



**UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO
FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITETURA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
Área de Concentração: Infraestrutura e Meio Ambiente**

RODRIGO BORDIGNON

**OTIMIZAÇÃO DE PILARES RETANGULARES EM CONCRETO ARMADO
SUBMETIDOS À FLEXOCOMPRESSÃO RETA**

**Passo Fundo
2010**

RODRIGO BORDIGNON

OTIMIZAÇÃO DE PILARES RETANGULARES EM CONCRETO ARMADO
SUBMETIDOS À FLEXOCOMPRESSÃO RETA

Orientador: Dr. Moacir Kripka

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia para obtenção do grau de Mestre em Engenharia na Faculdade de Engenharia e Arquitetura da Universidade de Passo Fundo na Área de concentração Infraestrutura e Meio Ambiente.

Passo Fundo
2010

RODRIGO BORDIGNON

OTIMIZAÇÃO DE PILARES RETANGULARES EM CONCRETO ARMADO
SUBMETIDOS À FLEXOCOMPRESSÃO RETA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia para obtenção do grau de Mestre em Engenharia na Faculdade de Engenharia e Arquitetura da Universidade de Passo Fundo na Área de concentração Infraestrutura e Meio Ambiente.

Data de Aprovação: Passo Fundo 10 de dezembro de 2010.

Doutor Moacir Kripka
Orientador

Doutor Luis Paulo da Silva Barra
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

Doutor Antonio Thomé
Universidade de Passo Fundo – UPF

Doutor Zacarias Martin Chamberlain Pravia
Universidade de Passo Fundo - UPF

Passo Fundo
2010

AGRADECIMENTOS

Ao professor, Dr. Moacir Kripka, pela orientação, paciência e dedicação;

Aos Professores e Funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade de Passo Fundo, meus agradecimentos;

Aos amigos e colegas da Universidade de Passo Fundo, obrigado pelo incentivo;

A minha esposa Luciana, pelo total incentivo;

Meu muito obrigado a todos que, de qualquer forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha esposa Luciana, que entendem o verdadeiro significado deste trabalho. Aos alunos, a quem deixo minha contribuição na formação acadêmica.

Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.

Cora Coralina

RESUMO

A busca por um projeto que atenda à máxima funcionalidade e segurança com o mínimo custo e, mais do que nunca, mínimo impacto ambiental sempre foi o objetivo almejado pelos engenheiros projetistas. De modo geral, o dimensionamento convencional de estruturas em concreto armado é um processo iterativo e baseia-se em regras práticas, fundamentado na experiência e intuição do projetista, o que torna esse processo exaustivo e que apenas eventualmente pode levar à melhor solução estrutural. Este trabalho apresenta o desenvolvimento e implementação de uma formulação matemática para obtenção de seções ótimas de pilares em concreto armado submetidas à flexocompressão reta, baseada na verificação da capacidade resistente segundo as recomendações da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2007). Foram consideradas como variáveis discretas as dimensões da seção de concreto e a quantidade e diâmetros das armaduras, objetivando a minimização do custo da seção transversal. A otimização foi efetuada com o uso do método *Simulated Annealing*. Alguns exemplos foram elaborados comparando os resultados aos obtidos com base no procedimento de dimensionamento convencional e com outros métodos de otimização, buscando ainda verificar a influência da classe de resistência, variação dos esforços e custos dos materiais no projeto ótimo das seções.

Palavras-chave: Otimização. Pilares. Concreto Armado. Simulated Annealing.

ABSTRACT

Search for a project that meets the performance and safety with minimal cost and, more than ever, minimal environmental impact was always the goal desired by design engineers. In general, the design of conventional reinforced concrete is an iterative process and it is based on the practice rules reasoned on experience and intuition of the designer, which makes this exhaustive process and only occasionally can lead to the best structural solution. This work presents the development and implementation of a mathematical formulation for obtaining optimal cross section of reinforced concrete columns subjected to uniaxial bending, based on the verification of the strength, according to the recommendations of the Brazilian standard ABNT NBR 6118 (2007). The design variables, considered as discrete, were the dimensions of the concrete section and the number and diameters of the steel bars, aiming to minimize the cost of cross section. The optimization was performed using the Simulated Annealing method. Some examples were produced by comparing the results to those obtained based on the conventional design procedure and with other optimization methods, also aiming to identify the influence of resistance class, variation in efforts and material costs in the optimal design of the sections.

Keywords: Optimization. Column. Reinforced Concrete. Simulated Annealing

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Exemplos de restrições	27
FIGURA 2 – Pontos de mínimo	28
FIGURA 3 – Fluxograma do método Simulated Annealing	32
FIGURA 4 – Fluxograma de dimensionamento convencional	35
FIGURA 5 – Convenção dos esforços	36
FIGURA 6 – Diagrama tensão-deformação idealizado para concreto	38
FIGURA 7 – Diagrama tensão-deformação simplificado para aços	39
FIGURA 8 – Domínios de deformações	41
FIGURA 9 – Regiões de deformações	44
FIGURA 10 – Tensões de compressão no concreto	45
FIGURA 11 – Fluxograma de verificação da capacidade resistente de pilar submetido à flexocompressão reta	47
FIGURA 12 – Espaçamento das barras longitudinais	49
FIGURA 13 – Limites da taxa de armadura longitudinal	50
FIGURA 14 – Superfície de interação M-N	52
FIGURA 15 – Variáveis de projeto	53
FIGURA 16 – Detalhamento das seções por dimensionamento convencional	59
FIGURA 17 – Detalhamento das seções ótimas	60
FIGURA 18 – Detalhamento das seções pelo método dos Algoritmos Genéticos	62
FIGURA 19 – Detalhamento das seções pelo método do <i>Simulated Annealing</i>	63
FIGURA 20 – Detalhamento das seções do exemplo III	65
FIGURA 21 – Detalhamento das seções do exemplo IV	67
FIGURA 22 – Seções ótimas para diferentes classes de resistência	69
FIGURA 23 – Composição do custo final	70
FIGURA 24 – Área de concreto da seção	72
FIGURA 25 – Área de aço na seção	72
FIGURA 26 – Taxa de armadura da seção	73
FIGURA 27 – Perímetro de forma da seção	73
FIGURA 28 – Custo total da seção por metro linear	74
FIGURA 29 – Área de concreto da seção	75
FIGURA 30 – Área de aço na seção	75

FIGURA 31 – Taxa de armadura da seção	77
FIGURA 32 – Perímetro de forma da seção	77
FIGURA 33 – Custo total da seção por metro linear	78

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Custos unitários e esforços do exemplo I	60
TABELA 2 – Comparativo de custos para o exemplo I	61
TABELA 3 – Custos unitários e esforços do exemplo II	62
TABELA 4 – Comparativo de custos para o exemplo II	63
TABELA 5 – Comparativo de custos para o exemplo II com o uso de ábaco	64
TABELA 6 – Custos e esforços do exemplo III	64
TABELA 7 – Comparativo de custos para o exemplo III	66
TABELA 8 – Custos e esforços para do exemplo IV	66
TABELA 9 – Comparativo de custos para o exemplo IV	67
TABELA 10 – Valores unitários e esforços	68
TABELA 11 – Resultados para diferentes classes de resistência	69
TABELA 12 – Combinações de esforços para $N_{ds}= 2480$ kN	71
TABELA 13 – Combinações de esforços para $M_{ds}= 32489$ kN.cm	76
TABELA 14 – Variação no custo do concreto classe C20	79
TABELA 15 – Variação no custo do concreto classe C40	79
TABELA 16 – Variação do custo da armadura empregando concreto C20	81
TABELA 17 – Variação do custo da armadura empregando concreto C40	81
TABELA 18 – Variação do custo da forma empregando concreto C20	82
TABELA 19 – Variação do custo da forma empregando concreto C40	83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Considerações Iniciais	12
1.2 Justificativa	13
1.3 Objetivos	14
1.3.1 Objetivo geral	14
1.3.2 Objetivos específicos	14
1.4 Estrutura da dissertação	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1 Introdução	16
2.2 Otimização de estruturas em concreto armado	16
3 FUNDAMENTOS DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA	24
3.1 Introdução	24
3.2 Formulação do problema de otimização	24
3.3 Técnicas de otimização	27
3.4 Método Simulated Annealing	29
4 DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO	33
4.1 Introdução	33
4.2 Dimensionamento convencional de pilares em concreto armado	33
4.3 Convenções	36
4.4 Hipóteses básicas de cálculo	36
4.4.1 Manutenção das seções planas	37
4.4.2 Aderência perfeita	37
4.4.3 Resistência à tração do concreto	37
4.4.4 Plastificação dos materiais	37
4.4.5 Estado limite último	40
4.5 Resultante de compressão no concreto	44
4.6 Processo iterativo de verificação da capacidade resistente	45
4.7 Restrições dimensionais e taxas de armaduras	48

5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	51
5.1 Introdução	51
5.2 Formulação do problema de otimização	51
5.2.1 Variáveis de projeto	53
5.2.2 Função objetivo	54
5.2.3 Restrições do problema	54
6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	58
6.1 Introdução	58
6.2 Comparativo entre projeto convencional e projeto otimizado	59
6.2.1 Exemplo I	59
6.3 Comparativo entre projetos ótimos	61
6.3.1 Exemplo II	61
6.3.2 Exemplo III	64
6.3.3 Exemplo IV	66
6.4 Influência da variação da classe de resistência do concreto e dos esforços solicitantes	68
6.4.1 Exemplo V	68
6.4.2 Exemplo VI	70
6.5 Análise da variação dos custos unitários dos materiais	78
6.5.1 Análise da alteração no custo unitário do concreto	79
6.5.2 Análise da alteração no custo unitário da armadura	80
6.5.3 Análise da alteração no custo unitário da forma	82
7 CONCLUSÕES	84
7.1 Conclusões	84
7.2 Sugestões de continuidade	85
REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O desenvolvimento econômico de um país ou região depende diretamente de uma infraestrutura adequada e sua implantação muitas vezes demanda elevados recursos dos empreendedores, sejam públicos, sejam privados. Alguns empreendimentos indispensáveis, às vezes, são inviabilizados pelo seu impacto ao meio ambiente ou pelo elevado custo econômico, representado em grande parte pelo consumo de materiais necessários para sua implantação.

Segundo Santos (2008), em nenhum país modernizado a tecnologia do concreto armado foi tão predominante como no Brasil, onde é o material estrutural hegemônico nas construções das cidades. Por diversos motivos, destacando-se a questão cultural, o concreto armado continua sendo empregado largamente em obras de infraestrutura, como pontes e viadutos, edifícios comerciais, residenciais ou industriais, além de inúmeras outras aplicações.

Um elemento em concreto armado contém barras de aço em seu interior e é projetado para que ambos os materiais resistam aos esforços. O aço é uma liga metálica composta de ferro e carbono, podendo conter outros elementos em sua composição, que lhe conferem propriedades estruturais. Mesmo o Brasil ocupando lugar de destaque em reservas de minério de ferro, o aço aparece como um dos maiores contribuintes no custo de obras de infraestrutura.

Lelles *et al.* (2005) citam 49 impactos ambientais decorrentes da extração de agregados, dos quais alguns são irreversíveis. A fabricação de cimento figura como uma das maiores fontes de emissão de dióxido de carbono para a atmosfera. De acordo com o CSI-Cement Sustainability Initiative (*apud* ROCHA, 2009), a indústria produtora de cimento é responsável por 5% dessas emissões; entre 1990 a 2007, a produção de cimento no Brasil cresceu 90% e as emissões de dióxido de carbono, em 55%. Segundo Tosta (2007), o dióxido de carbono não é proveniente unicamente da queima de combustíveis, mas também da própria etapa de calcinação da matéria-prima, além de que durante o processo de produção também ocorrem formação e liberação de outros gases para a atmosfera.

A busca por um projeto ótimo de uma estrutura ou obra de engenharia, que atenda à máxima funcionalidade e segurança com o mínimo custo e, mais do que nunca, mínimo impacto ambiental, sempre foi o objetivo almejado pela maioria dos engenheiros projetistas.

Atualmente, com o avanço da tecnologia é possível investigar um maior número de variáveis e restrições em um projeto, diminuindo as simplificações e tornando o modelo matemático cada vez mais representativo do estado real. Isso proporciona uma maior amplitude no uso de dados e técnicas para alcançar um projeto ótimo; conseqüentemente, o consumo de materiais e recursos pode ser reduzido, o que, aliado a um sistema de execução sem perdas, contribui para reduzir os impactos ao meio ambiente, além de poder viabilizar economicamente muitas obras de infraestrutura.

Sendo muitas as soluções possíveis, a escolha da mais adequada pode ser facilitada com a implementação de técnicas matemáticas de otimização. Atualmente, há várias ferramentas de análise e dimensionamento de estruturas, mas não é comum a incorporação de módulos de otimização matemática para que essas ferramentas possam analisar e dimensionar de forma otimizada uma estrutura.

É nesse contexto que este trabalho propõe-se incorporar ao processo de verificação da capacidade resistente de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexocompressão reta, seguindo os preceitos da norma brasileira ABNT NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento (2007), um método heurístico de otimização, o método *Simulated Annealing*. Este método foi escolhido em razão da sua facilidade de implementação computacional, da possibilidade de fuga de mínimos locais e por apresentar reduzido número de parâmetros de controle, além de ter sido empregado com êxito em outros problemas de otimização estrutural.

1.2 Justificativa

Otimizar processos sempre teve importância, sobretudo na indústria, onde se busca a máxima eficiência produtiva. Em obras, o foco principal sempre esteve na redução do custo, na locação da mão de obra e na logística dos materiais empregados na construção.

A evolução de métodos construtivos, cada vez mais utilizando sistemas industrializados e equipamentos modernos, a qualificação de pessoal, a necessidade de obras

mais precisas, econômicas e de mínimo impacto ambiental são alguns fatores que demonstram a necessidade de emprego de técnicas de otimização matemática diretamente relacionada a problemas de engenharia.

A otimização matemática pode ser utilizada como uma ferramenta de auxílio ao projetista nas tomadas de decisões, desde a definição do pré-dimensionamento dos elementos estruturais até seu dimensionamento final, eliminando o procedimento de tentativa e erro e, conseqüentemente, diminuindo o tempo de projeto.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é, por meio de técnicas matemáticas de otimização, sistematizar o processo de obtenção do projeto de menor custo possível, que atenda aos preceitos normativos da capacidade resistente de pilares de seção retangular em concreto armado submetidos à flexocompressão reta.

1.3.2 Objetivos específicos

Elaborar uma formulação matemática para minimização do custo de pilares em concreto armado de seção transversal retangular submetidos à flexocompressão reta, tendo como variáveis as dimensões da seção de concreto e o número e a disposição das barras de aço, atendendo às restrições de funcionalidade e segurança.

Implementar computacionalmente a formulação desenvolvida, associando-a um método heurístico de otimização, o *Simulated Annealing*, e a uma rotina para verificação da capacidade resistente da seção do pilar.

Comparar o custo final do projeto de um pilar otimizado com projetos elaborados por técnicas convencionais, buscando a proposição de parâmetros que conduzam a projetos otimizados.

Comprovar a viabilidade da implementação e uso de técnicas matemáticas de otimização em projetos de engenharia estrutural.

1.4 Estrutura da dissertação

Além do presente capítulo, no qual se apresentam a justificativa, os objetivos e a estrutura do trabalho, este trabalho está composto por mais seis capítulos.

O capítulo dois apresenta a revisão bibliográfica sobre os estudos de otimização de estruturas em concreto armado.

No capítulo três é abordado o tema da otimização matemática e apresenta-se o método utilizado no trabalho.

O capítulo quatro discorre sobre o dimensionamento clássico e hipóteses básicas de dimensionamento de estruturas em concreto armado.

O capítulo cinco descreve a metodologia utilizada no trabalho, a formulação do problema de otimização, as variáveis de projeto, restrições e a função objetivo a ser minimizada no processo.

No capítulo seis são apresentadas as simulações numéricas e análises comparativas dos resultados gerados pelo processo de otimização.

Por último, o capítulo sete apresenta as conclusões gerais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Um processo de otimização, além da minimização ou maximização dos recursos disponíveis, deve levar a uma melhor utilização destes, ou seja, empregá-los onde e como realmente são necessários.

Instintivamente, o ser humano busca, entre várias possibilidades, a melhor maneira de explorar os recursos existentes e executar suas atividades cotidianas. Isso demonstra a incessante busca por mecanismos e técnicas para aumentar a eficiência durante a execução de alguma tarefa.

No campo da engenharia estrutural, seja em concreto armado, seja em estruturas de aço, o emprego de técnicas matemáticas de otimização, geralmente, objetiva minimizar o custo ou o peso de uma estrutura, atendendo aos estados limites preconizados por normas. Basicamente, os estudos estão focados na disposição ótima dos elementos ou na otimização da seção transversal desses, o que representa a maioria dos estudos, ou a associação dos dois casos.

