa folha de forma a retirar um quadrado, explicados nos diagramas abaixo, para montagem do Hexaedro, será preciso seis módulos.

Quadro 16 – Origami de um dos módulos do hexaedro

Processo de obtenção do quadrado.



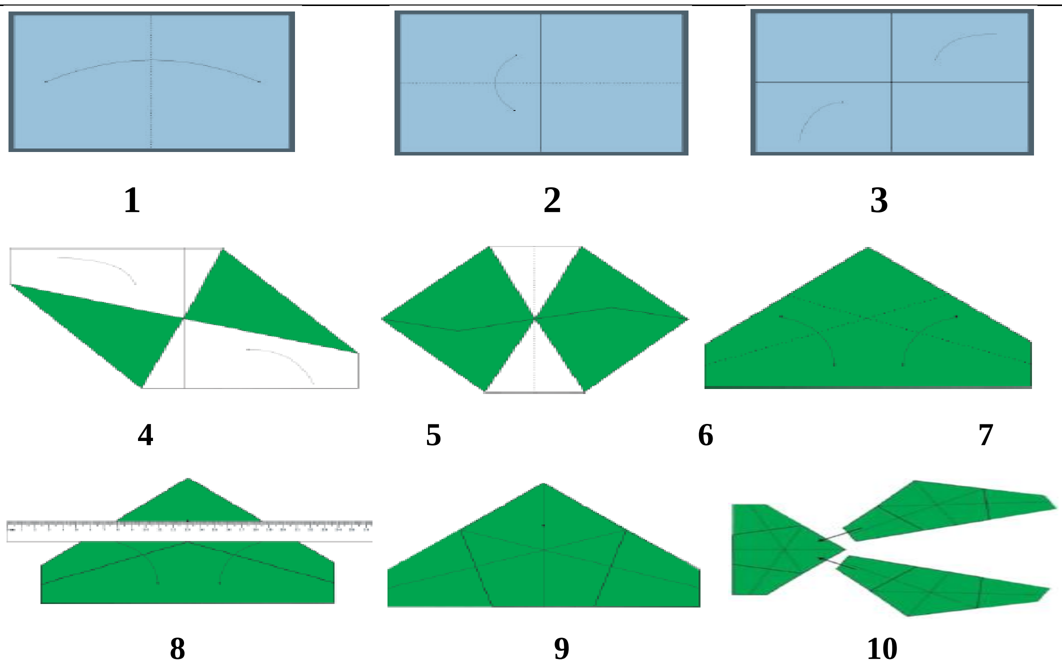


❖ **Saiba como fazer:** Vídeo explicativo da professora pesquisadora ensinando o passo a passo das dobraduras dos módulos quadrangulares e montagem do Hexaedro. https://youtu.be/sW8EslHFnPM

Módulo pentagonal (Dodecaedro)

Após finalização do hexaedro, sugere-se a produção das peças do dodecaedro, que possui um grau de dificuldade superior ao hexaedro no que tange à confecção dos módulos, porém, não apresenta um alto grau de complexidade no encaixe, como mostra as figuras do quadro 17 abaixo, para a montagem do sólido será preciso 12 módulos.

Quadro 17 – Dobradura de um dos módulos do Pentágono

Passos para construção do modulo do Pentágono usando a folha retangular


❖**Veja ainda:** Vídeo explicativo da professora pesquisadora ensinando o passo a passo das dobraduras dos módulos e montagem do Dodecaedro. https://youtu.be/opZn1ocvndo

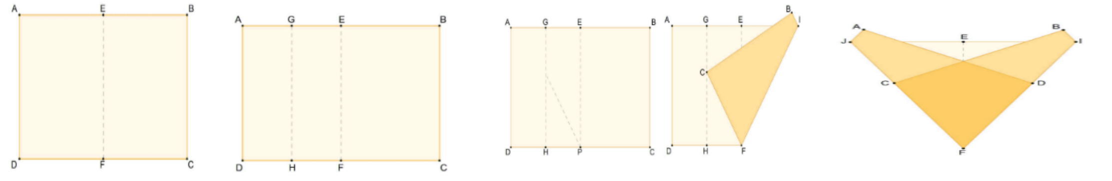
Acreditando que os participantes desenvolveram o domínio da técnica, podem ser orientados para a confecção do módulo de faces triangulares que gera a montagem dos três sólidos (tetraedro, octaedro e icosaedro). Este módulo é um pouco mais complexo, pois possui muitas dobras e um caminho extenso de marcações de vincos até chegar ao modelo final (Quadro 18).

Módulos Triangulares

Os módulos triangulares são utilizados na construção dos poliedros de Platão com faces triangulares (Tetraedro regular, Octaedro regular e Icosaedro regular), para estes módulos será construído duas figuras similares, porém simétricas, das quais será nomeada de modulo A e módulo B.

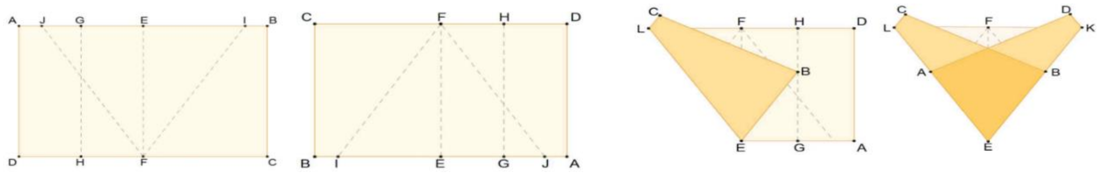
Quadro 18 – Origami de um dos módulos triangulares.

Módulo A: Para montagem deste modulo A, pega-se uma folha de papel, como a recomendada e siga os seguintes passos:

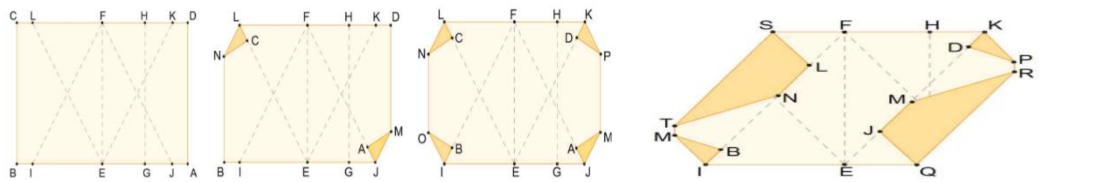


1 **2** **3** **4**

Passo 5. Abrir o papel e girá-lo 180^0

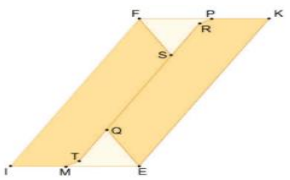


5 **6**

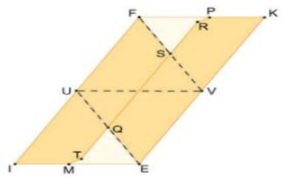


7 **8**

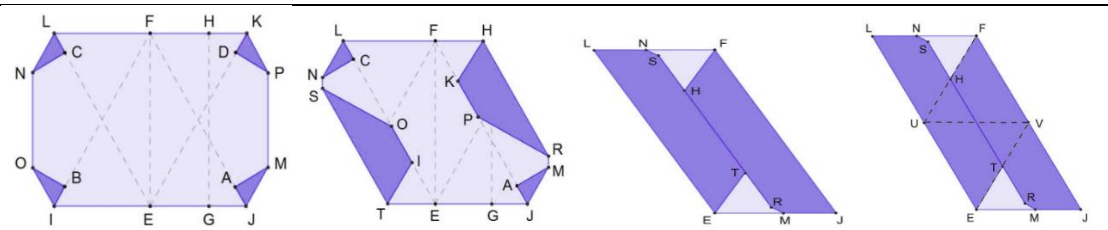
9



10



Módulo B- O módulo B é simétrico de A e sua construção só difere a partir do passo 7.