2.2 Otimização de estruturas em concreto armado

Martínez (2007) cita Galileu Galilei, em 1638, como o primeiro a se interessar pelo estudo de otimização estrutural, com estudos referentes à deflexão de vigas, e Michell, em 1904, que abordou o tema sobre estruturas contínuas submetidas a cargas constantes com o mínimo de material. Aponta também Bernouilli, Lagrange e Navier como outros cientistas com interesse em encontrar a melhor forma geométrica para resistir a certos esforços.

Segundo Rodrigues Júnior (2005), o primeiro trabalho documentado sobre otimização estrutural é atribuído a Maxwell em 1869, cujo interesse era a obtenção do projeto de treliças de menor peso. Trabalhos envolvendo técnicas de otimização de estruturas em concreto armado são mais recentes, sendo estudo de Langendonck em 1950, sobre o dimensionamento econômico de seções retangulares submetidas à flexão normal simples, um dos pioneiros

nessa área. No trabalho de Schmit, em 1960, técnicas de programação matemática foram utilizadas com o objetivo de minimizar o peso de uma treliça, o que impulsionou a utilização da otimização aplicada à análise e ao dimensionamento de estruturas.

Kanagasundaram e Karihaloo (1990) formularam uma função a ser otimizada, considerando os custos de forma, concreto e aço para o projeto de custo mínimo de vigas e pilares de seção transversal retangular, seguindo aos preceitos da norma Australiana AS3600-88 quanto à resistência à flexão e ao cisalhamento. Foi empregado duas técnicas de Programação Matemática diferentes: a programação sequencial linear e a programação sequencial convexa. A otimização da seção transversal levou em conta as armaduras mínimas e máximas, a posição da linha neutra, a resistência ao fogo e, no caso das vigas, foi considerado o comportamento em serviço (flecha), sendo dimensionadas com armaduras simples. Também realizaram um estudo da sensibilidade da função custo quanto ao aumento do preço da forma, observando que o custo das formas pode representar aproximadamente 65% do custo total, sem levar em conta seu reaproveitamento.

Yang *et al.*, em 1992, estudaram a otimização de estruturas de concreto armado, com o objetivo de obtenção de valores ótimos de um pilar submetido à flexão oblíqua e a otimização de uma viga de um pórtico em concreto armado. Para a minimização da função, os autores empregaram o método do gradiente reduzido generalizado. A função custo considerava somente as parcelas relativas aos custos do aço e do concreto, seguindo as especificações da norma Americana ACI 318-89. Os resultados ótimos levaram a uma redução de até 18% no custo do pilar e de 21% no custo da viga.

Chakrabarty (1992) estudou o dimensionamento ótimo de seções retangulares de vigas de concreto armado, com o objetivo de minimizar o custo por unidade de comprimento, utilizando a programação geométrica. Considerou como variáveis de projeto a altura útil, a área da armadura longitudinal de tração, a largura da seção transversal, o momento na seção mais solicitada e a posição da linha neutra. O autor apresentou alguns exemplos de dimensionamento de vigas de concreto armado com seção retangular, calculando os valores da função custo para diferentes larguras da seção e mantendo constante a altura útil das mesmas. Nesses exemplos, o autor observou que as reduções de custos são diretamente proporcionais às reduções da largura e que, quanto menor é o preço do aço, maior é a taxa geométrica de armadura da seção ótima. Ressaltou ainda a importância da utilização de processos de otimização, por meio dos quais podem ser obtidas taxas de armadura bem

menores que as obtidas com o uso de técnicas convencionais de dimensionamento, conduzindo a uma seção mais econômica.

Zielinski, Long e Troitsky (1995) apresentam um procedimento para otimização de pilares em concreto armado objetivando o menor custo. Primeiramente, é encontrada a capacidade resistente de um pilar com base nos dados de entrada referentes à configuração da seção transversal. O procedimento de verificação da capacidade resistente foi baseado nas especificações da norma Canadense CSA CAN3-A23.3-M84. No processo de otimização foi utilizado o método de Powell, que é um método de busca direta baseado em programação matemática. Para os pilares submetidos a cargas uniaxiais, as dimensões da seção transversal e a taxa de armadura são consideradas variáveis de projeto. Nos pilares com cargas excêntricas, as variáveis de projeto consideradas no processo foram as dimensões da seção transversal, o diâmetro e o número de barras de aço. Foram considerados, para os exemplos estudados, concreto com resistências à compressão iguais a 30 MPa e 40 MPa e aço com tensão de escoamento igual a 400 MPa. Os resultados otimizados foram comparados com os resultados obtidos por métodos convencionais, constatando-se uma redução de até 13% nos custos com o emprego de técnicas de otimização.

Soares (1997) apresentou uma formulação da minimização do custo da seção transversal, com a qual é possível obter o mínimo custo das vigas de um pavimento através da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. O autor concluiu que, quando se analisa um pavimento composto por elementos de placa e de barra, algumas vigas podem sumir no processo de otimização. À medida que essas vigas vão sumindo, os esforços solicitantes dessas vão se redistribuindo pelas vigas e lajes adjacentes, verificando-se uma maior economia com a eliminação de algumas vigas e, ainda, que as estruturas mais econômicas têm uma maior taxa geométrica de armadura.

Balling e Yao (1997) abordaram a otimização de pórticos em três dimensões de concreto armado através da programação sequencial quadrática, considerando três formulações distintas: uma considerou como variáveis as dimensões da seção, o diâmetro e a disposição longitudinal das barras de vigas e pilares; a segunda, as dimensões da seção e a área total de aço; por fim, uma terceira, simplificada e baseada na primeira, eliminou a área de aço como incógnita e partiu do pressuposto do uso da quantidade mínima de aço. Segundo os autores, as dimensões da seção independem do número, do diâmetro e da distribuição das barras de aço na seção transversal, sendo, portanto, a última formulação considerada a mais

rápida e eficiente. Na análise não foi considerada a resistência do concreto como variável, nem a armadura para resistir ao esforço cortante.

Kripka (1998) estudou a aplicabilidade da otimização matemática em estruturas analisadas pelo modelo de grelha com o emprego de técnicas de programação matemática, tendo como variáveis de projeto a posição dos apoios e objetivando a uniformização dos esforços nas vigas. O autor observou que, em virtude dessa uniformização, os pilares vinculados ao pavimento otimizado tendem a assumir uma mesma área da seção transversal, gerando uma economia adicional em virtude da padronização.

Rafiq e Southcombe (1998) avaliaram o projeto detalhado de pilares em concreto armado, equacionando uma função de busca pela minimização da taxa armadura e pela maximização da capacidade resistente da seção transversal, submetida à flexocompressão oblíqua, pelo método dos Algoritmos Genéticos, com referência na norma britânica BS8110. Concluíram que a otimização implementada levou a uma redução da área de armadura, chegando a 18%, quando comparada com o método simplificado da referida norma.

Sarma e Adeli (1998) fizeram uma revisão cronológica de estudos publicados e baseados na otimização de custos de elementos e estruturas de concreto armado, protendido e reforçado com fibras como vigas, pilares, lajes, pórticos, pontes, tanques de água, entre outros. Concluíram que há necessidade de realizar pesquisas sobre otimização de custos mais realistas, com estruturas tridimensionais, principalmente de grandes estruturas, o que pode resultar em economia significativa. Também citam que a maior parte dos trabalhos sobre a otimização de custos de estruturas de concreto inclui somente os custos de material, ignorando o custo da forma, fabricação, transporte e montagem.

Trabalho semelhante foi realizado por Cohn, Fellow e Dinovitzer (1994), que procederam a estudo sobre a história da otimização estrutural até 1992, abrangendo estruturas do tipo treliças planas e espaciais, vigas, colunas, cabos, pórticos, arcos, placas, cascas e chapas, tanto em concreto armado como em aço, produzindo um amplo catálogo, abrangendo aproximadamente quinhentos exemplos, entre livros e artigos.

Rath, Ahlawat e Ramaswamy (1999) apresentaram um método para otimização da forma da seção transversal de elementos isolados de concreto armado submetidos à flexão. Para a otimização são utilizadas diferentes técnicas, como programação quadrática e o método dos Algoritmos Genéticos. A partir de uma seção inicial retangular, a viga é otimizada, variando as dimensões ao longo do comprimento. Também foram exploradas mudanças na

forma da seção transversal, passando a viga, após a otimização, a apresentar uma seção em forma de I, com altura variável ao longo do seu comprimento. A otimização da peça é feita levando-se em conta o diâmetro, o número de barras e a redução do volume de concreto, assumindo-se que o custo da forma seja proporcional a este. Três exemplos de dimensionamento são apresentados: uma viga simplesmente apoiada, uma viga em balanço e uma viga contínua de dois vãos, todas submetidas a cargas uniformemente distribuídas. É demonstrada uma redução significativa no custo de material (40-56 %), além de uma forma estética agradável. Segundo os autores, este tipo de otimização traz vantagens principalmente para peças pré-moldadas produzidas em série ou vigas de grandes vãos de pontes, proporcionando uma redução significativa nos custos.

Argolo (2000) desenvolveu um estudo de otimização de seções de concreto armado submetidas à flexocompressão reta utilizando o método dos Algoritmos Genéticos. Para isso procedeu a comparações entre o dimensionamento ótimo e o dimensionamento convencional com ábacos de iteração. Também realizou a comparação com outras técnicas de otimização relatadas em estudos publicados, chegando a uma economia no custo da seção de 7% a 30% do obtido por outras técnicas de otimização e pelo dimensionamento convencional. Ainda realizou uma análise de sensibilidade no custo ótimo referente ao consumo e à variação nos preços dos materiais, concluindo que o custo da forma foi o que apresentou maior impacto no custo final da estrutura.

Vianna (2003) apresentou um procedimento para otimizar o pré-dimensionamento de pórticos planos de edifícios em concreto armado a partir do posicionamento dos elementos. A solução do problema é alcançada através da resolução analítica do sistema de equações não-lineares gerado, a partir da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. O processo foi se repetindo até que não houvesse mais redistribuição significativa dos esforços, quando, então, a estrutura era considerada otimizada. Verificou que as seções mais econômicas para as vigas se encontram próximas a uma seção normalmente armada. Porém, à medida que o carregamento aumenta, tende a ser mais vantajoso o aumento da armadura de compressão, uma vez que o aumento da seção, conseqüentemente, aumenta o consumo de concreto e de forma. No estudo das seções dos pilares foi constatado que, quando não há restrições sobre o processo de otimização, as seções ótimas tendem a se manter com uma taxa de armadura próxima da taxa mínima permitida e que, quanto mais camadas de armadura são colocadas na seção, mais elevado será o custo ótimo da mesma. Quando submetidos a esforços axiais, a forma da seção transversal dos pilares tende a uma forma quadrada e, quando estão

submetidos a maiores excentricidades, a uma forma mais alongada na direção do momento atuante.

Bastos (2004) desenvolveu um programa para dimensionamento ótimo de seções retangulares em concreto armado submetidas a esforços de flexocompressão oblíqua, buscando obter o menor custo total dos materiais, assim como o custo mínimo da forma. O processo de otimização utilizou o método dos Algoritmos Genéticos. Foram comparados exemplos entre o dimensionamento ótimo obtido e o cálculo tradicional empregando ábacos de interação. Para uma seção transversal com dimensões fixas de 40 cm x 60 cm, foi alcançado um resultado ótimo 13% mais econômico, chegando a 30% quando as dimensões da seção são liberadas para otimização. O autor concluiu também que o custo ótimo da seção é mais influenciado pelo custo representado pela forma.

Rodrigues Júnior (2005) estudou uma formulação para o projeto ótimo de pilares de edifícios altos de concreto armado, variando as dimensões da seção transversal, armadura longitudinal e a resistência característica do concreto de pilares. O problema de otimização proposto foi resolvido empregando-se técnicas de programação matemática. A função objetivo do problema de otimização foi o custo total das colunas do edifício. Este estudo concluiu que, para pilares retangulares, a solução ótima apresenta dimensões da seção, base e altura muito próximas quando há essa liberdade. Quando há redução nas dimensões da seção transversal ao longo da altura, produzem-se significativas reduções no custo dos pilares. Em razão do elevado custo do aço em relação ao do concreto, os pilares tendem a dimensões da seção transversal maiores, conseqüentemente com baixas taxas de armadura. A solução ótima mostra-se pouco sensível a variações no preço do concreto. Variações de 20% no preço do concreto pouco alteraram as dimensões das seções transversais.

Camp, Pezeshk e Hansson (2005) formularam o problema de otimização para projeto de menor custo aplicado a pórticos planos em concreto armado, de acordo com as especificações da norma Americana ACI 318-89. No processo de otimização os autores utilizaram o método dos Algoritmos Genéticos. As vigas foram analisadas com base na resistência à flexão e os pilares, à flexocompressão reta. As variáveis de projeto consideradas foram as dimensões, o número de barras e a topologia da seção. Vários exemplos de dimensionamento ótimos foram apresentados, demonstrando pouca redução de custos quando submetidos ao processo de otimização. Os autores citam que as verificações sistemáticas e automáticas das restrições normativas fornecem um alto nível de confiança na integridade de um projeto de dimensionamento.

Nina (2006) desenvolveu uma rotina computacional para otimizar o pré-dimensionamento de edifícios em concreto armado, analisados como pórticos planos, utilizando o método de programação quadrática sucessiva para resolver o problema de otimização. Em relação ao estudo de otimização dos pilares, o valor mais econômico está relacionado com o aumento da altura, mantendo a armadura próxima à mínima. Quando a altura passa a ser limitada pelo seu valor máximo, há um incremento da área de aço, resultando em algumas camadas subutilizadas em virtude da disposição simétrica das barras para resistir ao incremento dos esforços. Cita ainda que as proporções do custo de cada parcela que compõem a função objetivo são de, aproximadamente, 23% para concreto, de 16% para a armadura e de 61% para a forma na maioria dos casos estudados, não considerando o reaproveitamento das mesmas. Da mesma maneira, o custo da forma permanece o mais alto quando a altura da viga é aumentada, para atender à restrição de deformações para a maior parte dos esforços.

Payá (2007) comparou cinco métodos heurísticos, entre eles o *Simulated Annealing*, buscando minimizar o custo de pórticos planos em concreto armado. O modelo em que se utilizou esse método proporcionou o projeto de menor custo, quando comparado com os melhores resultados dos demais métodos. Segundo o autor, esse foi o motivo da escolha deste método para o estudo de otimização de pórticos de diferentes configurações. O estudo revelou que o emprego de concretos com resistências à compressão superiores a 25 MPa conduz a uma economia considerável na estrutura e que as formas representam o percentual mais importante do custo final da estrutura (entre 39.9 e 46.1% do total), seguido pelo concreto (entre 27.02 e 30.6%), armadura de aço (entre 16.98 e 21.4%) e cimbramento de vigas (entre 8.2 e 9.9%).

Martínez (2007) comparou diversos algoritmos de otimização que permitiam obter o dimensionamento de pilares retangulares de seção vazada de concreto armado de viadutos rodoviários e ferroviários de diferentes alturas e vãos. Entre esses métodos está o *Simulated Annealing*. No estudo foram consideradas 95 variáveis, entre as quais se incluíram diferentes classes de resistência do concreto. As soluções das diferentes heurísticas e de cada tipo de pilares estudados foram analisadas estatisticamente, o que permitiu um maior nível de confiança dos dados obtidos e a conclusão de que, de todas as heurísticas testadas, os resultados encontrados foram similares.

Cortês (2010) estudou o dimensionamento ótimo de pontes pré-fabricadas, tendo como objetivo a minimização do custo da estrutura, empregando o método dos Algoritmos

Genéticos. As variáveis de projeto foram o número de longarinas em concreto protendido, suas dimensões, número e diâmetro das cordoalhas de protensão e das barras de aço para armadura longitudinal passiva, além do diâmetro e espaçamento das barras da armadura transversal. Para a laje do tabuleiro foram consideradas como variáveis a espessura da laje, a armadura nas direções principal e secundária e a classe de resistência do concreto. Seguiram-se as recomendações da norma ABNT NBR 6118 (2003) para que esses elementos estruturais resistissem aos esforços solicitantes gerados pelo carregamento móvel e estático. Foram comparados projetos já executados com o dimensionamento ótimo, concluindo-se que a otimização elimina o processo de tentativa e erro na obtenção da melhor solução, já que as alternativas encontradas são soluções possíveis, muitas delas mais econômicas que as soluções obtidas da maneira tradicional.

3 FUNDAMENTOS DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Introdução

Técnicas de otimização há tempos são empregadas em problemas de engenharia e em outros campos da ciência. Logo após a Segunda Guerra Mundial, houve o desenvolvimento de técnicas de otimização, que, juntamente com o surgimento dos computadores, propiciaram a implementação de métodos de otimização, aumentando a complexidade das análises e a possibilidade de consideração de um maior número de variáveis e restrições envolvidas no problema.

Algumas vantagens do uso da otimização matemática são apresentadas por Vanderplaats (1984), das quais a redução do tempo de projetos é uma das principais, além da possibilidade do uso simultâneo de um grande número de variáveis e de restrições. O autor cita como desvantagem o aumento do tempo de processamento computacional em consequência do aumento do número de variáveis, levando a uma lenta convergência e, às vezes, não obtendo um mínimo global.

Neste capítulo são apresentados, sucintamente, os conceitos básicos nos quais se fundamentam os métodos de otimização, além de uma abordagem mais elaborada do método *Simulated Annealing*, utilizado neste trabalho.

3.2 Formulação do problema de otimização

A otimização matemática de um problema pode ser alcançada ao se encontrar a melhor das soluções possíveis com o auxílio de um algoritmo apropriado, levando em conta as variáveis dentro de um conjunto factível de soluções e condicionadas a algumas restrições impostas.

A formulação matemática básica de um problema de otimização, condicionada a uma função multidimensional e restrições, pode ser descrita como (VANDERPLAATS, 1984):

$$\text{Minimizar:} \quad f(x_i) \quad i = 1, n \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad g_j(x_i) \leq 0 \quad j = 1, m \quad (2)$$

$$h_k(x_i) = 0 \quad k = 1, l \quad (3)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (4)$$

onde f é a função objetivo, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ consiste no vetor das variáveis de dimensão n e as demais funções são as chamadas restrições do problema (respectivamente, restrições de desigualdade g , de igualdade h e espaço de possíveis valores de x).

Encontrar a solução de um problema de otimização consiste em descobrir o ponto de máximo ou de mínimo de uma função que o descreve. Os problemas de otimização matemática apresentam alguns conceitos e definições empregados na literatura, apresentados a seguir:

- Função objetivo: é a função a ser minimizada ou maximizada. Representa matematicamente o problema a ser otimizado e pode conter uma ou mais variáveis de projeto. Esta função pode ser classificada como multimodal, no caso de apresentar mais de um ponto de mínimo ou de máximo ou unimodal, quando apresenta somente um ponto de valor ótimo. Quando esta função apresenta mais de uma variável, é chamada multidimensional; no caso de apresentar somente uma variável, é unidimensional.
- Variáveis de projeto: são os valores que se alteram durante o processo de otimização, podendo ser contínuas (reais) ou discretas, inteiras ou não. Do ponto de vista físico, pode representar informações como as dimensões da seção, diâmetros das barras de aço, etc.
- Restrições de projeto: são funções de igualdade ou desigualdade que descrevem situações de projeto, delimitando o espaço de busca. Podem estar relacionadas diretamente com as variáveis de projeto, limitando seus valores,

ou condicionadas a valores limites, como tensões, deslocamentos, espaçamentos, etc.

- Espaço de busca: é o conjunto, espaço ou região que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema a ser otimizado, sendo delimitado pelas funções de restrição.
- Ponto ótimo: é o ponto formado pelas variáveis de projeto que minimiza ou maximiza o valor da função objetivo e satisfaz as restrições impostas.
- Valor ótimo: é o valor da função objetivo no ponto ótimo.
- Solução ótima: é o par formado pelo ponto ótimo e pelo valor ótimo, podendo ser local, quando um valor ótimo é localizado, ou global, quando um valor ótimo é localizado e não existe a possibilidade de outra solução melhor. Pode ser restrita, quando o valor ótimo encontrado atende a todas as restrições impostas, ou irrestrita, no caso de a solução ótima não atender às restrições.

No caso de haver mais de um ponto de máximo ou de mínimo de valores iguais, a função apresenta mais de uma solução ótima, e essas serão chamadas de soluções alternativas.

Um conceito fundamental que auxilia na compreensão é o da restrição ativa. Uma restrição de desigualdade $g_i(x) \leq 0$ se diz ativa em um ponto factível x se $g_i(x) = 0$, e é inativa em x se $g_i(x) < 0$. A restrição de igualdade $h_i(x) = 0$ é ativa em qualquer ponto factível. As restrições ativas em um ponto factível x restringem o domínio de factibilidade nas proximidades de x , enquanto as outras restrições, as inativas, não exercem influência nas proximidades de x . Portanto, ao analisar as propriedades de um ponto mínimo local, pode-se centralizar a atenção nas restrições ativas.

A Figura 1 ilustra exemplos de restrições ativas e inativas, observando-se que a restrição $g_1(x)$ é ativa em x e as restrições $g_2(x)$ e $g_3(x)$ são inativas em x . Dado um ponto viável x , as restrições ativas nesse ponto se comportam como restrições de igualdade.

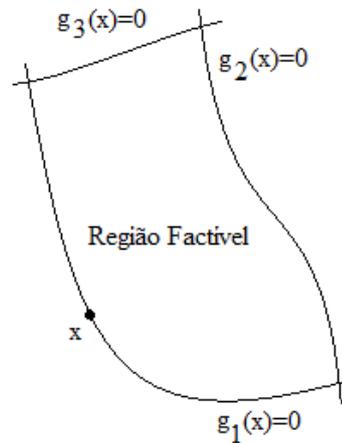


FIGURA 1 – Exemplos de restrições

Em razão das características do problema formulado, diversas técnicas podem ser empregadas com o objetivo de se obter a solução ótima.

3.3 Técnicas de otimização

Os algoritmos empregados para a solução de problemas de otimização são classificados, basicamente, em determinísticos ou probabilísticos.

Os métodos de otimização baseados em algoritmos determinísticos geram uma sequência de soluções possíveis, requerendo na maioria das vezes que a função objetivo seja contínua e diferenciável, como é o caso da maioria dos métodos da programação matemática, porém não representa a maioria dos problemas práticos de engenharia, dificultando, assim, a sua aplicação. Esses métodos fornecem um valor mínimo local de uma função, como visto na Figura 2, o que em alguns casos não representa o valor ótimo da função.

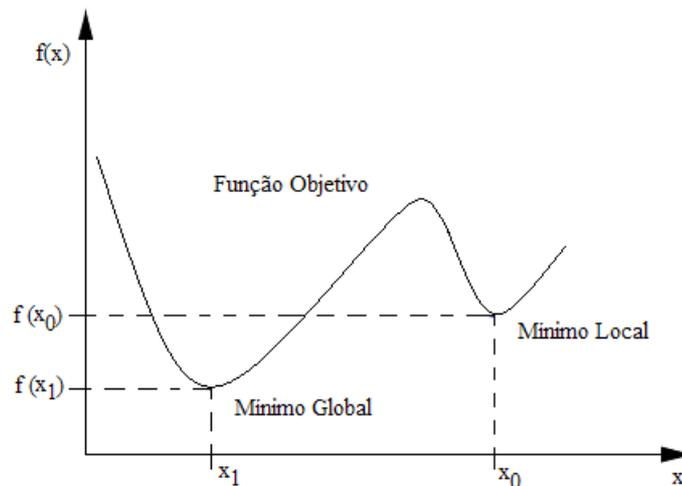


FIGURA 2 – Pontos de mínimo

Desde a década de 1970, tem aumentado o interesse por algoritmos inspirados no comportamento da natureza, com base na física e na biologia, para se resolverem problemas complexos de otimização, principalmente em situações em que métodos tradicionais se mostram pouco eficientes.

Os estudos dos métodos heurísticos com estratégias de busca controlada por critérios probabilísticos, conhecidos como meta-heurísticos (no grego, “meta” significa nível superior e “heurístico”, encontrar), vêm desempenhando importante papel, uma vez que envolvem apenas valores das funções no processo, não importando se existe unimodalidade ou mesmo continuidade em suas derivadas (KRIPKA, 2003).

Os primeiros estudos com algoritmos heurísticos, baseados em critérios probabilísticos, surgiram com John Henry Holland (1975), considerado o criador do Método dos Algoritmos Genéticos, o qual é baseado na evolução das espécies.

Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) apresentaram um método heurístico, o *Simulated Annealing*, no qual os parâmetros são variados de acordo com dados probabilísticos e é fundamentado na simulação do processo mecânico de recozimento de metais. Segundo Cortês (2010), este trabalho coincidiu com o aumento da capacidade de processamento dos computadores, ocorrido na década de 1980, contribuindo para que esse fosse o primeiro método de otimização heurística a se popularizar no meio científico, o qual será adotado neste estudo.

Na década de 1990 surgiram diversas outras técnicas probabilísticas, destacando-se duas delas: uma, a técnica de otimização *Particle Swarm*, atribuída a Kennedy, Eberhart e Shi, que foram os primeiros a simular o comportamento social de indivíduos; outra, quando Marco Dorigo propôs um algoritmo chamado *Ant Colony*, baseado no comportamento de formigas em busca de alimentos.

3.4 Método *Simulated Annealing*

O *Simulated Annealing* é um método heurístico inspirado na natureza e tem sua origem fundamentada na simulação do processo mecânico de recozimento de metais.

Quando um metal é aquecido a altas temperaturas, provocando a fusão, esse processo é chamado de recozimento (*annealing*) e os átomos se movimentam livremente. A solidificação se dá pelo resfriamento lento e controlado e leva a que esses átomos se organizem numa configuração ordenada e estável, formando uma estrutura uniforme e com energia mínima, tendo como resultado uma redução de defeitos no material. Caso o metal seja resfriado de forma brusca, a microestrutura tende a um estado instável.

Metrópolis *et al.* (1953) apresentaram um algoritmo para modelagem do processo de recozimento de metais, citado anteriormente, simulando as mudanças de energia em um sistema de partículas à medida que a temperatura diminui até um estado estável, como descrito a seguir.

Dado um estado corrente i do material com energia E_i , o estado subsequente j será gerado por um mecanismo de perturbação que transforma o estado corrente em E_j , agora com uma pequena distorção. A cada geração de E_j , é testada a variação do valor da função objetivo, isto é:

$$\Delta E = E_j - E_i, \tag{5}$$

sendo:

$\Delta E < 0$: Houve redução de energia, sendo a nova solução melhor que a anterior. Logo, E_j passa a ser a nova solução corrente.

$\Delta E \geq 0$: Houve um aumento de energia. A aceitação desse tipo de solução depende de uma probabilidade conhecida como “critério de Metrópolis”, calculada pela função:

$$p(\Delta E) = \exp\left(\frac{-\Delta E.K}{T}\right) \quad (6)$$

onde T é a temperatura do corpo e K , a constante de Boltzmann.

Da mesma maneira que no método original de recozimento na termodinâmica, o processo inicia com um alto valor de T , para o qual uma nova solução é gerada e T passa a ser um parâmetro de controle, e a constante de Boltzmann não tem analogia num problema de otimização, sendo eliminada. O aceite dessa nova solução dar-se-á automaticamente caso acarrete redução no valor da função; em oposição, sendo o novo valor da função maior que o anterior, o aceite dar-se-á por um critério probabilístico, sendo a função de aceite:

$$p = \exp\left(\frac{-\Delta f}{T}\right) \quad (7)$$

Gera-se um número randômico “ r ” a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Se este número for menor ou igual a “ p ”, aceita-se a solução; em caso contrário, a solução é rejeitada.

A temperatura T assume, inicialmente, um valor elevado, em que a maioria das soluções é aceita. Após cada série de tentativas de obtenção de uma melhor solução, a temperatura é gradativamente diminuída por uma razão de resfriamento α , sendo $0 < \alpha < 1$.

$$T_{k+1} = \alpha T_k \quad (8)$$

Silva (1998) sugere que a temperatura seja reduzida lentamente e que o valor usual de α fique entre 0,8 e 0,99. Valores baixos de α levam a uma solução rápida, podendo chegar a soluções pouco eficientes; ao contrário, se α tender a 1, o tempo de execução é maior, levando a uma melhor solução final.

O programa tenta restabelecer o equilíbrio a cada redução de temperatura executando um número fixo L de iterações pela vizinhança. O número de transições requeridas para restabelecer esse equilíbrio depende da variação da temperatura e do tamanho do problema.

O procedimento é finalizado quando a temperatura chega a um valor próximo de zero, ou “congelado”, e nenhuma solução que piore o valor da melhor solução seja aceita, ou seja, quando o sistema estiver estável. A solução obtida quando o sistema se encontra nessa situação evidencia o encontro de um mínimo global.

O fluxograma básico para o método *Simulated Annealing* é apresentado na Figura 3.

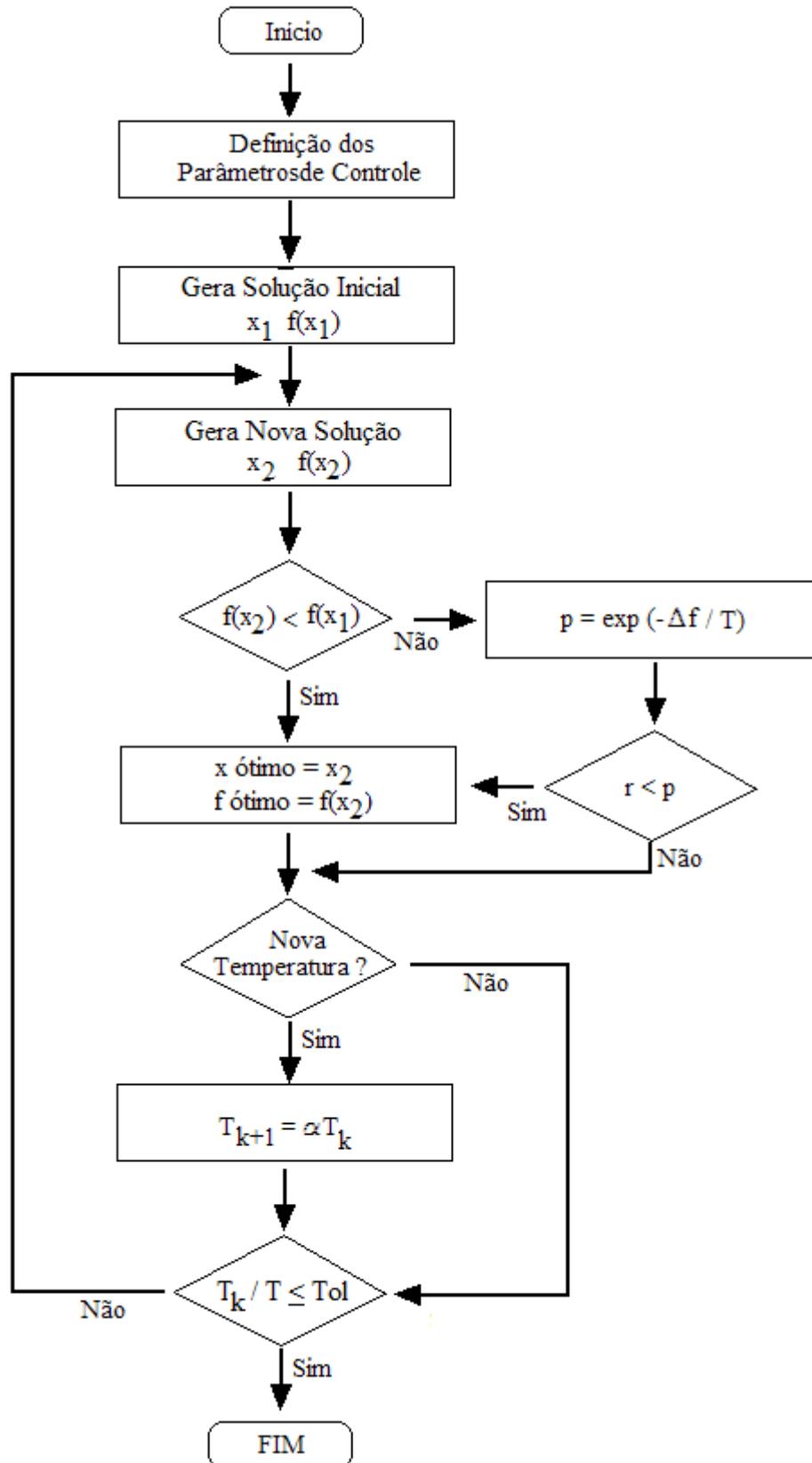


FIGURA 3 – Fluxograma do método *Simulated Annealing*

4 DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO

4.1 Introdução

Uma estrutura deve ser projetada para atender, além dos aspectos econômicos e estéticos, a alguns requisitos de qualidade, e deve suportar as ações impostas durante sua vida útil sem perder seu equilíbrio estático ou ruptura, ou seja, ser segura. As deformações, em condições normais de utilização, devem ser suficientemente pequenas para não provocar danos, afetar o uso ou a estética; portanto, a estrutura deve ter também um bom desempenho em serviço. Essa estrutura ainda deve ser durável, mantendo-se em bom estado, sem necessidade de altos custos com reparos ao longo de sua vida útil.