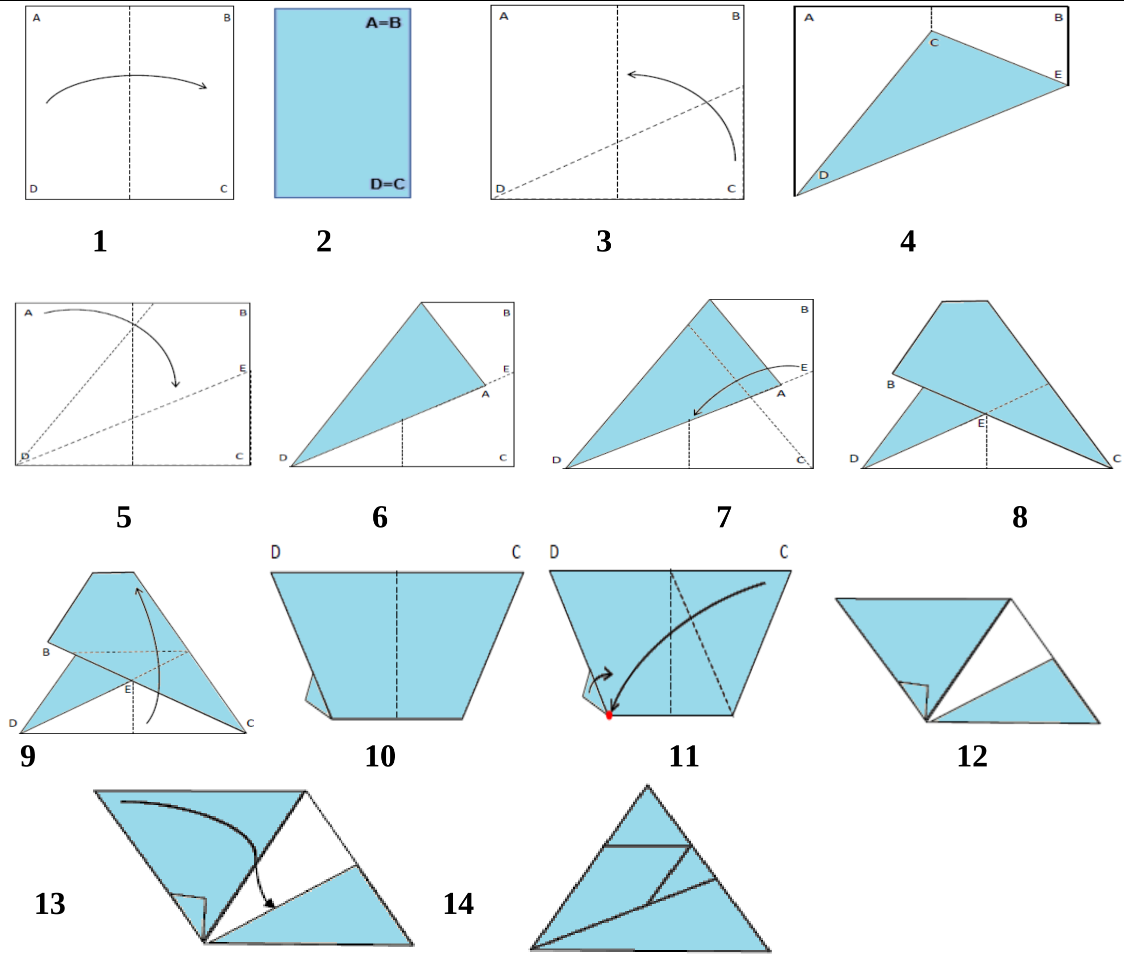
❖**Veja também:** Vídeo da professora pesquisadora explicando os passos das dobraduras dos módulos triangulares e montagem do Tetraedro, Octaedro e do Icosaedro. https://youtu.be/75B0NmWDcTc

Caro(a) professor(a).

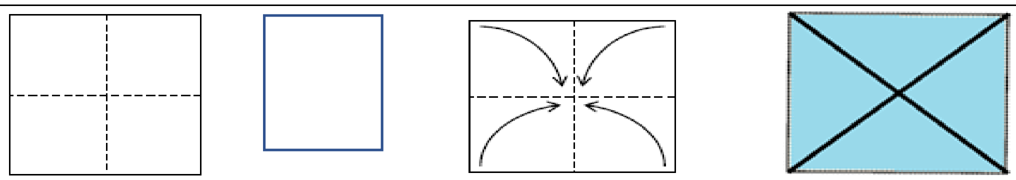
Segue abaixo outro modelo de dobradura de triangulo, que pode ser usado para a montagem do Tetraedro, Octaedro e Icosaedro, sugere-se esse outro, por acreditar que a montagem dos sólidos se torna mais fácil, pois, estes seguem o modelo de planificação, ficando, a critério de você professor(a) adotar o que lhe convier.

Quadro 19 – Origami de um de módulo triangular equilátero

Módulo triangular II - Parte-se de um quadrado



Módulos de encaixe – Usa-se o mesmo quadrado anterior e o divida em 4 partes iguais.



Assista também: Vídeo explicativo dos módulos demonstrados nos diagramas acima e montagem do Tetraedro, Octaedro e o Icosaedro pela professora pesquisadora. https://youtu.be/DcQbAJwqqTs

❖ Para a montagem dos poliedros de Platão usando esses módulos sugere-se imprimir suas planificações e dar de modelo ao aluno. (Modelo **disponível no "Material do aluno"**)

Professor(a),

Com a elaboração dos poliedros você pode explorar todas as características que os envolve, como a nomenclatura, número de arestas, faces e vértices, fazendo uso da relação de Euler, planificação, ângulos poliédricos, existência de apenas cinco sólidos, cálculo de áreas superficiais e volumes.

Peça que os alunos observem as construções realizadas e faça perguntas acerca de cada poliedro. Por exemplo: qual o polígono que representa as faces do Tetraedro? Esse polígono é regular? Se sim, por quê? Quais são as propriedades e como se classificam os polígonos que compõem as faces dos poliedros? Qual é a diferença entre um poliedro e um polígono. Direcione as questões de maneira que o aluno possa manusear o sólido e, contudo, possa visualizar e compreender as propriedades de cada um, sempre buscando que o aluno construa o saber matemático por meio do material manipulativo.

Relação de Euler

Euler (1707–1783) desenvolveu uma relação matemática, aplicada aos poliedros. A relação de Euler é uma **fórmula que relaciona o número de vértices, faces e arestas em poliedros convexos**. Euler percebeu que a quantidade de elementos que um poliedro tem se relaciona pela fórmula:

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

Navegue e saiba: Como é feita a planificação de sólidos geométricos?
Só existem cinco sólidos regulares? https://www.youtube.com/watch?v=B66EkzPshIY

Saiba um pouco mais sobre: Elementos e classificação de poliedros.
https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/elementos-um-poliedro.htm

https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-poliedros.htm

Sugestão de Leitura: CHAVES, Juliana de Oliveira. Geometria espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas. 2013. **Geometria espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas**

Estas atividades sugerem que os alunos expressem e troquem conhecimentos, a partir da experiência vivenciada. Após responderem às perguntas é possível confrontar e verificar as respostas em grupo. É possível ainda, verificar quais respostas/situações surgirão a partir da atividade proposta.

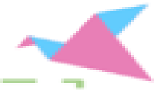
01 - Qual é o número de faces de um poliedro que possui 20 vértices e 30 arestas? Qual é esse poliedro? **Resolução:** Temos que V = 20 e A = 30.

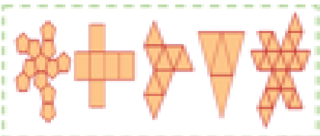
Substituindo, na fórmula de Euler: $V + F = A + 2$

$20 + F = 30 + 2$ $\quad F = 32 – 20$ $\quad F = 12$ dodecaedro.

Professor(a)!! Sugere-se aqui que façam o mesmo com os demais sólidos regulares.

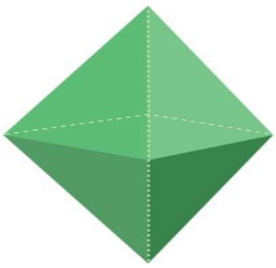
02 – Elaborar três planificações diferentes para cada poliedro, recorte e teste essa planificação para verificar se ela realmente culminará no poliedro planificado.





Caso necessite professor(a), faça mediação dando algumas dicas para que consigam.

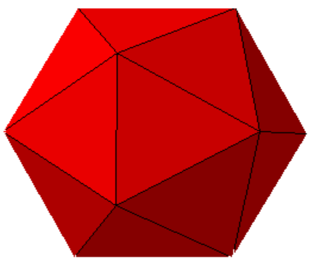
03 - Um garimpeiro encontrou uma pedra preciosa que possui o formato igual ao do poliedro a seguir:



Analisando o poliedro a seguir, podemos afirmar que a soma do número de faces, vértices e arestas é igual a:

a) ( ) 26. b) ( ) 25. c) ( ) 24. d) ( ) 23. e) ( )22.

04 - Acerca do poliedro ao lado, são feitas as seguintes afirmações:



(01) É um poliedro de Platão, mas não é regular. (F)

(02) É um poliedro euleriano. (V)

(04) Suas faces são polígonos regulares e congruentes. (V)

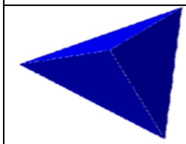
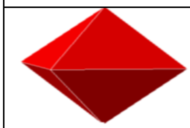
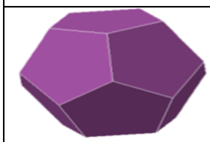
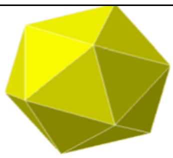
(08) É chamado de dodecaedro regular. (F)

Seja C o valor da soma das alternativas corretas. Então, é correto afirmar que C é:

(a) Um número cubo perfeito (b) Um número perfeito (d) Um número ímpar

(c) Um número quadrado perfeito (e) Um número primo.

05 – De acordo com o estudo, responda o quadro.

POLIEDRO	FACE DO POLÍGONO	Nº. DE FACES	Nº. DE ARESTAS	Nº. DE VÉRTICES.	NOME DO POLIEDRO
	Triângulo	4	6	4	Tetraedro
	Quadrado	6	12	8	Hexaedro (Cubo)
	Triângulo	8	12	6	Octaedro
	Pentágono	12	30	20	Dodecaedro
	Triângulo	20	30	12	Icosaedro

06- Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação.