4.2 Dimensionamento convencional de pilares em concreto armado

Os pilares são elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical e responsáveis pela transmissão das cargas provenientes dos demais elementos estruturais para a fundação. Podem ser submetidos a vários tipos de solicitações, decorrentes de várias combinações de carregamentos, mas os esforços normais de compressão são preponderantes, segundo a norma ABNT NBR 6118 (2007).

Podem atuar em pilares, concomitantemente com os esforços normais, esforços de flexão, cisalhamento e momento torsor. A flexão pode ocorrer pela mudança no prumo do eixo dos pilares ou pela transferência direta de momento fletor causado pelas vigas, no caso de engastamento destas nos pilares. De modo geral, as solicitações em pilares podem ser divididas em três casos:

- Compressão centrada: neste caso, os efeitos do momento fletor não são considerados e somente o esforço normal de compressão é levado em conta para efeito de cálculo;

- Flexocompressão reta: são casos em que, além do esforço normal de compressão, o pilar está submetido a um momento fletor, cuja direção coincide com um dos eixos principais de inércia da seção transversal;
- Flexocompressão oblíqua: ocorre quando os pilares estão submetidos, juntamente com o esforço normal de compressão, a um momento fletor em que sua direção não coincide com nenhum dos eixos principais de inércia da seção.

De modo geral, o dimensionamento convencional de estruturas em concreto armado é um processo iterativo e baseia-se em regras práticas, pelas quais se estabelecem as pré-dimensões das seções transversais e as características dos materiais. Sobre este pré-dimensionamento se realizam ajustes e correções com base na experiência e intuição do projetista, buscando a melhor, mais segura e econômica solução, como ilustra a Figura 4. Esse processo inclui etapas em que o projetista deve tomar decisões subjetivas. O mesmo problema pode ser solucionado de diversas maneiras em razão do grande número de variáveis e possibilidades de combinações entre essas. Em muitos casos, esse processo se torna exaustivo e pode levar a uma escolha equivocada da melhor solução estrutural, não sendo a mais econômica ou adequada para dada situação.

No caso específico de pilares retangulares submetidos à flexocompressão reta ou oblíqua, o processo de dimensionamento pode ser feito de forma manual com auxílio de ábacos adimensionais, como os encontrados em Montoya, Meseguer e Cabré (1987), nos quais, a partir de uma seção transversal, com dimensões e disposição da armadura definidas, calcula-se uma taxa de armadura, ou também como apresentado por Araújo (2003), em que o emprego de tabelas específicas auxilia no dimensionamento de seções.

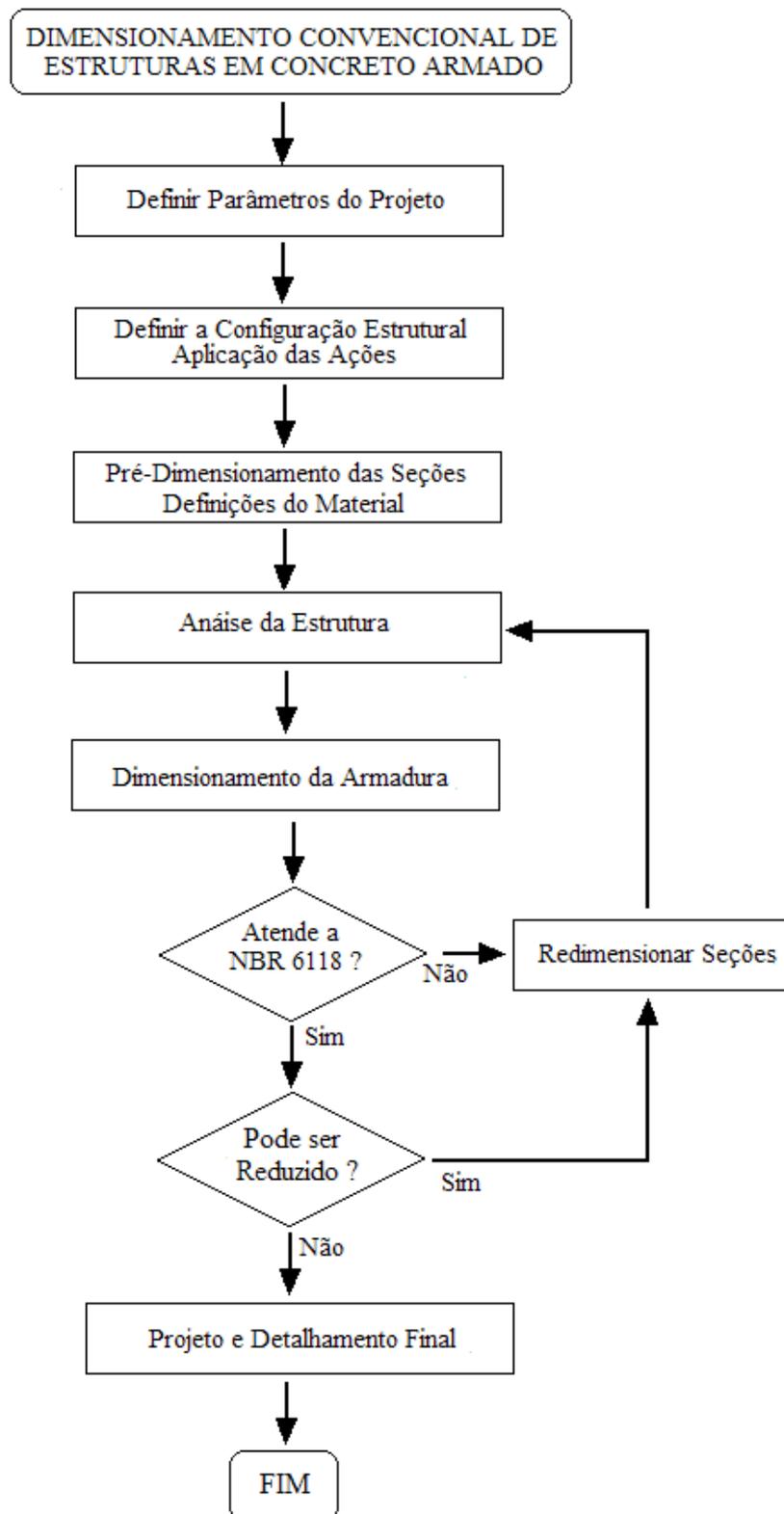


FIGURA 4 – Fluxograma de dimensionamento convencional

4.3 Convenções

A convenção de sinais utilizada neste estudo está representada na Figura 5:

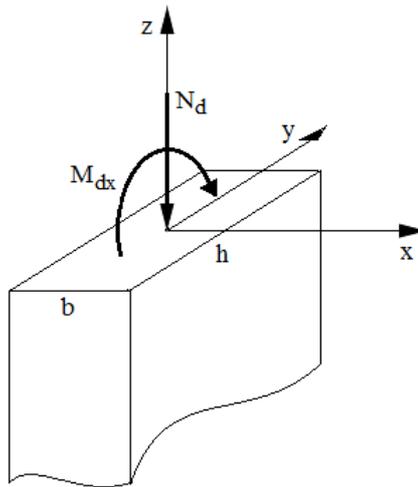


FIGURA 5 – Convenção dos esforços

onde:

N_d é o esforço normal de cálculo;

M_{dx} é o momento fletor de cálculo em torno do eixo x ;

b é a largura da seção transversal, medida na direção x ;

h é a altura da seção transversal, medida na direção y .

Admite-se, neste estudo, como positivo o momento fletor que traciona as fibras inferiores da seção transversal e a força normal que a comprime, sendo válida essa convenção de sinais tanto para os esforços solicitantes quanto para os resistentes.

4.4 Hipóteses básicas de cálculo

As hipóteses básicas admitidas para verificação da capacidade resistente ou dimensionamento de uma seção transversal de concreto armado submetida à flexocompressão são descritas na sequência.

4.4.1 Manutenção das seções planas

Admite-se que uma seção transversal se mantém plana após as deformações do elemento. Isso resulta numa distribuição linear das deformações normais ao longo da altura da seção transversal e proporcional à sua distância da linha neutra.

4.4.2 Aderência perfeita

Considera-se uma aderência perfeita entre a armadura e o concreto, admitindo-se uma igualdade entre as deformações na armadura e no concreto que a envolve. Assim, a deformação em um ponto será calculada independentemente de este corresponder ao aço ou ao concreto.

4.4.3 Resistência à tração do concreto

Despreza-se totalmente a resistência à tração do concreto, de modo que todo o esforço de tração será resistido pelo aço.

4.4.4 Plastificação dos materiais

No estado limite último, o concreto e ou o aço são considerados plastificados e as tensões nesses materiais são obtidas com base nos diagramas tensão-deformação, definidos conforme a norma ABNT NBR 6118 (2007).

O diagrama tensão-deformação do concreto, obtido experimentalmente por meio de ensaio de compressão simples, apresenta uma distribuição de tensões não linear a partir de seu carregamento, como ilustra a Figura 6. A resistência característica f_{ck} é o valor mínimo estatístico acima do qual ficam situados 95% dos resultados experimentais. A resistência de cálculo f_{cd} é resistência característica minorada por meio de coeficientes de segurança γ_c , tendo por finalidade cobrir incertezas estatísticas, e é definido como:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (9)$$

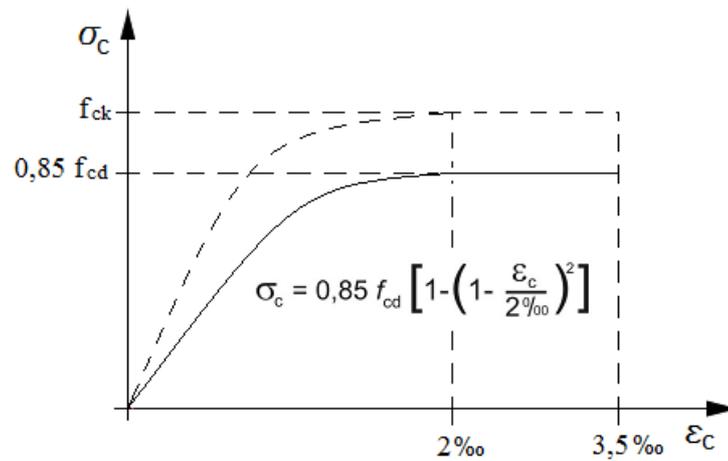


FIGURA 6 – Diagrama tensão-deformação idealizado para concreto
(Adaptado: ABNT NBR 6118, 2007)

O diagrama tensão-deformação é descrito pelas seguintes relações:

$$\sigma_c = 0 \quad \text{se, } \varepsilon_c \leq 0 \quad (10)$$

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \quad \text{se, } 0 \leq \varepsilon_c \leq 2,0 \text{ ‰} \quad (11)$$

$$\sigma_c = \sigma_{cd} \quad \text{se, } 0,2\% \leq \varepsilon_c \leq 3,5 \text{ ‰} \quad (12)$$

onde:

ε_c é a deformação de compressão;

σ_c é a respectiva tensão no concreto.

Para o cálculo dos estados limites de serviço e último para aços com ou sem patamar de escoamento, pode-se utilizar o diagrama tensão-deformação simplificado, mostrado na Figura 7.

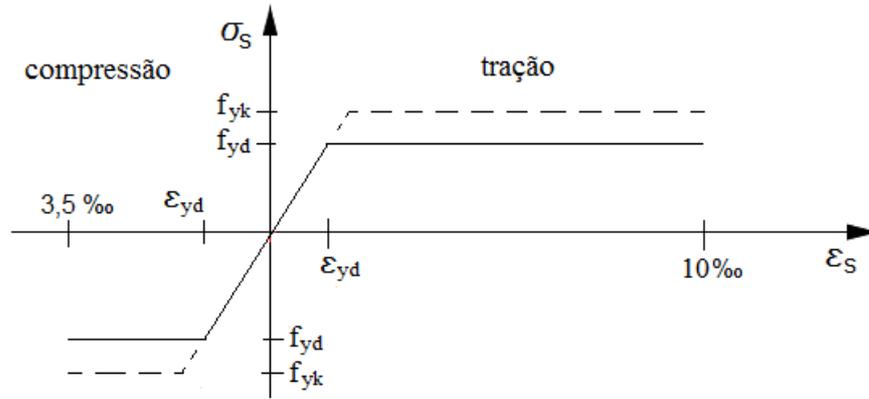


FIGURA 7 – Diagrama tensão-deformação simplificado para aços
(Adaptado: ABNT NBR 6118, 2007)

As relações tensão-deformação para os aços são as seguintes:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad \text{se, } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad (13)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{se, } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad (14)$$

onde σ_s e ε_s são, respectivamente, a tensão e a deformação no aço.

O sinal positivo de ε_s indica deformação devido aos esforços de compressão e negativo quando a deformação for devida a esforços de tração.

A deformação de escoamento de cálculo, ε_{yd} , é dada por f_{yd}/E_s , sendo E_s o módulo de elasticidade longitudinal do aço, admitido igual a 210 GPa, e f_{yd} é definido como:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (15)$$

A norma ABNT NBR 6118 (2007), no item 12.4.1, determina que, nos casos gerais de combinações normais, os valores dos coeficientes de ponderação das resistências dos materiais, concreto e aço, γ_c e γ_s devem assumir os valores de 1,4 e de 1,15, respectivamente. Para casos combinações especiais ou de construção, os valores assumem 1,2 e 1,15 e, em casos excepcionais, 1,2 e 1,0.

4.4.5 Estado limite último

Para algumas estruturas são fixadas exigências específicas de segurança, como, por exemplo, sua exposição ao fogo, explosões, impactos, abalos sísmicos, desempenho térmico ou acústico, entre outros.

Quando algum dos requisitos de segurança, desempenho ou durabilidade não é atendido, considera-se como atingido um estado limite. Em razão dos requisitos estabelecidos, são definidos os seguintes estados limites:

- Estado Limite de Utilização (ou de serviço): a utilização da estrutura torna-se prejudicada por apresentar deformações ou vibrações excessivas ou desconfortáveis ou até mesmo fissuração, que compromete a durabilidade da estrutura.
- Estado Limite Último (ou de ruína): está relacionado ao colapso ou a outra forma de ruína local ou global de uma estrutura. Em estruturas de concreto armado, o estado limite último pode ser atingido por esmagamento do concreto ou por deformação plástica excessiva das armaduras de uma seção transversal. De acordo com a norma ABNT NBR 6118 (2007), o esmagamento do concreto ocorre quando, em seções parcialmente comprimidas, a deformação da borda comprimida atinge o valor de 3,5‰. Em seções totalmente comprimidas, a deformação da fibra localizada a $3h/7$ da borda mais comprimida atinge o valor de 2‰, sendo h a altura da seção transversal da peça. Este encurtamento é considerado positivo.

As armaduras atingem o estado limite último quando o valor da deformação máxima de tração atingir 10‰, sendo esse valor considerado negativo.

Para conhecer o valor das tensões nas diversas camadas da armadura é necessário conhecer a respectiva deformação em cada camada. Na Figura 8 estão representadas as possíveis configurações deformadas de uma seção transversal para o estado limite último e classificadas em seis domínios, que caracterizam diferentes tipos de ruptura.

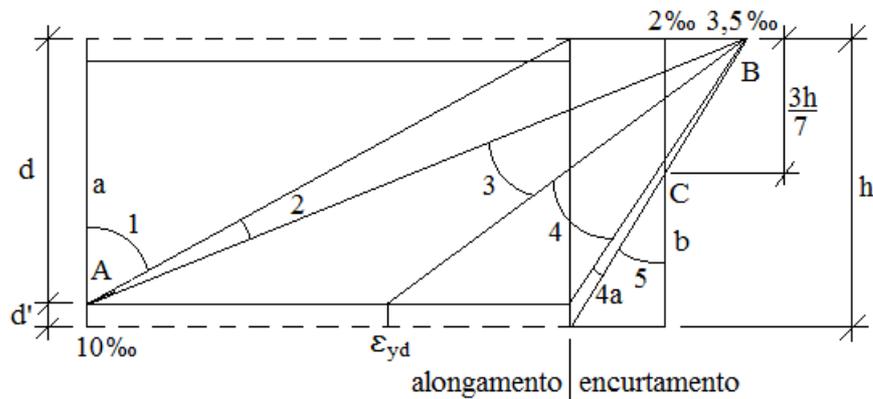


FIGURA 8 – Domínios de deformações (Fonte: ABNT NBR 6118, 2007)

Ruptura por deformação plástica excessiva:

Reta a – caso de tração uniforme;

- Domínio 1 – casos de tração não uniforme (flexotração) sem tensões de compressão. A seção resistente é composta pelas armaduras de aço, com deformação máxima ($\epsilon_{sd} < 10\text{‰}$) e não havendo participação resistente do concreto, que se encontra totalmente fissurado.

- Domínio 2 – estão incluídos os casos de flexão simples ou composta. O concreto da zona comprimida não atinge a ruptura ($\epsilon_{cd} < 3,5\text{‰}$) e as armaduras atingem o alongamento máximo permitido ($\epsilon_{sd} = 10\text{‰}$).

Neste domínio a profundidade da linha neutra (x_0) fica limitada ao intervalo:

$$0 \leq x_0 \leq \frac{3,5}{13,5} d \quad (16)$$

e a deformação em uma barra genérica da armadura (ε_{si}) é dada por:

$$\varepsilon_{si} = 10 \left(\frac{x_0 - d_i}{d - x_0} \right) / 100 \quad (17)$$

Ruptura por encurtamento limite do concreto:

- Domínio 3 – o estado limite último compreende casos de flexão simples ou composta, caracterizado pela ruptura à compressão do concreto ($\varepsilon_c = 3,5\%$) e pelo escoamento do aço ($\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$). Esta é a situação ideal de projeto, pois ambos os materiais estão sendo utilizados simultaneamente em sua capacidade máxima.

- Domínio 4 – este estado limite último é caracterizado por flexão simples ou composta com a ruptura à compressão do concreto ($\varepsilon_c = 3,5\%$) e o aço tracionado sem atingir o limite de escoamento ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$). A ruptura do elemento estrutural ocorre de forma frágil, sem avisos.

- Domínio 4a – ocorre em caso de flexão composta e é caracterizado pela deformação máxima do concreto ($\varepsilon_c = 3,5\%$), onde ambas as armaduras estão comprimidas.

- Nos domínios 3, 4 e 4a, a deformação na borda superior da seção é de 3,5‰ e, no caso de alguma camada estar tracionada, o valor da deformação será negativo.

A profundidade da linha neutra (x_0) nesses domínios fica limitada ao intervalo:

$$\frac{3,5}{13,5}d \leq x_0 \leq h \quad (18)$$

e a deformação em uma barra genérica (ε_{si}):

$$\varepsilon_{si} = 3,5 \left(\frac{x_0 - d_i}{x_0} \right) \text{‰} \quad (19)$$

- Domínio 5 – neste estão incluídos os casos de compressão não uniforme, sem tensões de tração. A seção transversal está inteiramente comprimida. Admite-se que a deformação última do concreto seja igual a 2,0‰ na compressão uniforme e 3,5‰ na flexocompressão. Neste domínio a deformação na fibra situada a $3h/7$ da borda superior é igual a 2,0‰.

A profundidade da linha neutra no domínio 5 localiza-se no intervalo:

$$h \leq x_0 < \infty \quad (20)$$

e a deformação em uma barra genérica:

$$\varepsilon_{si} = 14 \left(\frac{x_0 - d_i}{7x_0 - 3h} \right) \text{‰} \quad (21)$$

Os diagramas de deformação dos dois casos limites citados cruzam-se no ponto C, afastado $3h/7$ da borda, e ε_c está compreendido entre os limites 2,0‰ e 3,5‰.

Esses domínios podem ser agrupados e considerados como regiões, correspondentes aos três tipos de ruptura, conforme mostra a Figura 9.

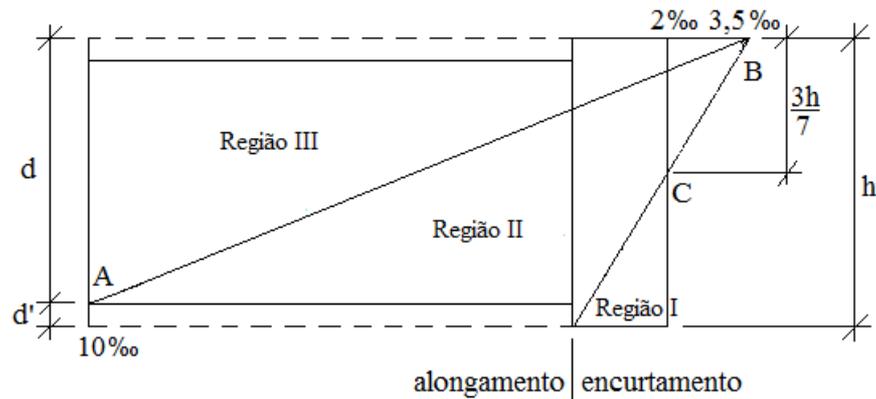


FIGURA 9 – Regiões de deformações

Região I – correspondente ao limite de encurtamento do concreto no ponto C.

Região II – correspondente ao limite de encurtamento do concreto no ponto B.

Região III – correspondente ao limite de alongamento da armadura no ponto A.

Dessa forma, conhecida a profundidade da linha neutra x_0 , pode-se localizar o domínio e calcular a deformação em cada camada da armadura. Com o diagrama tensão-deformação do aço é possível encontrar as respectivas tensões σ_{sdi} em cada barra.

4.5 Resultante de compressão no concreto

De acordo com a norma ABNT NBR 6118 (2007), a tensão máxima de compressão a ser considerada no concreto, σ_{cd} , quando a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir até a borda mais comprimida, é igual a:

$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} \quad (22)$$

Em casos em que há diminuição da largura da seção σ_{cd} , é dado por:

$$\sigma_{cd} = 0,80 \cdot f_{cd} \quad (23)$$

Isso se deve ao fato que em estruturas de concreto uma parcela significativa das cargas é aplicada e mantida constante durante praticamente toda a vida da estrutura. O concreto sob cargas de longa duração sofre redução de sua resistência, fenômeno conhecido como Efeito Rusch.

A norma ABNT NBR 6118 (2007), para análise no estado limite último, permite substituir o diagrama parábola retângulo por um diagrama retangular simplificado de tensões, de altura $0,8 \cdot x_0$, sendo x_0 a profundidade da linha neutra, como visto na Figura 10. Com base nisso, o valor da resultante de compressão no concreto é dado por:

$$R_{cc} = 0,8x_0 \cdot b \cdot \sigma_{cd} \quad (24)$$

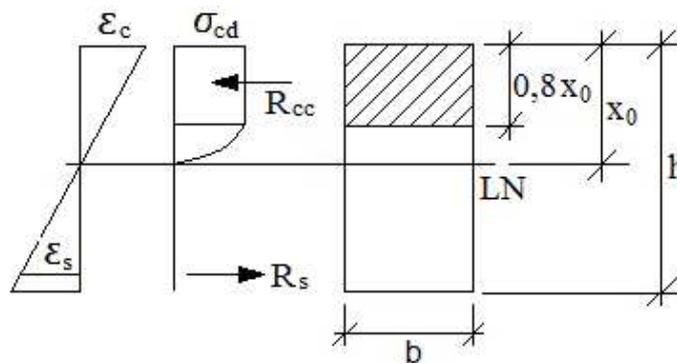


FIGURA 10 – Tensões de compressão no concreto

4.6 Processo iterativo de verificação da capacidade resistente

O processo iterativo usado para o cálculo do momento interno resistente é baseado nos textos de Araújo (2003), que apresenta um procedimento para análise de seções retangulares submetidas à flexocompressão reta com armadura distribuída simetricamente.

A análise inicia a partir do conhecimento do esforço normal atuante de cálculo (N_{sd}), do momento fletor de cálculo (M_{sd}) e de uma seção transversal com arranjos e diâmetros das barras conhecidos.

Os esforços atuantes de cálculo N_{sd} e M_{sd} são obtidos pela multiplicação dos esforços característicos pelos respectivos coeficientes parciais de segurança, fornecidos pela norma ABNT NBR 8681 (2004) para as diferentes ações e combinações envolvidas no projeto.

Os esforços resistentes N_{rd} e M_{rd} obedecem à mesma convenção de sinais adotada para os solicitantes e, de acordo com a descrição da configuração deformada, são obtidos pelas seguintes equações de equilíbrio:

$$N_{rd} = \int_{A_c} \sigma_{cd} \cdot dA_c + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \quad (25)$$

$$M_{rd} = \int_{A_c} \sigma_{cd} \cdot y_c \cdot dA_c + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \cdot y_{si} \quad (26)$$

onde:

N_{rd} é o esforço normal resistente de cálculo;

M_{rd} é o momento resistente de cálculo;

σ_{cd} é a tensão na área de concreto comprimida A_c ;

σ_{sdi} é a tensão na área de aço A_{si} ;

y_c é a distância do centro da área de concreto comprimida, em relação ao centro de gravidade da seção;

y_{si} é a distância da barra de aço i , em relação ao centro de gravidade da seção.

Na flexocompressão reta, a profundidade x_0 da linha neutra, em relação a uma borda comprimida da seção transversal, é uma incógnita do problema, situada no intervalo $[0, \infty]$, e sua orientação é paralela ao eixo de aplicação do momento fletor.

O esforço normal resistente de cálculo N_{rd} deve ser, no mínimo, igual ao esforço normal solicitante N_{sd} , aplicado a uma seção transversal com armaduras conhecidas. O valor de N_{sd} é fixo, enquanto N_{rd} varia em função da profundidade x_0 da linha neutra, que é a única incógnita presente na equação 27:

$$f(x_0) = N_{sd} - A_{cc} \cdot \sigma_{cd} - \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \quad (27)$$

Esta função é do tipo $f(x_0)=0$, onde a solução se situa no intervalo $[0,\infty]$, abrangendo todos os domínios da flexocompressão, e é resolvida de forma iterativa com o emprego de um algoritmo.

Neste trabalho, a solução da posição da linha neutra deu-se com o emprego do Método da Seção Áurea (*Golden Section*), um método de busca unidimensional detalhado por Vanderplaats (1984), o qual se caracteriza por necessitar somente do cálculo dos valores da função em determinados pontos, de modo que o intervalo de valores é reduzido até a convergência para um valor único, conforme uma tolerância estabelecida.

A verificação da capacidade resistente pode ser feita seguindo o fluxograma ilustrado na Figura 11.

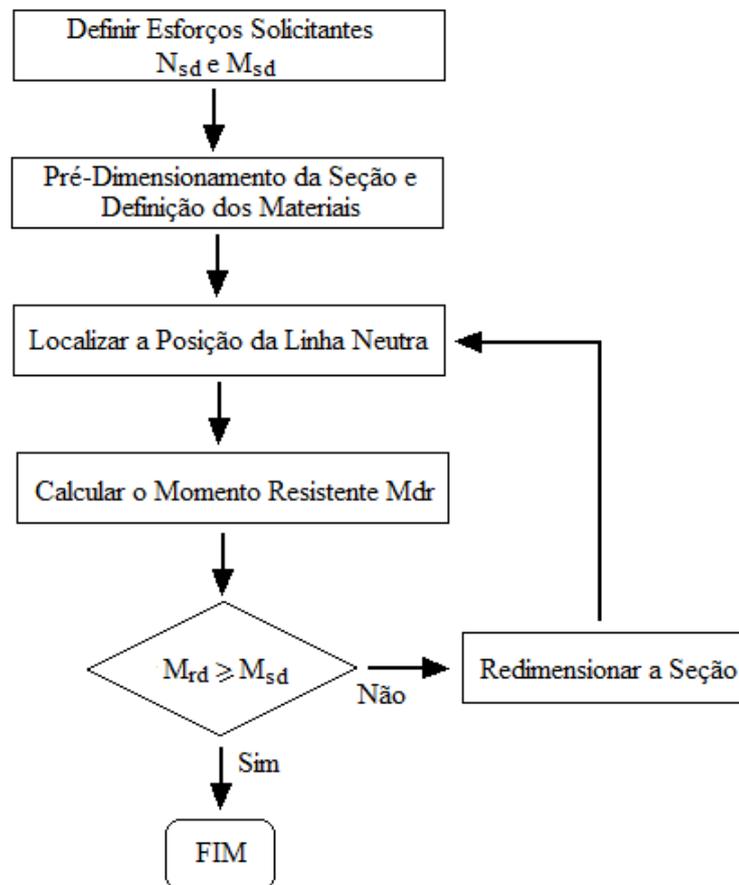


FIGURA 11 – Fluxograma de verificação da capacidade resistente de pilar submetido à flexocompressão reta

Conhecida a profundidade x_0 da linha neutra, as equações (25) e (26) tomam a seguinte forma:

$$N_{rd} = A_{cc} \cdot \sigma_{cd} + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \quad (28)$$

$$M_{rd} = S_c \cdot \sigma_{cd} + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \cdot y_{si} \quad (29)$$

onde:

A_{cc} representa a área de concreto comprimida;

S_c representa o momento estático da parte de concreto comprimida da seção.

4.7 Restrições dimensionais e taxas de armaduras

Um bom projeto não fica limitado às dimensões e solicitações ótimas de seus elementos estruturais. Nesse sentido, algumas restrições são impostas com o objetivo de possibilitar sua execução.

Segundo a norma ABNT NBR 6118 (2007), a área mínima de uma seção transversal, de um pilar em concreto armado, não pode ser inferior a 360 cm² e suas dimensões devem atender ao item 13.2.3, que em casos especiais admite dimensões menores que 19 cm e maiores que 12 cm. Nesses casos, os esforços solicitantes de cálculo devem ser majorados por um coeficiente adicional γ_n . Por critérios de projeto, a altura h que representa a maior dimensão da seção transversal fica limitada a cinco vezes a largura b , evitando a configuração de pilar-parede. Então:

$$b_{min} \leq b \leq b_{máx} \quad (30)$$

$$h_{min} \leq h \leq h_{máx} \quad (31)$$

Em seções retangulares deve existir, pelo menos, uma barra em cada canto, e o espaçamento livre entre as faces das barras deve assumir um valor igual ou superior aos seguintes:

- 2 cm;
- o maior diâmetro das barras;
- 1,2 vez o diâmetro máximo do agregado,

Do mesmo modo, o espaçamento máximo entre eixos das barras longitudinais deve ser menor ou igual a:

- duas vezes b ;
- 40 cm

Logo:

$$e_{min} \leq e \leq e_{máx} \quad (32)$$

sendo e que representa o espaçamento entre as barras longitudinais. Essas exigências estão representadas na Figura 12.

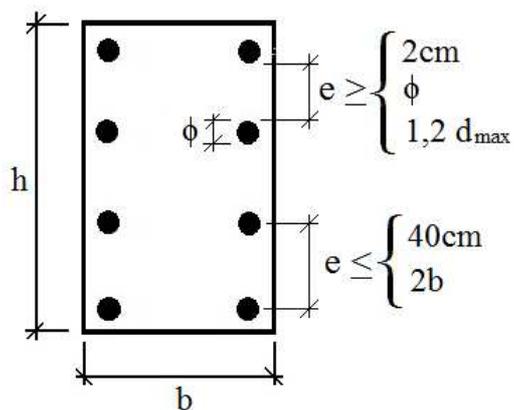


FIGURA 12 – Espaçamento das barras longitudinais

Os diâmetros das barras longitudinais ficam limitados a valores ofertados no mercado e não devem ser inferiores a 10 mm nem superiores a 1/8 da menor dimensão da seção transversal, respeitando os limites mínimos e máximos para a taxa de armadura longitudinal da seção, a qual deve ser maior que:

$$A_{s,\min} = 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \geq 0,004A_c \quad (33)$$

Essa taxa deve ser inferior a 8% da área de concreto A_c , inclusive na região de emenda por transpasse, como ilustra a Figura 13. Portanto:

$$A_{s,\max} = 0,04A_c \quad (34)$$

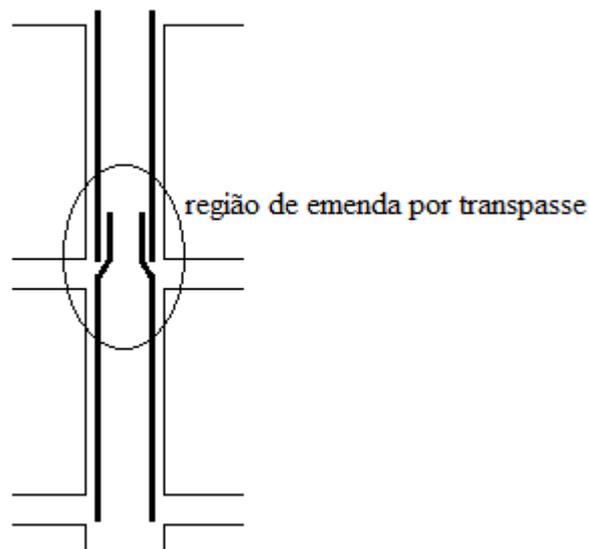


FIGURA 13 – Limites da taxa de armadura longitudinal

Logo:

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \quad (35)$$

sendo $\rho = \frac{A_s}{A_c}$, que representa a taxa geométrica de armadura no concreto.

5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

5.1 Introdução

A otimização de uma seção em concreto armado submetida à flexocompressão reta consiste em um problema multidimensional. Isso se deve a vários fatores relacionados à topologia da seção, restrições normativas, entre outros.