( ) O cubo é um poliedro de Platão.

( ) As faces de um icosaedro são triângulos equiláteros.

( ) As faces de um dodecaedro são hexágonos regulares.

( ) A Relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.

( ) Se as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares congruentes entre si, então o poliedro também será regular.

( ) O hexaedro possui 12 vértices.

07 - Preencha a cruzadinha de acordo com os conhecimentos adquiridos sobre os poliedros regulares.

1. Filósofo que associou os sólidos regulares aos elementos da natureza.

2. Poliedro regular com faces pentagonais.

3. Sólido geométrico cujas superfícies são compostas por um número finito de faces.

4. Polígono que compõe as faces do tetraedro, octaedro e icosaedro.

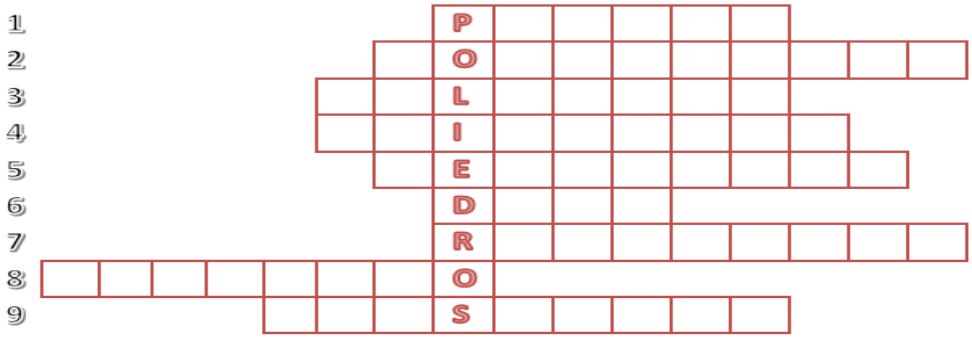
5. Poliedro com mesmo número de vértices e faces.

6. Número de arestas do octaedro.

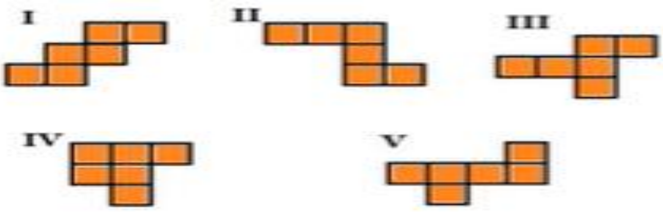
7. Poliedro com todas as faces regulares iguais e que contém o mesmo número de aresta em todos os vértices.

8. Poliedro regular também conhecido como cubo.

9. Poliedro regular composto por 12 vértices e 30 arestas.



08 - Considere as seguintes proposições de modelos de planificação de um cubo.



Entre essas proposições de modelos de planificações quais podem resultar em um cubo:

a) I, II e V b) II, III e IV c) I, III e V d) III, IV e V

Professor(a)

Depois de responder a atividade 08, peça aos alunos que recortem as planificações para descobrir se acertaram.

09 – Observe a figura e responda:

Este poliedro é um ...., ele possui......vértices......arestas ....faces.

Professor(a)!!

Aproveite o exemplo acima e desafie seu aluno um pouco mais.
sugira que façam o mesmo com os demais sólidos geométricos estudados.

10 – Descubra o Poliedro, faça a planificação e o desenho do referido sólido.

1) Sou um poliedro. 2) Tenho doze arestas. 3) Minhas faces são triângulos. 4) Tenho oito faces. 5) Tenho seis vértices. 6) Minhas faces são todas iguais 7) **Quem eu sou?**		

1) Sou um poliedro. 2) Tenho trinta arestas. 3) Minhas faces são pentágonos. 4) Tenho doze faces. 5) Tenho vinte vértices. 6) Minhas faces são todas iguais **7) Quem eu sou?**		

1) Sou um poliedro. 2) Tenho trinta arestas. 3) Minhas faces são triângulos. 4) Tenho vinte faces. 5) Tenho doze vértices. 6) Minhas faces são todas iguais **7) Quem eu sou?**		

Professor(a),

Nesta atividade permita que os alunos em duplas, tente resolver com conhecimento assimilado na produção dos sólidos e para correção sugira fazer uso dos poliedros confeccionados por eles.

Que tal você professor(a) construir seu próprio caça palavras e suas palavras cruzadas!

Caça palavras produzido em: https://www.geniol.com.br/palavras/caca-palavras/criador/

Palavras cruzadas produzido: https://www.educolorir.com/crosswordgenerator.php

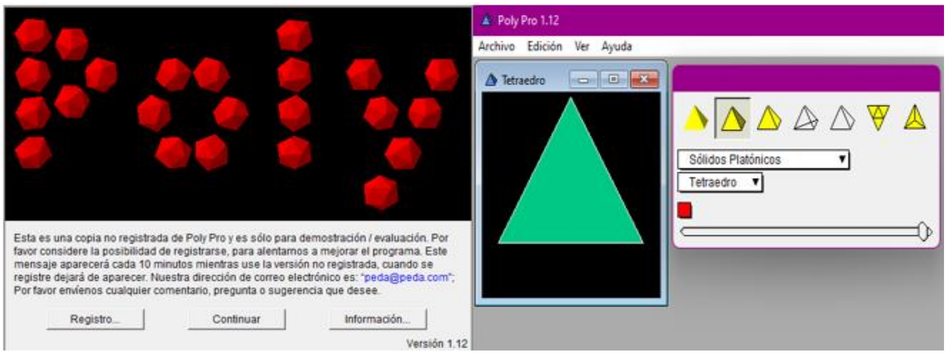
❖ O aprofundamento em qualquer um desses assuntos dependerá da série a ser Aplicada.

Que tal conhecermos o software Poly Pro 1.12?

As atividades propostas nesta unidade têm como objetivo utilizar o software Poly Pro 1.12, este trata-se de um software livre de Matemática, com aplicativos gratuitos, o qual nos disponibiliza várias funções para geometria espacial, podendo observar a regularidade dos poliedros de Platão, notar que tais poliedros são formados apenas por polígonos convexos, regulares e iguais/congruentes.

Tem- se ainda o objetivo de retomar conceitos aprendidos nas unidades anteriores, e, a partir da utilização do *software* Poly Pro 1.12, apresentar aos alunos conhecimentos básicos das ferramentas dispostas na janela de visualização 2D e 3D, para que estes venham observar que em cada vértice concorre/incide o mesmo número de arestas. Ainda, observar/concluir, (considerando a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice) que existem apenas cinco poliedros regulares (referidos como sólidos de Platão): Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.

Figura 4 - Interface e janela principal do Software Poly Pro 1.12



Professor!! Saiba explorar o *software* Poly Pro 1.12, conheça suas ferramentas para o sucesso de sua utilização nas aulas e ainda ampliar seus conhecimentos, acesse os materiais disponíveis nos endereços 1, 2 e 3 abaixo:

1) http://www.peda.com/download/ - endereço para download do *software* Poly Pro 1.12.
2) http://www.peda.com/polypro/ - Interface do Poly Pro 1.12 e Construções iniciais.
3) https://www.youtube.com/watch?v=boMHWPPhMv4 - Tutorial no Poly Pro 1.12.

Vamos explorarmos os Poliedros de Platão no Poly Pro!!

Para realização das atividades aqui apresentadas sugere que você professor(a) apresente o software Poly Pro 1.12, aos alunos como uma ferramenta auxiliar para o ensino dos poliedros, tantos Platônicos como outros também. Após a socialização com o software, mostre aos alunos os elementos que o compõe.

❖ Peça para eles manusearem de forma que o poliedro possa girar, com o giro os educandos podem visualizar e, contudo, perceber que os poliedros são tridimensionais.

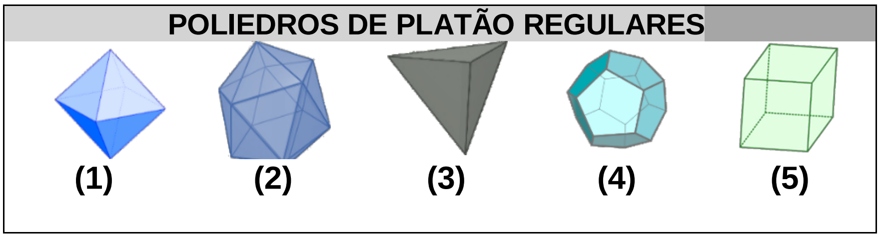
❖ Peça também que clique na ferramenta de planificação do sólido, para que os alunos observem sua planificação e sobretudo notem suas arestas, faces e vértices, faça perguntas relacionadas ao poliedro, por exemplo, qual figura bidimensional compõe a face do denominado sólido.