Neste capítulo será apresentada a formulação do problema de otimização de uma seção retangular submetida à flexocompressão reta, com o objetivo de obter uma seção de menor custo e capaz de atender aos critérios de funcionalidade e segurança. Essa formulação leva em consideração a capacidade resistente à flexocompressão no estado limite último, não sendo analisada a seção aos esforços de cisalhamento, tampouco o efeito da armadura transversal.

5.2 Formulação do problema de otimização

Considerando uma seção transversal retangular qualquer, o objetivo do dimensionamento ótimo é obter uma configuração desta que seja capaz de produzir esforços resistentes (N_{rd} e M_{rd}), iguais ou superiores aos esforços solicitantes (N_{sd} e M_{sd}), com o mínimo custo.

Conhecidos os esforços solicitantes, as características mecânicas dos materiais e seus custos de uma seção, várias superfícies de interação M–N, como a apresentada na Figura 14, podem ser geradas pelo algoritmo de otimização e devem atender aos limites especificados pela norma ABNT NBR 6118 (2007). Uma seção é considerada segura se o ponto S (N_{sd}, M_{sd}) estiver dentro ou sobre a curva de interação.

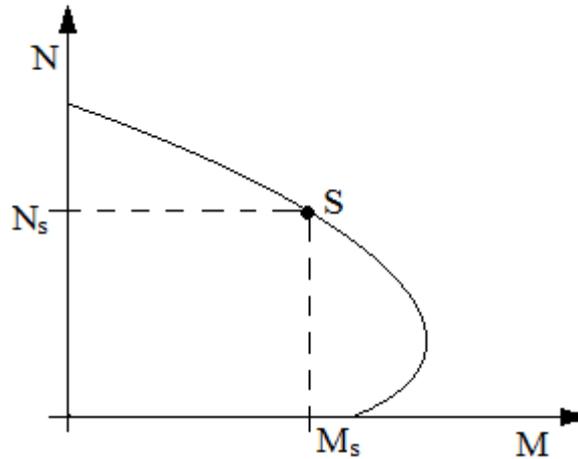


FIGURA 14 – Superfície de interação M-N

Neste trabalho o esforço normal resistente (N_{rd}) assume o mesmo valor do esforço normal solicitante de cálculo (N_{sd}), fazendo com que o ponto S esteja sobre ou muito próximo da curva de interação da seção considerada ótima e que forneça um momento resistente de cálculo (M_{rd}), que atua concomitantemente ao respectivo esforço normal.

A formulação do problema de otimização parte da consideração de alguns parâmetros de entrada, definidos previamente e que representam, basicamente, os esforços atuantes no elemento e as características e custos dos materiais. Esses parâmetros de projeto são informados e assumem valores fixos, ou seja, não se alteram durante o processo de otimização e são representados por:

N_{sd} – esforço axial solicitante de cálculo;

M_{sd} – momento fletor solicitante de cálculo em relação ao eixo x;

c – cobrimento da armadura;

f_{yk} – tensão característica de escoamento do aço;

E_s – módulo de elasticidade do aço;

f_{ck} – resistência característica do concreto;

C_c – custo referente ao volume de concreto;

C_s – custo referente à massa de aço;

C_f – custo referente à área de forma.

5.2.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto (x_i) são os valores que se alteram durante o processo de otimização. Basicamente, assumem valores que representam as dimensões da seção transversal e as áreas de aço. Assim, a configuração simétrica da seção pode ser vista na Figura 15 e apresenta as seguintes variáveis:

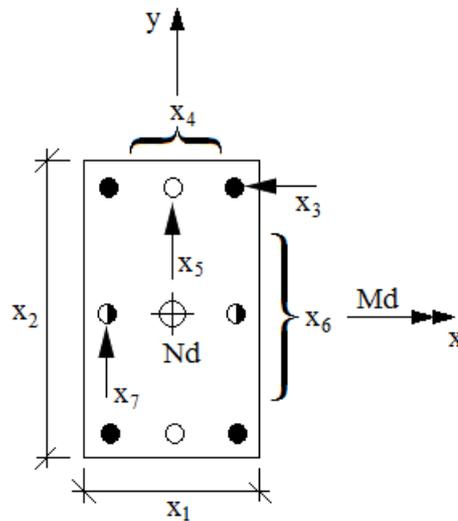


FIGURA 15 – Variáveis de projeto

- x_1 – representa a largura da seção transversal (b);
- x_2 – representa a altura da seção transversal (h);
- x_3 – representa o diâmetro das quatro barras dos cantos;
- x_4 – representa o número de barras nas duas camadas paralelas a x_1 ;
- x_5 – representa o diâmetro nas duas camadas paralelas a x_1 ;
- x_6 – representa o número de camadas com duas barras paralelas a x_2 ;
- x_7 – representa o diâmetro das barras nas camadas paralelas a x_2 .

No presente trabalho todas as variáveis foram consideradas como discretas, com os valores das dimensões da seção transversal variando a cada centímetro e os diâmetros das armaduras limitados a valores comerciais.

5.2.2 Função objetivo

A função objetivo ou custo é a função com as variáveis, em que se busca encontrar um ponto que representa o mínimo custo e, ao mesmo tempo, permita que a seção gerada resista aos esforços atuantes.

Dessa forma, a função custo a ser minimizada no processo de otimização considera o custo total dos materiais (concreto, aço) e da forma, podendo ser expressa da seguinte forma:

$$F = (A_{con}).C_c + (A_{sTotal}).C_s + 2.(b+h).C_f \quad (36)$$

A primeira parcela da função representa o custo do concreto, em que C_c é o custo por unidade de volume; a segunda representa o custo da armadura longitudinal, sendo C_s o respectivo custo por unidade de massa, e considerando-se como peso específico do aço 7850 kg/m³; a última parcela representa o custo relativo à forma, onde C_f é o custo por unidade de área. Todos os custos fornecem um valor relativo para cada unidade de comprimento do elemento otimizado.

Dessa forma, pode-se definir a formulação final a ser empregada no processo como:

$$\text{minimizar } F(x) = (x_1 \cdot x_2) \cdot C_c + (4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 \cdot x_7) \cdot C_s + 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot C_f \quad (37)$$

5.2.3 Restrições do problema

No processo de minimizar da função custo, deve-se também respeitar o conjunto de restrições impostas ao problema. Basicamente, as restrições são relativas aos critérios de resistência e restrições construtivas, como citado anteriormente.

Uma das principais restrições impostas ao problema de otimização diz respeito ao critério de resistência, em que os esforços solicitantes e a capacidade resistente da seção são relacionados entre si, tendo o mesmo sinal e garantida a segurança por meio da satisfação dos seguintes critérios:

$$N_{rd} \geq N_{sd} \quad (38)$$

$$M_{rd} \geq M_{sd} \quad (39)$$

Todas as variáveis de projeto devem atender aos preceitos da norma ABNT NBR 6118 (2007) com referência às limitações de dimensões, espaçamentos, taxas geométricas de armaduras. Logo:

x_1 e x_2 – são variáveis discretas, representadas pelos intervalos:

$$x_1 \in [19, 20, \dots, 200]$$

$$x_2 \in [19, 20, \dots, 1000]$$

sendo os valores superiores suficientemente grandes, de modo a não interferir na solução ótima. Pelo mesmo motivo, as variáveis x_4 e x_6 (número de barras nas duas camadas paralelas a x_1 e número de camadas com duas barras paralelas a x_2 , respectivamente) podem assumir valores inteiros entre 0 e 10.

x_3 , x_5 e x_7 – são as variáveis que representam as barras longitudinais, restritas aos seguintes diâmetros (em mm):

$$x_3, x_5 \text{ e } x_7 \in [10.0, 12.5, 16.0, 20.0, 22.0, 25.0, 32.0, 40.0]$$

Portanto, as restrições do problema podem ser reescritas na forma normalizada, visando a um melhor tratamento computacional, da seguinte forma:

$$g_1 = 1 - N_{rd} / N_{sd} \leq 0 \quad (40)$$

$$g_2 = 1 - M_{rd} / M_{sd} \leq 0 \quad (41)$$

$$g_3 = 1 - b / b_{\min} = 1 - x_1 / 19 \leq 0 \quad (42)$$

$$g_4 = 1 - b_{\max} / b = 1 - 200 / x_1 \leq 0 \quad (43)$$

$$g_5 = 1 - h / h_{\min} = 1 - x_2 / 19 \leq 0 \quad (44)$$

$$g_6 = 1 - h_{\max} / h = 1 - 1000 / x_2 \leq 0 \quad (45)$$

$$g_7 = 1 - 5b / h = 1 - 5x_1 / x_2 \leq 0 \quad (46)$$

$$g_8 = 1 - e / e_{\min} \leq 0 \quad (47)$$

$$g_9 = 1 - e_{\max} / e \leq 0 \quad (48)$$

$$g_{10} = 1 - \rho / \rho_{\min} \leq 0 \quad (49)$$

$$g_{11} = 1 - \rho_{\max} / \rho \leq 0 \quad (50)$$

Para o tratamento das restrições é empregada a técnica das funções de penalização, na qual os problemas com restrição são transformados em problemas irrestritos, acrescentando-se à função $f(x)$ uma função de penalidade $P(x)$, a qual considera um fator de penalização r que

multiplica o conjunto das restrições não atendidas $g(x)$, de forma simples, permitindo que o estudo possa ser realizado levando em conta um grande número de variáveis e restrições. Isso proporciona que o projeto ótimo gerado seja passível, ou muito próximo, de execução prática. Dessa forma, a função penalizada $F(x)$ pode ser escrita como:

$$F(x) = f(x) + P(x) \quad (51)$$

sendo:

$$P(x) = \sum r|g(x)| \quad (52)$$

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 Introdução

A formulação proposta, descrita no capítulo anterior, foi implementada a partir de um programa base desenvolvido anteriormente por Kripka (2003), para a otimização com o emprego do método *Simulated Annealing*. A esse programa foi associada uma rotina para a verificação da capacidade resistente de pilares submetidos à flexocompressão reta, utilizando-se a linguagem de programação Fortran.

Para demonstrar a validade da implementação empregada neste estudo, este capítulo apresenta comparativos com resultados de dimensionamento de seções transversais submetidas à flexocompressão reta obtidos de maneira convencional e por outros métodos de otimização apresentados na literatura. Também é apresentada uma análise da influência da variação dos valores dos materiais no projeto ótimo, além do comportamento do algoritmo diante da variação dos esforços para diferentes classes de resistência do concreto.

De forma geral, nas simulações efetuadas, partiu-se de mais de uma solução inicial, obtendo-se a convergência para uma única solução otimizada. Em relação ao método de otimização foram adotados os seguintes parâmetros, obtidos com base em experimentos e indicação prévia da literatura:

- temperatura inicial (T) = 1000
- redutor de temperatura (α) = 0,98
- fator de penalização (r) = 1000
- critério de parada = $T_k/T \leq 0,0001$

Os valores unitários da armadura e forma para a composição do custo foram extraídos do Guia da Construção (2010), onde estão inclusos os materiais, mão de obra, equipamentos e leis sociais praticados no Rio Grande do Sul no mês de setembro de 2010. Para o concreto, os valores seguem os praticados na região, referentes ao mesmo mês.

6.2 Comparativo entre projeto convencional e projeto otimizado

6.2.1 Exemplo I

Dois exemplos de dimensionamento convencional foram extraídos de Araújo (2003), onde para um mesmo par de esforços são apresentadas duas configurações de disposição da armadura longitudinal, a partir de dimensões da seção transversal predefinidas.

O primeiro modelo de dimensionamento corresponde a uma seção transversal retangular com dimensões de 20 x 40 cm e composta de duas camadas de armadura, cuja área de aço necessária encontrada a partir do uso de tabelas foi de 15,7 cm². A composição final da seção se dá a partir de diâmetros comerciais, resultando em quatro barras de aço de 16 mm de diâmetro em cada camada, como mostra a Figura 16.a, gerando uma área de aço final de 16,08 cm² na seção.

Em outro modelo, visto na Figura 16.b, a mesma seção transversal de 20 x 40 cm e submetida aos mesmos esforços é dimensionada empregando-se o mesmo método do primeiro, somente alterando de dois para quatro o número de camadas. O resultado encontrado são duas barras de aço de 20 mm de diâmetro em cada uma das camadas, ficando a seção transversal composta com uma área de aço total de 25,13 cm².

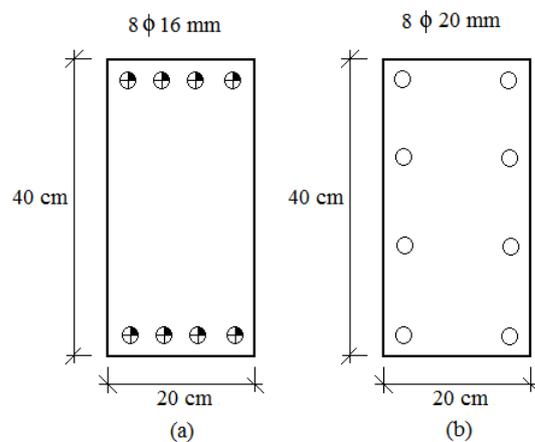


FIGURA 16 – Detalhamento das seções por dimensionamento convencional

Neste estudo, duas seções foram geradas de forma otimizada a fim de verificar a eficiência do procedimento proposto, ambas capazes de resistir aos mesmos esforços, empregando os mesmos materiais e seguindo as restrições impostas pela norma ABNT NBR 6118 (2007). Na Tabela 1 são apresentados os custos unitários dos materiais e o par de esforços utilizado neste exemplo.

TABELA 1 – Custos unitários e esforços do exemplo I

C_c (R\$/m ³)	C_s (R\$/kg)	C_f (R\$/m ²)	Esforços Solicitantes	
			N_{sd} (kN)	M_{sd} (kN.cm)
20 MPa	500 MPa	-		
245,00	6,56	42,36	574	14350

Numa delas, com dimensões da seção transversal fixas de 20 x 40 cm, a armadura longitudinal foi otimizada pelo método *Simulated Annealing* (S.A.), levando à configuração mostrada na Figura 17.a. Neste caso, a área de aço ótima obtida se iguala ao valor mínimo encontrado por Araújo (2003) com o emprego de tabelas. Porém, como neste estudo a armadura longitudinal pode ser composta por até três diâmetros distintos (x_3 , x_5 e x_7), essa combinação possibilitou uma redução de 0,38 cm² na área de aço final da seção transversal.

A outra seção foi gerada de forma livre, na qual as dimensões da seção transversal e a armadura longitudinal passaram pelo processo de otimização, gerando a configuração mostrada na Figura 17.b. Nesta seção ótima a economia gerada chega a 20,50%, quando comparada com a seção mais econômica dimensionada pelo método convencional.

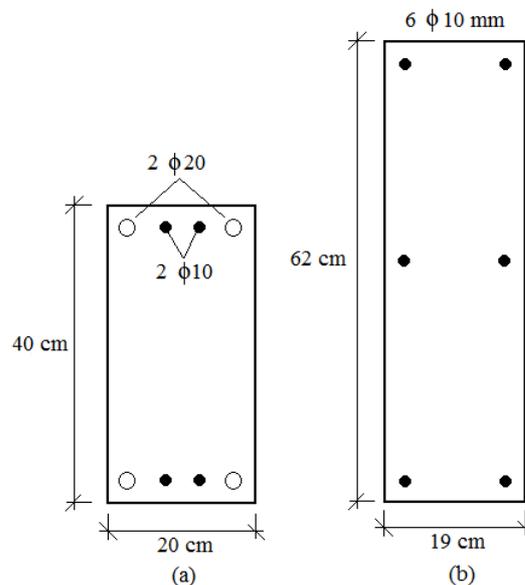


FIGURA 17 – Detalhamento das seções ótimas

Observando os resultados comparativos apresentados na Tabela 2, o segundo modelo dimensionado pelo método convencional apresenta um custo 30,38% superior em comparação com a seção do primeiro modelo gerada pelo mesmo método. Quando as seções ótimas são comparadas a do primeiro modelo, a economia é de 1,19% no custo total, chegando a 20,50% quando a seção ótima é gerada de forma livre.