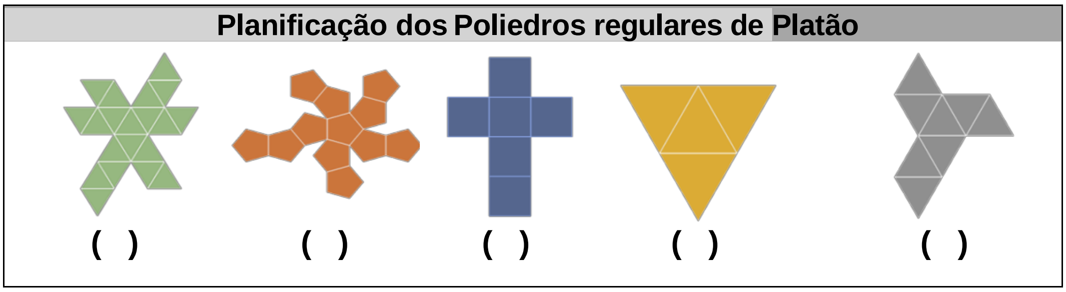
❖ Qual é a diferença de uma figura bidimensional para uma tridimensional? Se conseguem contar arestas, faces e vértices.

❖ Peça ainda que observem os poliedros construídos por meio das dobraduras, e os poliedros visualizados por meio do software e pergunte se existe diferença entre os dois?

❖ Observe se os alunos conseguem verificar que ambos possuem o mesmo número de arestas, vértices e faces, insira o uso da fórmula de Euler para essas conferências.

Atividade 01: Observe os poliedros regulares de Platão e indique o número correspondente a sua planificação e seu respectivo nome abaixo.





Atividade 02: - Utilizando a visualização do Poly, complete o quadro, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice:

Nome do Poliedro	Polígono que forma o poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro	Triângulo	3
Cubo	Quadrado	4
Octaedro	Triângulo	4
Dodecaedro	Pentágono	3
Icosaedro	Triângulo	5

Colega professor(a), os quadros das atividades se encontram no "Material do Aluno", caso você se interesse e possa fazer a impressão para seus alunos.

Atividade 03: Complete o quadro e verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler.

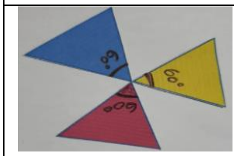
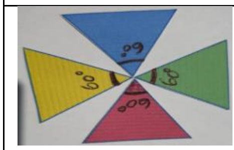
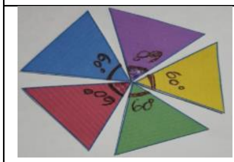
POLIEDRO	**NOME DO POLIEDRO**	**FACES F**	**ARESTAS A**	**VÉRTICES V**	Teorema de Euler $V - A + F = 2$
	Tetraedro	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
	Hexaedro (Cubo)	4	8	6	$4 - 8 + 6 = 2$
	Octaedro	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
	Dodecaedro	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
	Icosaedro	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

Professor(a)

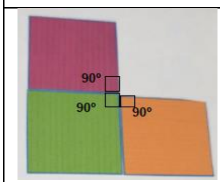
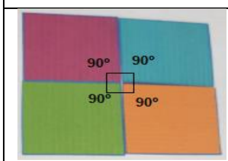
Nestas atividades você pode fazer uso do Poly ou até mesmo dos módulos feitos em Origami, sugerindo aos alunos que montem ângulos poliédricos com diferentes números de polígonos regulares iguais (triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos), registrando em sua tabela os resultados obtidos, e expressando conclusões a respeito das possibilidades de polígonos regulares justapostos formarem ângulos menores do que 360°.

Atividade 04: Considerando que cada ângulo (interno) de triângulo equilátero vale 60º, que cada ângulo de um quadrado vale 90º e que cada ângulo de um pentágono regular vale 108º, ainda, que a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360º, complete os quadros abaixo:

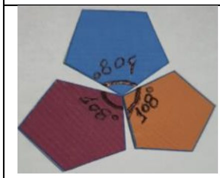
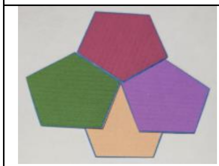
Figuras triangulares

Representação poliédrica	Número de faces triangulares concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
	3	3 x 60º =180º	Tetraedro
	4	4 x 60º = 240º	octaedro
	5	5 x 60º = 300º	icosaedro
	Maior ou igual a 6	≥ 6 x 60º = 360º	não forma poliedro

Figuras quadradas

Representação poliédrica	Nº de faces quadradas concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
	3	3 x 90º = 270º	cubo
	Maior ou igual a 4	≥ 4 x 90º = 360º	não forma poliedro

Figuras pentagonais

Representação poliédrica	Nº. de faces pentagonais concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
	3	3 x 108º = 324º	dodecaedro
	Maior ou igual a 4	$\geq$ 4 x 108º = 432º	não forma poliedro

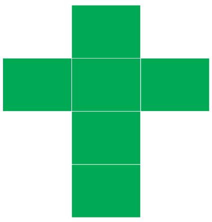
❖ Considerando polígonos formados com faces regulares de seis ou mais lados, que a soma dos ângulos em torno de cada vértice é maior ou igual a 360º, de modo que não há nenhum poliedro de Platão que possui faces formadas por polígonos com seis lados ou mais.

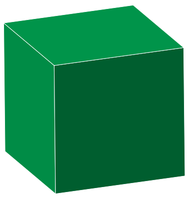
Sugestão de Leitura: FERREIRA, Fabricio Eduardo. Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami. 2013. https://scholar.google.com.br/citations?user=SsH1Wo4AAAAJ&hl=pt-BR&oi=sra

Professor(a)!!

O Poly mostra exatamente os 5 poliedros regulares existentes. Podemos complementar essa atividade justificando, brevemente, que existem apenas esses cinco poliedros regulares/platônicos, observando os ângulos dos polígonos que compõem cada poliedro.

Atividade 05: Com o uso do Software Poly Pro, determine o número de vértices V, arestas A e faces F do cubo e em seguida, verifique se o Teorema de Euler é satisfeito. Ainda, supondo que a medida da aresta do cubo seja de 3 cm, determine: a área de uma face, a área total e o volume do cubo.





Solução esperada: V = 8; A = 12 e F = 6

V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.

Considerando que a medida da aresta do cubo seja a = 3cm, tem-se que a área de uma face é **A f = a^2 = 3^2 = 9cm^2** - área total é **A t = 6.a^2 = 54cm^2** - volume Vol = a^3 = 3^3 = **27cm^3.**

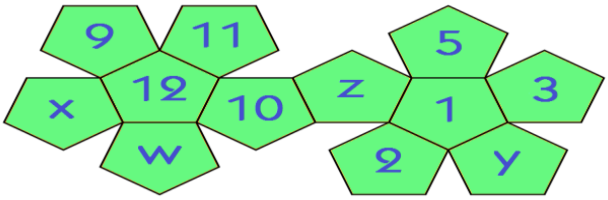
Professor(a)

Podemos desafiar nosso aluno um pouco mais.
✓ Seguindo o exemplo dado, sugira aos alunos que façam o mesmo com os demais sólidos geométricos estudados.

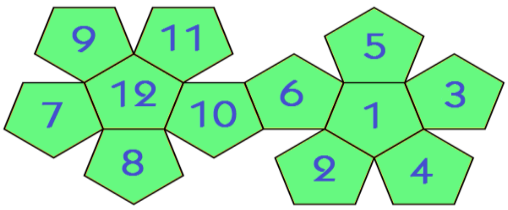
Atividade 06: Dados com formatos de poliedros, como os mostrados abaixo, são utilizados nos mais diversos tipos de jogos de tabuleiro.
a) Determine o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro representado ao lado.

		Arestas	Faces	Vértices
Poliedro Amarelo	Octaedro	12	8	6
Poliedro Vermelho	Icosaedro	30	20	12
Poliedro Azul	Dodecaedro	30	12	20
Poliedro Laranja	Tetraedro	6	4	4
Poliedro Verde	Trapezoedro	20	10	12

b) Tem-se abaixo a planificação de um dado dodecaédrico com os números de 1 a 12 em suas respectivas faces. Por um defeito na fabricação do mesmo, algumas faces ficaram sem seus números, representados abaixo pelas letras x, y, z e w. Sabendo que a soma dos números de faces opostas é sempre igual, determine os valores de x, y, z e w.