TABELA 2 – Comparativo de custos para o exemplo I

	Modelo (16.a)		Modelo (16.b)		S.A. 20x40 (17.a)		S.A. Ótima (17.b)	
	Seção	(R\$/m)	Seção	(R\$/m)	Seção	(R\$/m)	Seção	R\$/m)
Concreto (cm ²)	800	19,60	800	19,60	800	19,60	1178	28,86
Aço (cm ²)	16,08	82,71	25,13	129,23	15,71	80,89	4,71	24,27
Forma (cm)	120	50,83	120	50,83	120	50,83	162	68,62
Custo Total (R\$/m)	153,14		199,66		151,32		121,75	
Diferença	0,00%		30,38%		-1,19%		-20,50%	

6.3 Comparativo entre projetos ótimos

6.3.1 Exemplo II

Este exemplo de flexocompressão reta foi estudado por Argolo (2000), cuja análise foi baseada na norma ABNT NBR 6118 (1980). O autor comparou os custos a partir de uma seção transversal de 30 x 70 cm, inicialmente dimensionada com o auxílio de ábacos de iteração para três diferentes pares de esforços N_{sd} e M_{sd} , todos sobre a mesma envoltória, resultando em uma mesma área de aço para as três situações. Logo, essas mesmas seções foram submetidas à otimização da armadura longitudinal, com dimensões da seção transversal fixas, empregando o método dos Algoritmos Genéticos (A.G.), como ilustra a Figura 18.a. Na sequência do estudo e empregando o mesmo método de otimização, uma nova seção foi gerada de forma livre, a qual é apresentada na Figura 18.b.

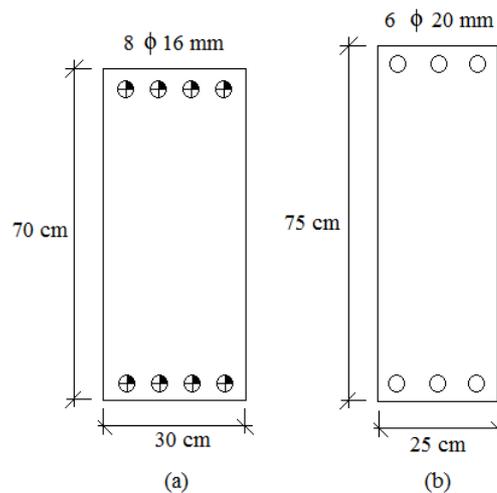


FIGURA 18 – Detalhamento das seções pelo método dos Algoritmos Genéticos

A composição do custo unitário dos materiais e forma utilizados neste exemplo é relativa ao mês de março de 2000, com os mesmos valores utilizados por Argolo (2000), como mostra a Tabela 3. Da mesma maneira, o par de esforços utilizados neste exemplo representa o segundo modelo estudado pelo autor e será comparado por conter uma distribuição simétrica da armadura longitudinal na seção, semelhante ao adotado neste estudo.

TABELA 3 – Custos unitários e esforços do exemplo II

C_c (R\$/m ³)	C_s (R\$/kg)	C_f (R\$/m ²)	Esforços Solicitantes	
			N_{sd} (kN)	M_{sd} (kN.cm)
25 Mpa	500 Mpa	-		
125,00	1,27	16,49	2142,86	37500

A partir deste par de esforços, duas seções são geradas empregando o método *Simulated Annealing*, seguindo as restrições impostas pela norma ABNT NBR 6118 (2007): uma com dimensões fixas de 30 x 70 cm e em que somente a armadura longitudinal é otimizada; outra na qual tanto a armadura quanto as dimensões são otimizadas pelo algoritmo, como apresentado na Figura 19.a e 19.b, respectivamente.

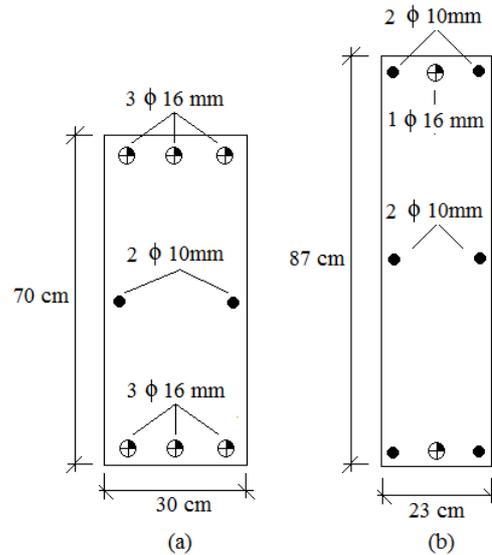


FIGURA 19 – Detalhamento das seções pelo método *Simulated Annealing*

Observando os resultados apresentados na Tabela 4, nota-se que a seção de dimensões fixas de 30 x 70 cm cuja armadura passou pelo processo de otimização pelo método *Simulated Annealing* apresenta um custo 3,35% inferior quando comparada à mesma seção otimizada pelo método dos Algoritmos Genéticos estudado por Argolo (2000). Quando a seção ótima, gerada de forma livre pelo processo de otimização deste estudo é comparada ao método utilizado pelo autor em referência, a economia chega a 6,85%.

TABELA 4 – Comparativo de custos para o exemplo II

	A.G. 30x70 (18.a)		S.A. 30x70 (19.a)		A.G. (18.b)		S.A. (19.b)	
	Seção	R\$/m	Seção	(R\$/m)	Seção	(R\$/m)	Seção	(R\$/m)
Concreto (cm ²)	2100	26,25	2100	26,25	1875	23,44	2001	25,01
Aço (cm ²)	16,08	16,02	13,63	13,50	18,85	18,66	8,73	8,65
Forma (cm)	200	32,98	200	32,98	200	32,98	220	36,28
Custo Total (R\$/m)	75,25		72,73		75,08		69,94	
Diferença	0,00%		-3,35%		0,00%		-6,85%	

Quando as seções ótimas geradas pelo método *Simulated Annealing* são comparadas ao dimensionamento realizado por Argolo (2000) com o uso de ábaco de iteração, a redução no custo total é de 29,10%, para a seção com armadura otimizada e dimensões fixas de 30 x 70 cm, e de 31,82%, para seção ótima gerada de forma livre. Esses resultados podem ser observados na Tabela 5.

TABELA 5 – Comparativo de custos para o exemplo II com o uso de ábaco

	Ábaco 30x70		S.A. 30x70 (19.a)		S.A. (19.b)	
	Seção	(R\$/m)	Seção	R\$/m)	Seção	(R\$/m)
Concreto (cm ²)	2100	26,25	2100	26,25	2001	25,01
Aço (cm ²)	43,48	43,35	13,63	13,50	8,73	8,65
Forma (cm)	200	32,98	200	32,98	220	36,28
Custo Total (R\$/m)	102,58		72,73		69,94	
Diferença	0%		-29,10%		-31,82%	

Cabe salientar que neste exemplo a análise da seção realizada por Argolo (2000), tanto pelo método prático quanto pelo ótimo, não leva em conta algumas disposições construtivas exigidas pela norma ABNT NBR 6118 (2007) para pilares de concreto armado, como o espaçamento máximo entre as barras. Dessa forma, as soluções apresentadas não seriam factíveis na ótica da formulação empregada no presente trabalho.

6.3.2 Exemplo III

Neste exemplo, Zielinski, Long e Troitsky (1995) estudaram um caso de flexocompressão reta com o objetivo de determinar a área da seção transversal de concreto e a área de aço necessária para resistir aos esforços aplicados. A análise da seção foi feita de acordo com a norma canadense CSA CAN3-A23.3-M84.

Os custos dos materiais empregados no exemplo, juntamente com os esforços, são apresentados na Tabela 6.

TABELA 6 – Custos e esforços do exemplo III

C _c (\$/m ³)	C _s (\$/kg)	C _f (\$/m ²)	Esforços Solicitantes	
			N _{sd} (kN)	M _{sd} (kN.cm)
25 MPa	400 MPa	-		
110,00	2,10	27,00	2460	44300

O dimensionamento ótimo, baseado em programação matemática (P.M.) e utilizando o Método de Powell, sugerido pelos autores, corresponde a uma seção retangular de dimensões de 39,57 x 68,36 cm e uma área de aço da armadura longitudinal da seção de 27,46 cm².

Esta mesma seção foi simplificada para valores práticos de execução, assumindo dimensões de 40 x 70 cm, com duas camadas, cada uma com três barras de aço de 25 mm de diâmetro, resultando em área de aço total na seção transversal de 30,00 cm², como visto na Figura 20.a. Conseqüentemente, houve um aumento da capacidade resistente, mas afetou-se o custo total da seção, o qual teve um incremento de 4,08% em razão do consumo de material.

Argolo (2000) comparou esses resultados a partir da implementação do método de Algoritmos Genéticos, com a análise da seção seguindo a mesma norma canadense. A seção otimizada por este método assumiu valores de 25 x 95 cm para a seção transversal, reforçada por três barras de 22 mm de diâmetro em cada uma das duas camadas, resultando em uma área de aço de 22,81 cm² na seção, como mostra a Figura 20.b. Isso significa uma redução de 3,56% no custo final desta seção, quando comparado ao resultado ótimo de Zielinski, Long e Troitsky (1995) e de 7,34% em relação ao resultado prático sugerido pelos autores.

A seção ótima gerada por este estudo (Figura 20.c), segundo os critérios da norma ABNT NBR 6118 (2007) e utilizando o método *Simulated Annealing* para otimização da seção, apresenta uma redução de 20,67%, quando comparada à seção ótima de Zielinski, Long e Troitsky (1995), de 23,78% em relação ao resultado prático sugerido pelos autores, e em comparação à seção otimizada por Argolo (2000) a redução no custo final chega a 17,75%. Esses resultados são apresentados na Tabela 7.

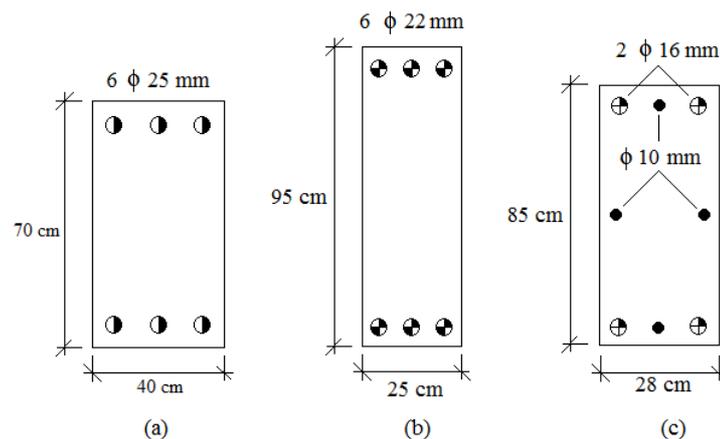


FIGURA 20 – Detalhamento das seções do exemplo III

TABELA 7 – Comparativo de custos para o exemplo III

	CSA CAN3-A23.3-M84						NBR 6118 (2003)	
	P.M.		Prática (20.a)		A.G. (20.b)		S.A. (20.c)	
	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)
Concreto (cm ²)	2705	29,76	2800	30,80	2375	26,13	2380	26,18
Aço (cm ²)	27,46	44,98	29,45	48,24	22,81	37,36	11,18	18,32
Forma (cm)	215,86	58,28	220	59,40	240	64,80	226	61,02
Custo Total (\$/m)	133,02		138,44		128,28		105,52	
Diferença	0,00%		4,08%		-3,56%		-20,67%	

6.3.3 Exemplo IV

Um problema idêntico ao anterior e apresentado pelos mesmos autores também é comparado, porém com alteração dos esforços e da resistência característica do concreto, mantendo-se os demais parâmetros inalterados, como mostra a Tabela 8.

TABELA 8 – Custos e esforços para do exemplo IV

C _c (\$/m ³)	C _s (\$/kg)	C _f (\$/m ²)	Esforços Solicitantes	
			N _{sd} (kN)	M _{sd} (kN.cm)
30 MPa	400 MPa	-		
110,00	2,10	27,00	1780	36200

Da mesma maneira que o exemplo anterior, o dimensionamento de Zielinski, Long e Troitsky (1995) corresponde a uma seção retangular com dimensões de 31,96 x 59,36 cm e uma área de aço total de 25,80 cm² na seção. Esta seção foi simplificada para valores práticos de execução, assumindo dimensões de 35 x 60 cm, com duas camadas, cada uma com três barras de 25 mm de diâmetro, mostrada na Figura 21.a, resultando em uma área de aço total na seção de 30,00 cm² e elevando o custo em 9,07%.

A seção otimizada por Argolo (2000) nesse exemplo assumiu valores de 30 x 65 cm para a seção transversal, reforçada por cinco barras de 16 mm de diâmetro em cada uma das duas camadas, resultando em uma área de aço de 20,11 cm² na seção, como mostra a Figura 21.b, levando a uma redução de 6,01% no custo final desta seção, quando comparado ao

resultado ótimo global. Essa redução chega a 13,83% quando comparado ao resultado prático sugerido pelos autores.

Na seção ótima gerada por este estudo e apresentada na Figura 21.c, a redução no custo da seção é de 24,12%, quando comparada à seção ótima, e chega a 30,43%, quando comparada ao resultado prático sugerido pelos autores. Quando essa seção é comparada à seção otimizada por Argolo (2000), a redução é de 19,27%. Esses resultados são sintetizados na Tabela 9.

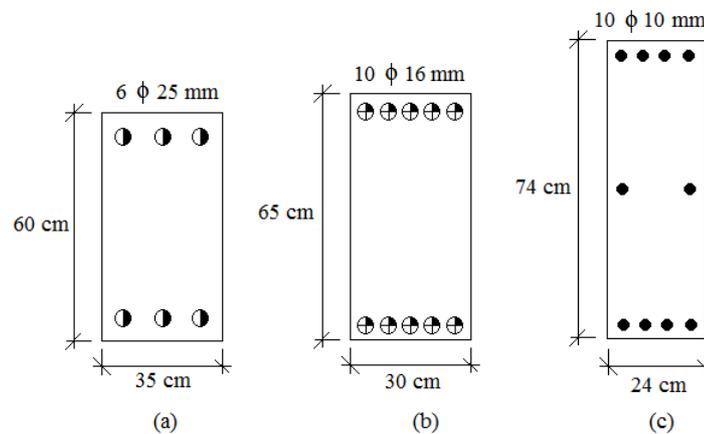


FIGURA 21 – Detalhamento das seções do exemplo IV

TABELA 9 – Comparativo de custos para o exemplo IV

	CSA CAN3-A23.3-M84						NBR 6118 (2007)	
	P.M.		Prática (21.a)		A.G. (21.b)		S.A. (21.c)	
	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)	Seção	(\$/m)
Concreto (cm ²)	1897,15	20,87	2100	23,10	1950	21,45	1776	19,54
Aço (cm ²)	25,80	42,26	29,45	48,24	20,11	32,93	7,85	12,86
Forma (cm)	182,64	49,31	190	51,30	190	51,30	196	52,92
Custo Total (\$/m)	112,44		122,64		105,68		85,32	
Diferença	0,00%		9,07%		-6,01%		-24,12%	

6.4 Influência da variação da classe de resistência do concreto e dos esforços solicitantes

Nesta seção é avaliada a influência da variação da classe de resistência do concreto e dos esforços em projetos otimizados.

Os valores unitários dos insumos que compõem a seção foram extraídos da mesma fonte citada no exemplo I. Na Tabela 10 são apresentados os valores unitários e o par de esforços utilizados neste exemplo.

TABELA 10 – Valores unitários e esforços

C _c (R\$/m ³)	C _s (R\$/kg) 500 Mpa	C _f (R\$/m ²)	Esforços Solicitantes	
			N _{sd} (kN)	M _{sd} (kN.cm)
C20	245,00	42,36	2480	32489
C25	260,00			
C30	275,00			
C35	290,00			
C40	305,00			

6.4.1 Exemplo V

Para comparar a influência da resistência do concreto em pilares submetidos à flexocompressão, uma seção ótima para cada classe de resistência do concreto foi gerada pelo algoritmo de otimização. As diferentes configurações geradas são apresentadas na Figura 22, e fica evidente a busca pelo algoritmo de otimização em reduzir o consumo do concreto à medida que a sua resistência e respectivo custo aumentam.

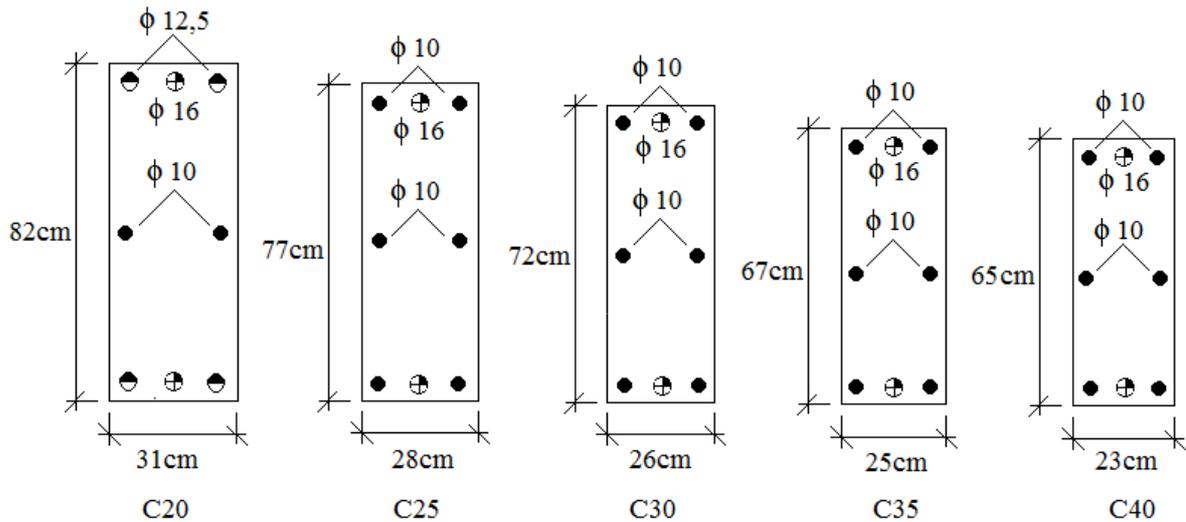


FIGURA 22 – Seções ótimas para diferentes classes de resistência

Os resultados alcançados nessa simulação são expostos na Tabela 11, na qual é possível visualizar que na seção que utiliza concreto de classe C40 a economia chega a 22% no custo final, quando comparada à seção gerada com concreto de classe C20, ambas submetidas aos mesmos esforços.