Solução: Analisando a planificação vemos que 4, 6, 7 e 8 são os números que faltam. Como a soma das faces opostas são sempre iguais, devemos ter de acordo com a planificação que $9 + y = 12 + 1 = x + z = 11 + 2 = 5 + w = 3 + 10$. Daí, segue que $y = 4$, $w = 8$, $x = 7$ e $z = 6$. A planificação com todos os números fica assim:

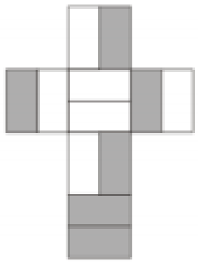


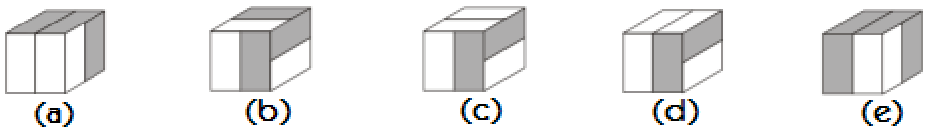
c) Supondo que tenhamos um dado tetraédrico com os números de 1 a 4 em cada face, um dado normal com números de 1 a 6, um dado octaédrico com números de 1 a 8, um dado dodecaédrico com números de 1 a 12 e um dado icosaédrico com números de 1 a

20, se sortearmos um número de cada dado, nessa ordem, qual a probabilidade de eles formarem uma progressão aritmética? **Exemplos de algumas soluções:**

Número sorteado				
Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	5	7	11
1	4	7	10	13
2	2	2	2	2
2	3	4	5	6
2	4	6	8	10
2	5	8	11	14
3	3	3	3	3
3	4	5	6	7
3	5	7	9	11
4	4	4	4	4
4	5	6	7	8
4	6	8	10	12

Atividade 07: Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme? (c)





Professor(a)

- Faça uma exposição dos sólidos em uma feira de ciências.
- Sugira aos alunos que elaborem alguns cartazes com as características dos Poliedros de Platão.
- Proponha aos alunos que façam dois kits para cada poliedro e deixem que os visitantes tentem formar o poliedro a partir dos módulos.
- Cada kit pode ser composto por um poliedro pronto e módulos suficientes para a montagem de mais dois.

Considerações Finais

Acreditamos que com o uso do paradidático aqui elaborado e apresentado, o/a professor(a) poderá promover aulas interativas, produtivas, prazerosas e sobretudo, satisfatórias, observará que os educandos ficarão mais interessados e/ou motivados nos conteúdos matemáticos, pois acreditamos que ao propor aulas diferentes do habitual, trabalhando com material concreto, os alunos compreendam melhor a geometria e percebam que a matemática vai além dos números, desenvolvendo o pensamento crítico, científico e criativo, itens indispensáveis à formação integral de um cidadão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)**. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2000.

BRASIL, Ministério da Educação (2019). *Base nacional comum curricular- BNCC.*. Brasília, DF, Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 28 jul. 2023.

CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami** – Apostila OBMEP, 2010.

CHAVES, Juliana de Oliveira. Geometria espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas. 2013.

FAINGUELERNT, E.K; NUNES, C.A.R.A. Fazendo Arte com a Matemática. 2ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2015.

FERREIRA, Fabricio Eduardo. Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami. 2013.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, M. **Pequena História do Origami**. Disponível em: https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. acesso em 26/08/2023.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros matérias concretos. 2. ed. Niterói: UFF, 2003.

KANEGAE, M. **Breve Histórico do Origami no Brasil**, disponível em: http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm, acesso em 26/08/2023.

KATZ, V.J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

KAWAMURA, M. **Polyhedron Origami**: for beginners. Tokyo: Nihon Vogue CO., LTD, 2001.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a matemática**. Editora Moderna; — 3. ed. — São Paulo: Moderna, 2016.

LUCAS, E. S. C. **Uma Abordagem Didática para a Construção dos Poliedros Regulares e Prismas Utilizando Origami**. 20013.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky Aprendizado e desenvolvimento:** um processo Sócio histórico. São Paulo: Ed. Scipione, 1995.

PIMENTA, A. L, GAZIRE, E. S. **Construindo poliedros platônicos com origami**: uma perspectiva axiomática. Beau Bassin: Novas Edições Acadêmicas, 2018.

PRIETO, J. I. R. Matemáticas y Papiroflexia. **Revista Sigma**, n.21, p. 175-192, 2002.

RAFAEL, I. Origami. **Educação Matemática**, Lisboa, n.111, p.16-22, set/out. 2011.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; JÚNIOR, S. G. **A geometria do origami: atividades de ensino através de dobraduras**. Universitária UFPB, 2003. ISBN 9788523703837.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática,** São Paulo: FTD, 2010. v. 3.

APRESENTAÇÃO DOS AUTORES

Jozeane C. Moreira Flôres

Mestranda em Ciências e Matemática pela Universidade de Passo Fundo – RS. Possui Licenciatura plena em Matemática pela Universidade Federal de Rondônia – UNIR (2006), com especialidade em Matemática para professores, Tutoria em Educação a distância e Ciências dos anos Finais. Professora atuante na Rede Estadual e Municipal de Ensino na Cidade de Rio Crespo no Estado de Rondônia.

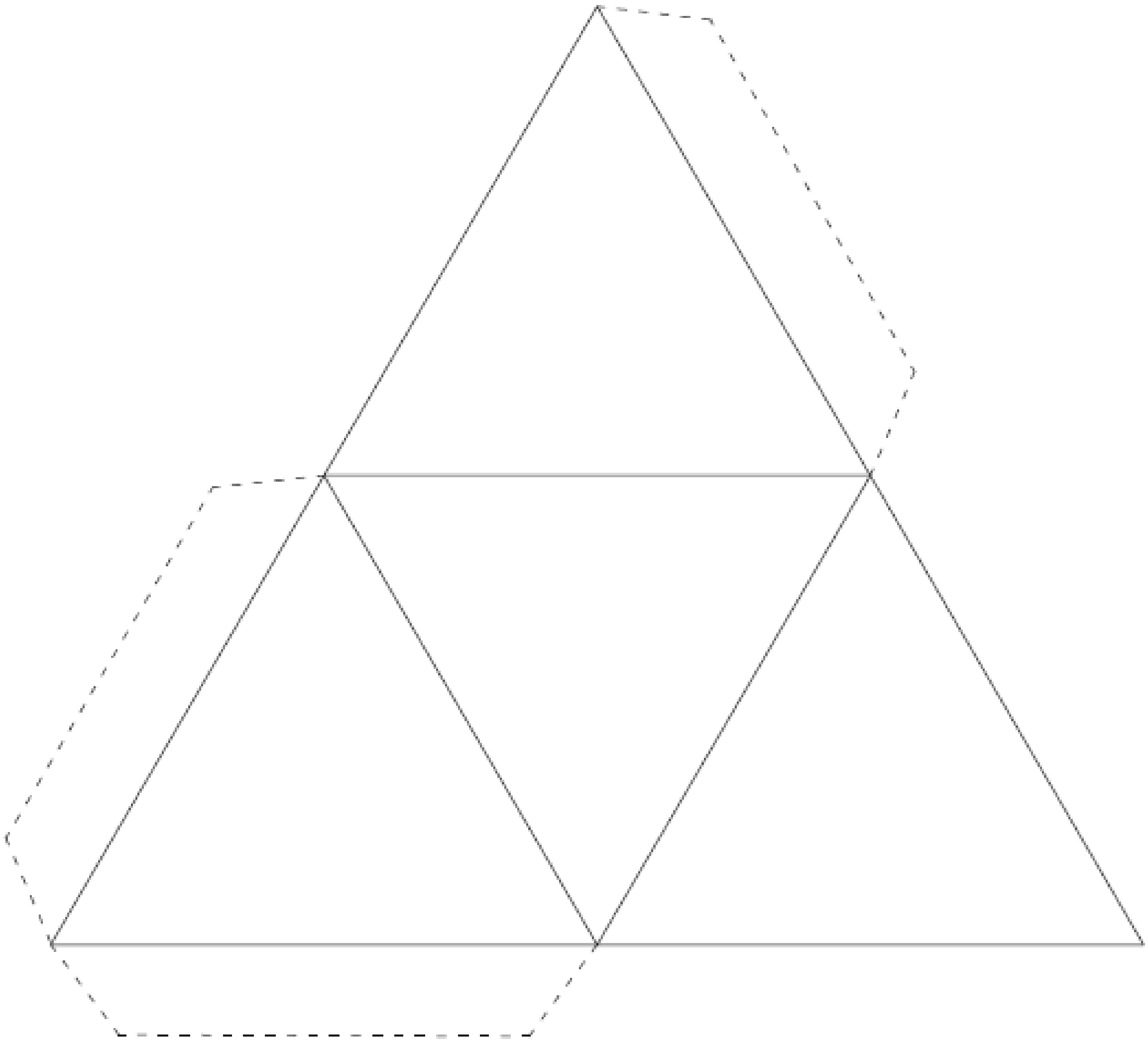
Currículo lattes: http://lattes.cnpq.br/8976969408367378

Luiz Henrique F. Pereira

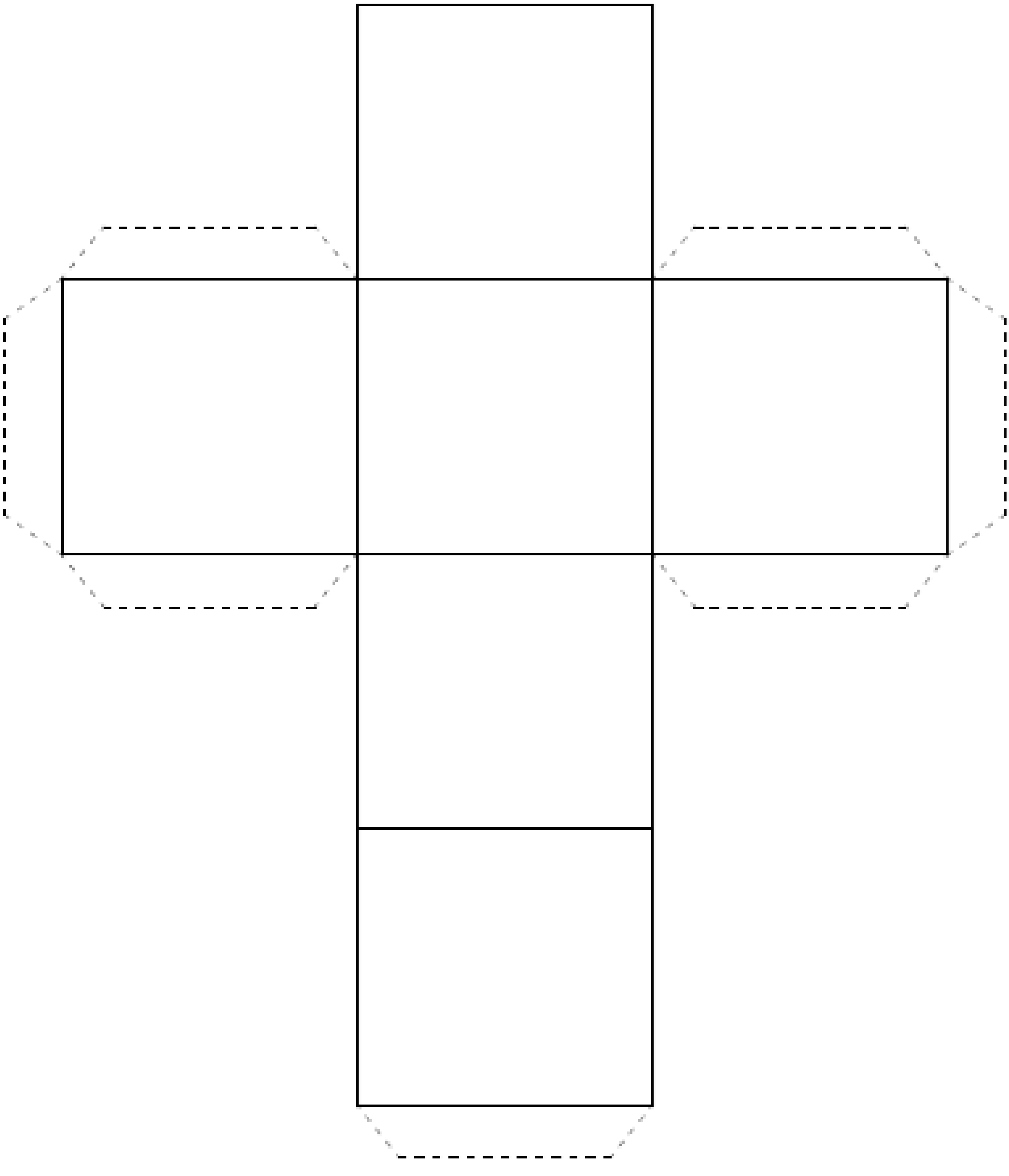
Possui graduação em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (1987) e mestrado em Educação pela Universidade de Passo Fundo (2001). É doutor em educação pela PUCRS (2010). Atualmente é professor titular da Universidade de Passo Fundo. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: história da matemática, matemática moderna, matemática, história da educação matemática, recurso didático-pedagógico e jogos.

1 - Planificações dos Poliedros de Platão.

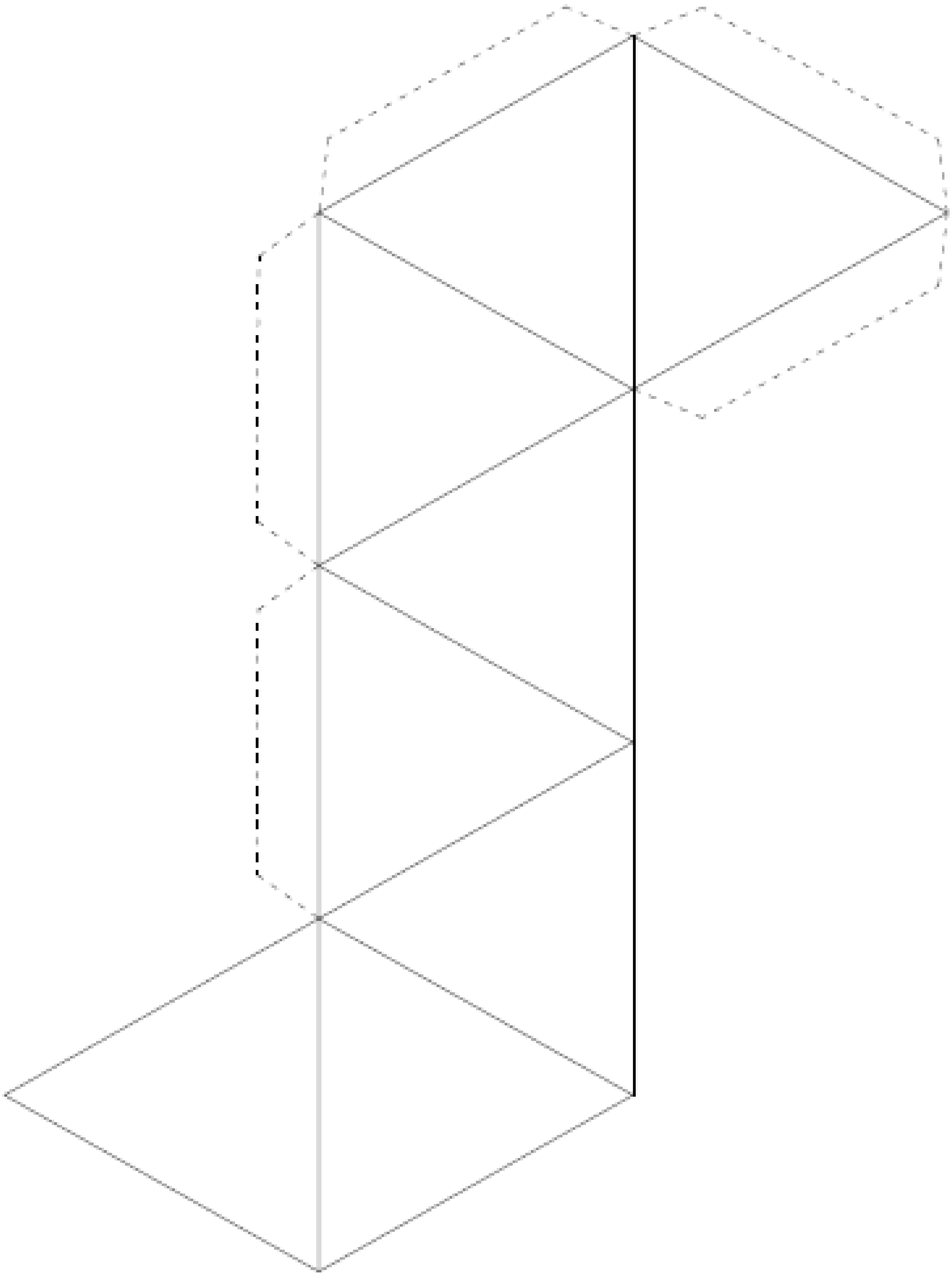
Tetraedro Regular



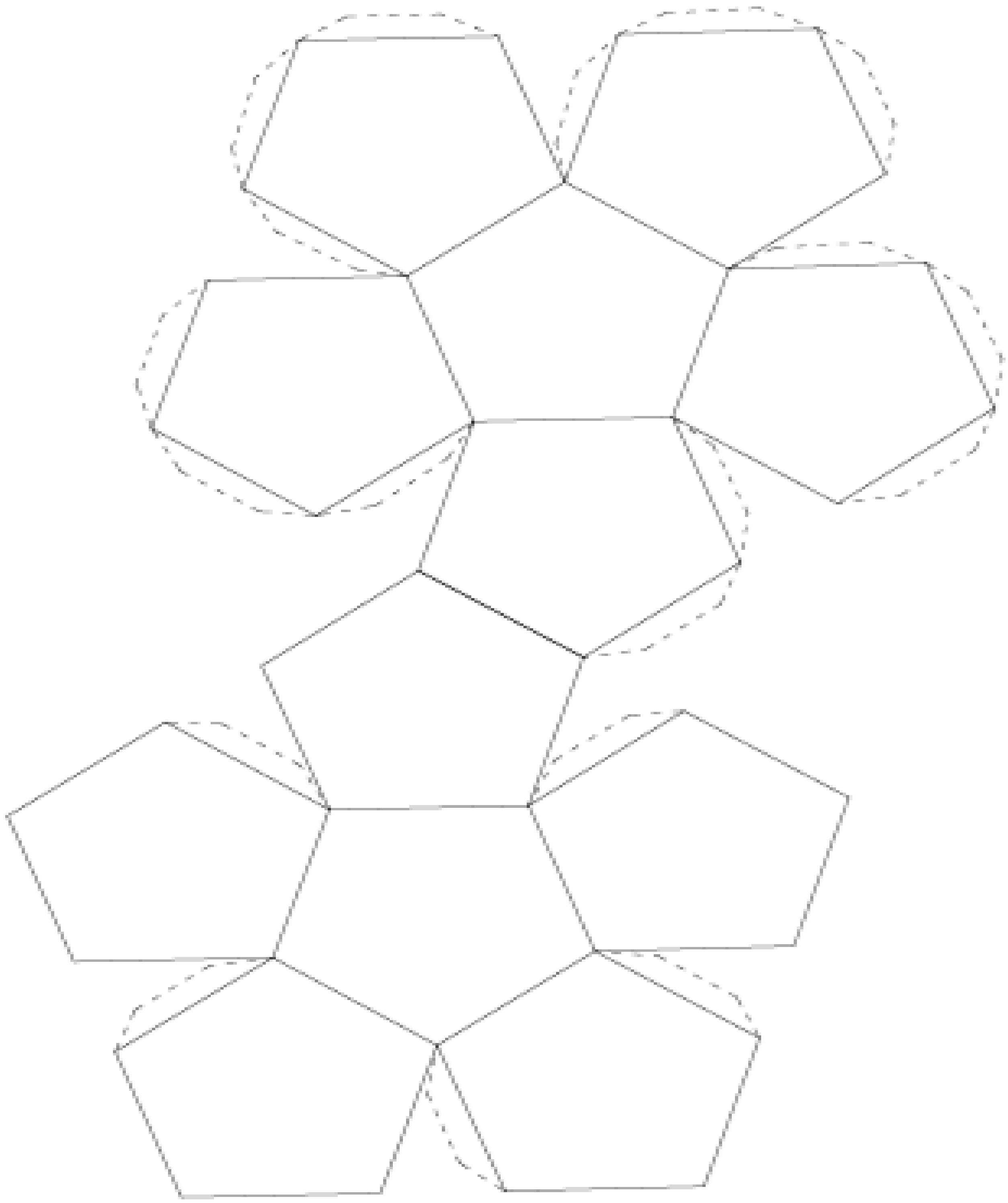
Hexaedro Regular



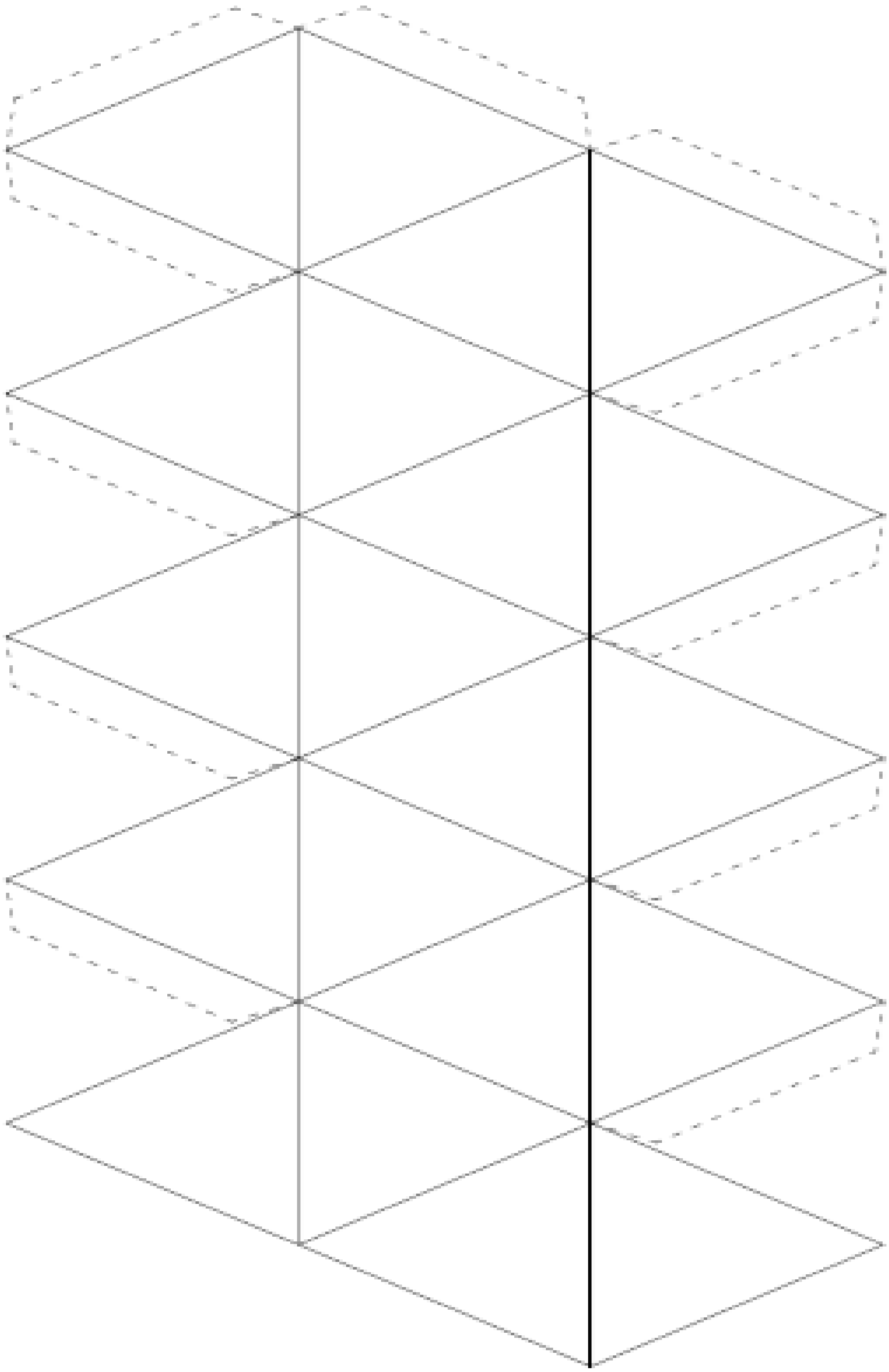
Octaedro Regular



Dodecaedro Regular

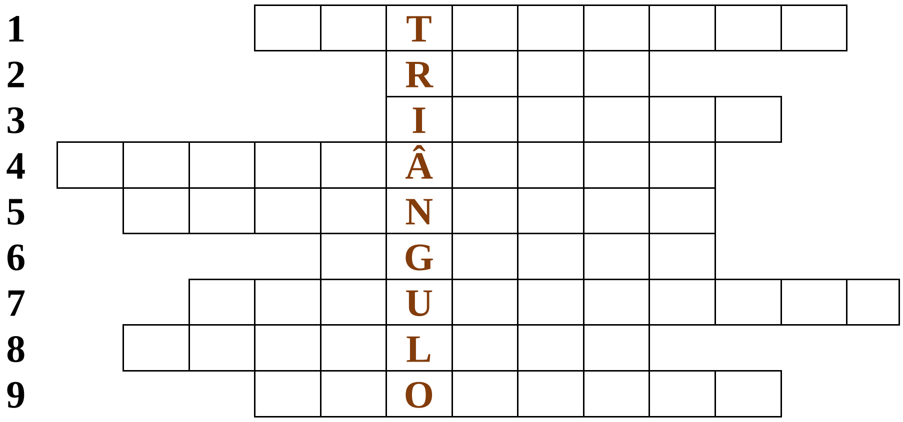


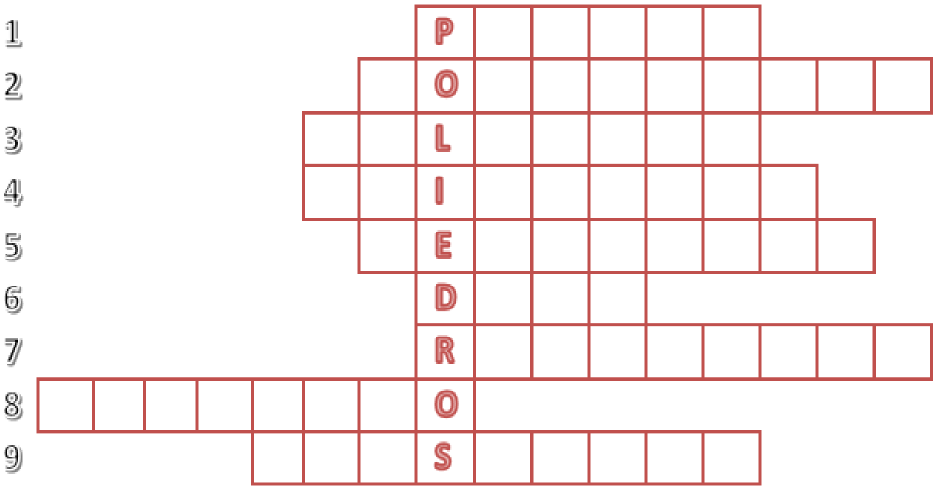
Icosaedro Regular

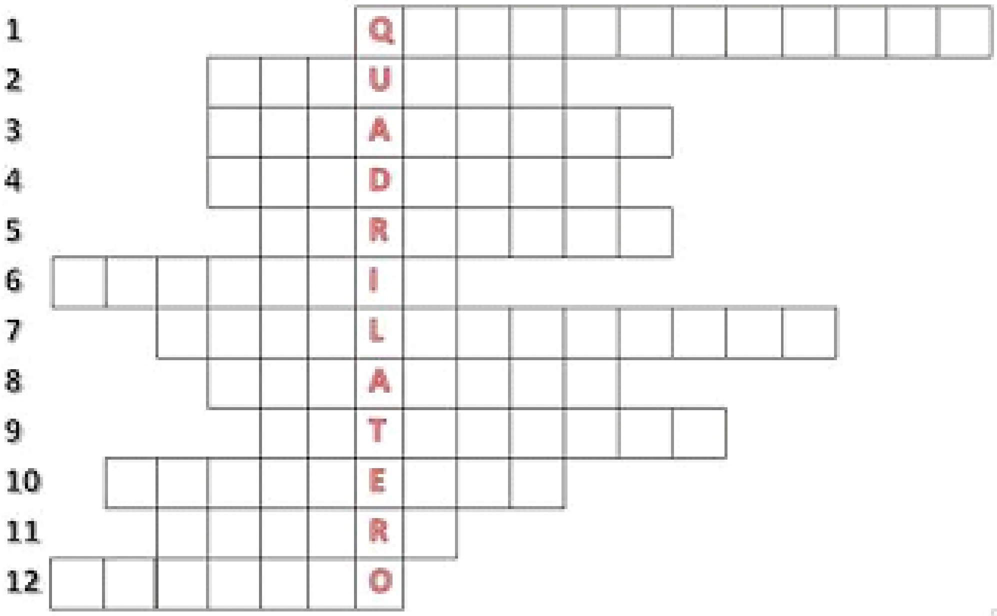


2 – Cruzadinhas

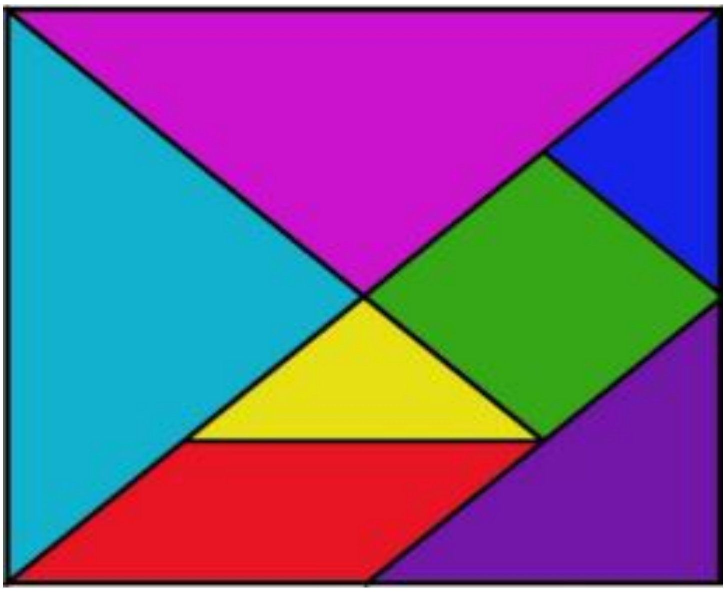
BRINCANDO E APRENDENDO

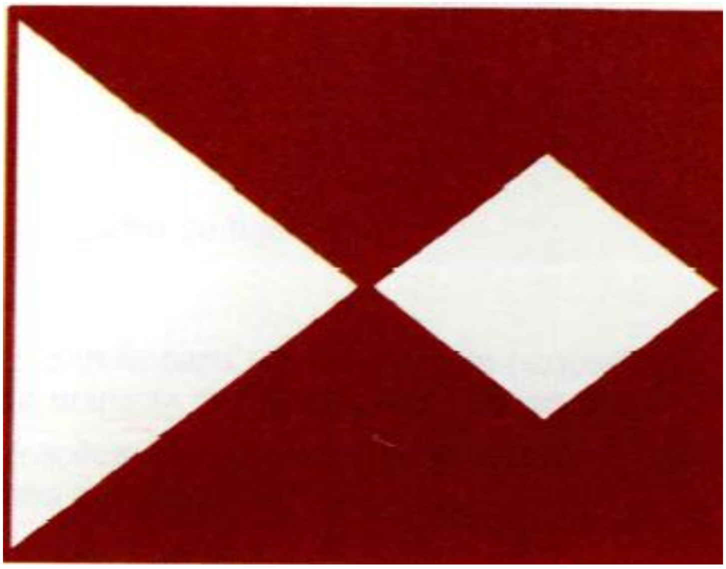






3 – Tangram

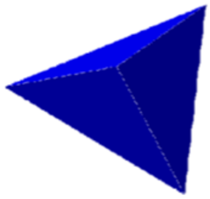




4 - Cruzadinha sobre polígonos

P	E	N	T	Á	G	O	N	O	D	B	F
O	U	N	D	E	C	Á	G	O	N	O	D
A	T	R	A	P	É	Z	I	O	T	O	O
A	M	I	T	H	E	S	H	E	R	C	D
O	Q	U	A	D	R	A	D	O	I	T	E
N	I	E	A	O	Y	R	N	N	Â	Ó	C
R	O	I	O	B	R	S	A	N	N	G	Á
E	F	T	N	N	V	I	I	L	G	O	G
C	A	A	M	O	B	M	A	S	U	N	O
O	W	R	E	T	Â	N	G	U	L	O	N
T	H	H	E	X	Á	G	O	N	O	R	O
R	H	T	L	O	S	A	N	G	O	Y	A

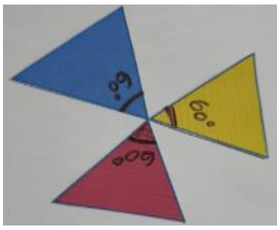
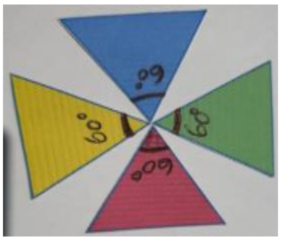
5 – Quadros para estudos dos Poliedros de Platão.

POLIEDRO	FACE DO POLÍGONO	Nº. DE FACES	Nº. DE ARESTAS	Nº. DE VÉRTICES.	NOME DO POLIEDRO
					
					
					
					
					

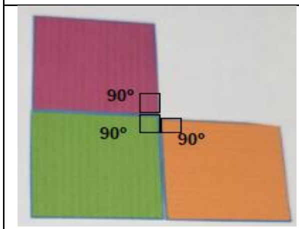
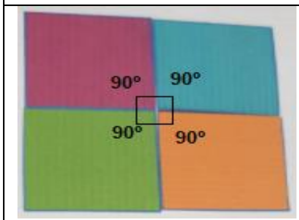
6 -Trabalhando com a fórmula de Euler

POLIEDRO	NOME DO POLIEDRO	FACES F	ARESTAS A	VÉRTICES V	Teorema de Euler $V - A + F = 2$
					
					
					
					
					

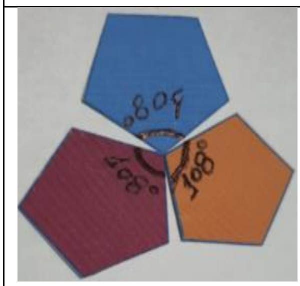
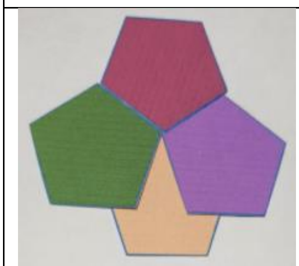
7 - Quadros sobre os ângulos poliédricos com módulos triangulares.

Representação poliédrica	Número de faces triangulares concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
			
			
			
			

8 - Quadros sobre os ângulos poliédricos com módulos quadrangulares.

Representação poliédrica	Nº de faces quadradas concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
			
			

9 - Quadros sobre os ângulos poliédricos com módulos pentagonais.

Representação poliédrica	Nº. de faces pentagonais concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
			
			

10 – Quadro com a descrição dos axiomas do Origami Modular.

Descrição dos axiomas
Axioma 01
Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos, descrição semelhante ao primeiro postulado do livro 1 de Euclides.
Axioma 02
Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que as torna coincidentes, propriedade justificada pelo quarto postulado do livro 1 de Euclides.
Axioma 03
Dadas duas retas, I1 e I2, há uma única dobra que as torna coincidentes, justificado pelas sexta e sétima "noções comuns" do livro 1 de Euclides.
Axioma 04
Dados um ponto P e uma reta I há uma única dobra perpendicular a I que passa por P. Pode-se com este axioma determinar a menor distância entre uma reta e um ponto fora desta reta.
Axioma 05
Dados dois pontos, P1 e P2, e uma reta I, se a distância de P1 a P2 for igual ou superior à distância de P2 a I, então há uma única dobra que faz incidir P1 em I e que passa por P2.
Axioma 06
Dois pontos P1 e P2, e duas retas I1 e I2, se não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma única dobra que incide P1 em I1 e P2 em I2 gerando os pontos P1' e P2'.
Axioma 07
Dado um ponto P e duas retas I1 e I2, se as retas não forem paralelas, há uma única dobra que faz incidir P em I1 e é perpendicular a I2.