Seções que utilizam concreto de classes de resistência C20 e C25 apresentam valores da taxa de armadura muito próximos do mínimo estipulado pela norma ABNT NBR 6118 (2007), elevando-se à medida que a respectiva classe de resistência aumenta.

TABELA 11 – Resultados para diferentes classes de resistência

	C20		C25		C30		C35		C40	
	Seção	(R\$/m)	Seção	R\$/m)	Seção	R\$/m)	Seção	(R\$/m)	Seção	R\$/m)
Concreto (cm ²)	2542	62,28	2156	56,06	1872	51,48	1675	48,58	1495	45,60
Aço (cm ²)	10,50	54,07	8,73	44,97	8,73	44,97	8,73	44,97	8,73	44,98
Forma (cm)	226	95,73	210	88,96	196	83,03	184	77,94	176	74,55
ρ	0,0041		0,0041		0,0047		0,0052		0,0058	
Custo Total (R\$/m)	212,09		189,99		179,48		171,49		165,13	
Diferença	0%		-10%		-15%		-19%		-22%	

No gráfico da Figura 23 são apresentadas, de forma porcentual, as parcelas de cada material na composição do custo da seção otimizada. Para todas as classes de resistência, a forma aparece como o maior contribuinte, representando, em média, 45,6% na formação do custo final, seguido pelo concreto, com 28,7%, e pelo aço, que representa 25,6%.



FIGURA 23 – Composição do custo final

Convém esclarecer que esses dados não levam em conta a possibilidade de reaproveitamento dos materiais que compõem a forma.

6.4.2 Exemplo VI

Neste exemplo, um dos esforços apresentados na Tabela 10 mantém seu valor fixo, enquanto o seu par varia. Esse procedimento conduz a que a seção seja analisada sob flexocompressão reta com pequena e com grande excentricidade.

Na primeira análise, o valor do esforço normal solicitante de cálculo é mantido fixo em 2480 kN, ao passo que o momento solicitante varia de 5000 kN.cm a 35000 kN.cm.

Analisando os resultados gerados pelo algoritmo de otimização, sintetizados na Tabela 12, é possível notar um aumento na área da seção transversal de concreto à medida que o valor do momento solicitante de cálculo aumenta, como ilustra a Figura 24. A mesma área também tende a ser maior quando a classe de resistência do concreto empregada diminui.

TABELA 12 – Combinações de esforços para $N_{ds} = 2480$ kN

Classe	M_{ds} (kN.cm)	Concreto (cm ²)	Aço (cm ²)	Forma (cm)	ρ	R\$/m
C20	5000	2236	9,42	190	0,0042	183,80
	10000	2236	9,42	190	0,0042	183,80
	15000	2257	9,42	196	0,0042	186,86
	20000	2340	9,61	202	0,0041	192,40
	25000	2400	9,61	214	0,0040	198,95
	30000	2436	9,82	230	0,0040	207,67
	35000	2624	10,50	228	0,0040	214,94
C25	5000	1824	8,73	172	0,0048	165,26
	10000	1824	8,73	172	0,0048	165,26
	15000	1855	8,73	176	0,0047	167,76
	20000	1952	8,73	186	0,0045	174,52
	25000	1971	8,73	200	0,0044	180,94
	30000	2079	8,73	206	0,0042	187,14
	35000	2125	8,93	220	0,0042	194,45
C30	5000	1530	8,73	158	0,0057	153,98
	10000	1530	8,73	158	0,0057	153,98
	15000	1560	8,73	164	0,0056	157,35
	20000	1612	8,73	176	0,0054	163,86
	25000	1716	8,73	184	0,0051	170,11
	30000	1820	8,73	192	0,0048	176,36
	35000	1944	8,73	198	0,0045	182,31
C35	5000	1302	8,73	146	0,0067	144,58
	10000	1302	8,73	146	0,0067	144,58
	15000	1350	8,73	154	0,0065	149,36
	20000	1416	8,73	166	0,0062	156,36
	25000	1525	8,73	172	0,0057	162,06
	30000	1625	8,73	180	0,0054	168,35
	35000	1580	8,73	198	0,0055	174,35
C40	5000	1140	8,73	136	0,0077	137,35
	10000	1148	8,73	138	0,0076	138,45
	15000	1200	8,73	146	0,0073	143,42
	20000	1300	8,73	154	0,0067	149,86
	25000	1357	8,73	164	0,0064	155,83
	30000	1449	8,73	172	0,0060	162,03
	35000	1425	8,93	188	0,0063	168,07

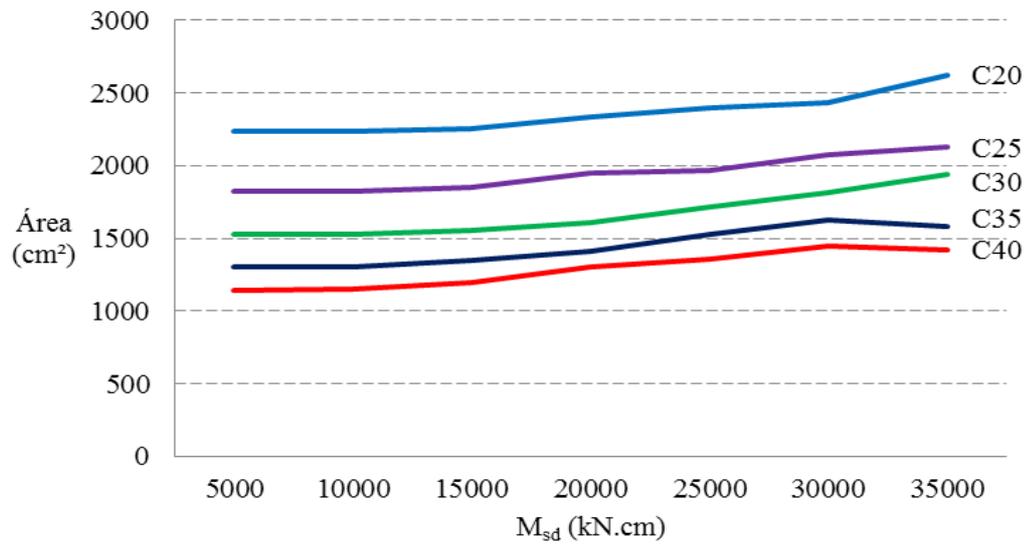


FIGURA 24 – Área de concreto da seção

Essa tendência de aumento na área da seção transversal que utiliza concretos de classes de resistência inferiores e de menor custo, como a C20, em alguns casos, força também a um aumento na área de aço, suficiente apenas para atender à taxa mínima de armadura estipulada pela norma ABNT NBR 6118 (2007), como pode ser observado na Figura 25.

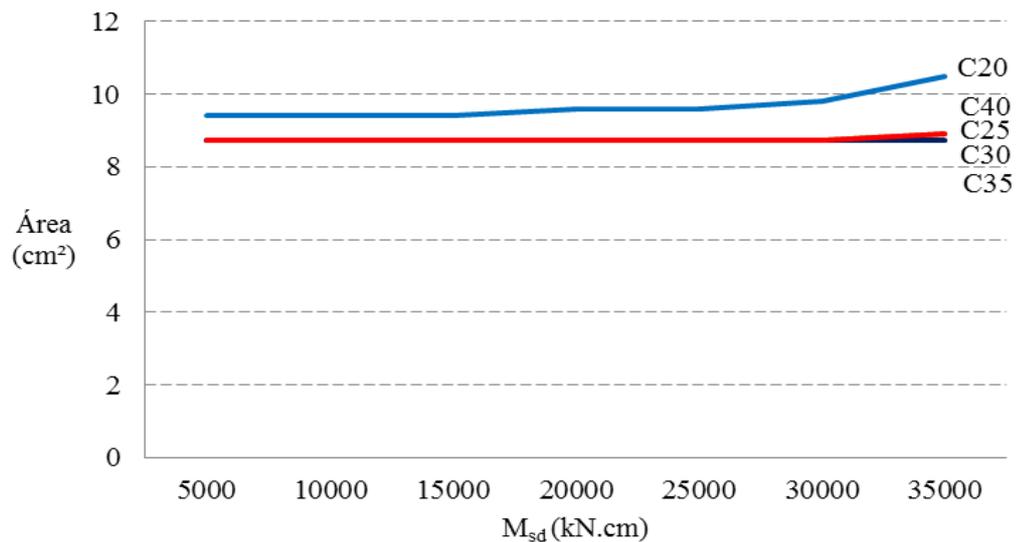


FIGURA 25 – Área de aço na seção

Seções que utilizam concretos de classes de resistência superiores apresentam área da seção transversal reduzida, levando a que a taxa de armadura (ρ) nessas seções apresentem valores maiores, como pode ser observado na Figura 26.

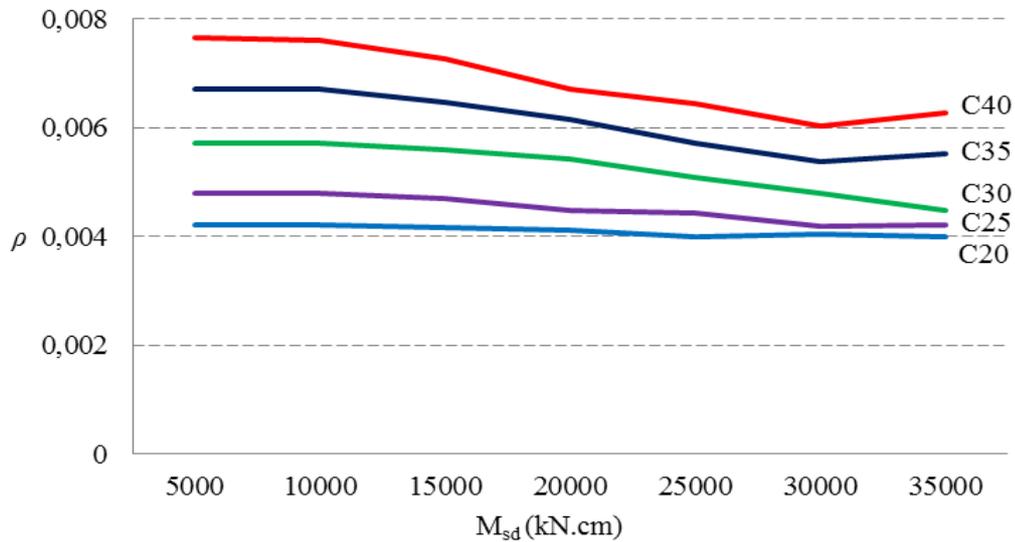


FIGURA 26 – Taxa de armadura da seção

Outra consequência de uma maior área da seção transversal é o aumento no consumo de forma, como mostra a Figura 27, já que seu perímetro se torna maior, contribuindo para que o custo final da seção ótima apresente valores mais elevados, quando comparado a seções que utilizam classes de resistência maiores.

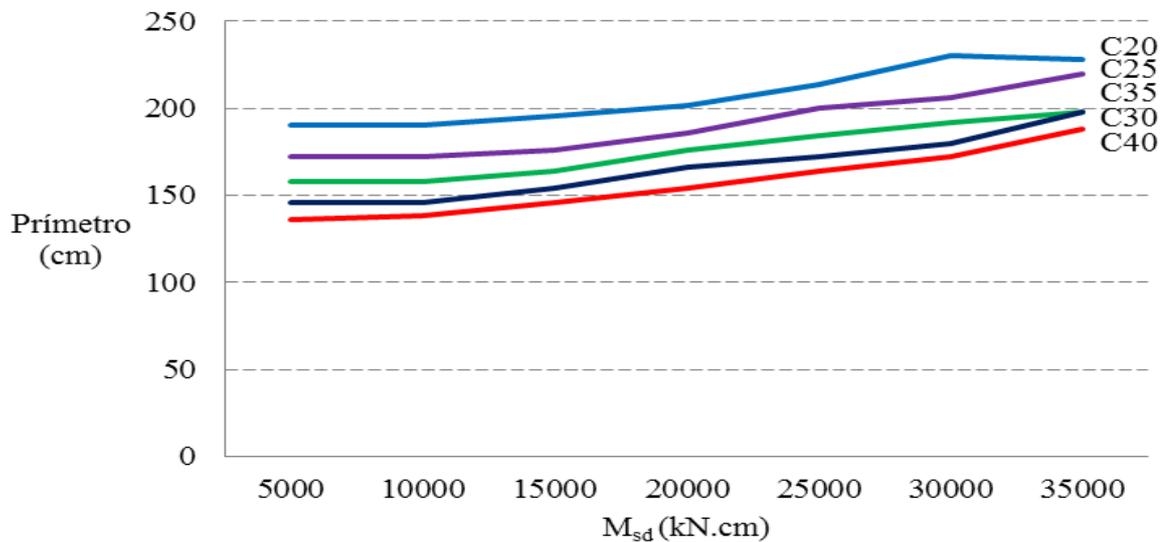


FIGURA 27 – Perímetro de forma da seção

A Figura 28 mostra a diferença entre os custos para os diversos pares de esforços e classes de resistência, evidenciando a eficiência de concretos de classes superiores para o uso em pilares quando submetidos a esforços de flexocompressão reta. Isso se deve não somente à sua capacidade resistente ser maior, mas também ao fato de o algoritmo otimizar seu uso, já que seu custo unitário é superior ao das demais, contribuindo também para um menor consumo de forma que representa uma parcela significativa na composição do custo total.

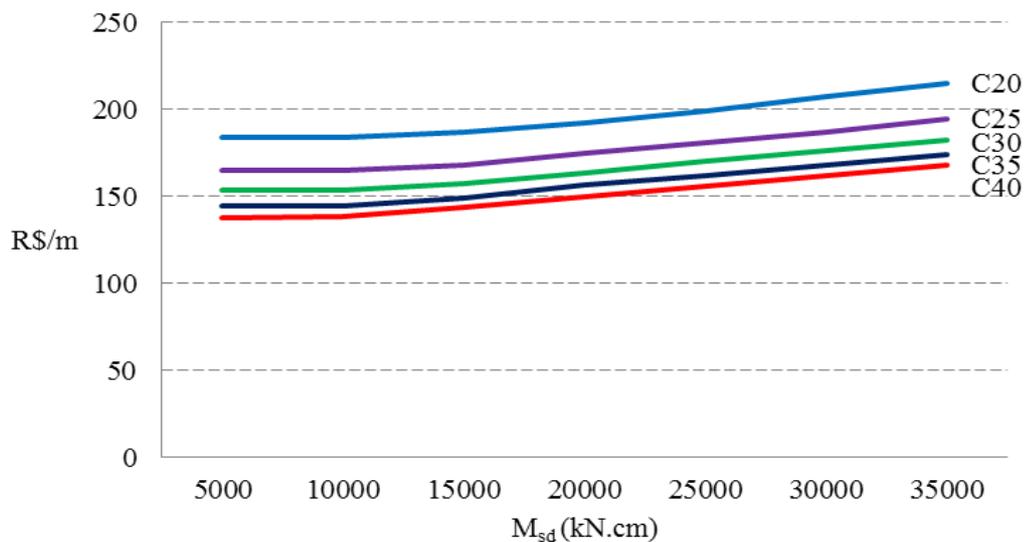


FIGURA 28 – Custo total da seção por metro linear

Numa segunda análise, o valor do momento solitante de cálculo é mantido fixo em 32489 kN.cm, enquanto o esforço normal solitante de cálculo varia de 500 kN a 3500 kN, conforme os valores apresentados na Tabela 13.

Os resultados gerados pelo algoritmo de otimização nesta análise conduzem a um aumento da área da seção transversal de concreto à medida que o valor do esforço normal solitante de cálculo aumenta. Esse comportamento é característico de seções que utilizam concretos de classe C20 e C25, como mostra a Figura 29.

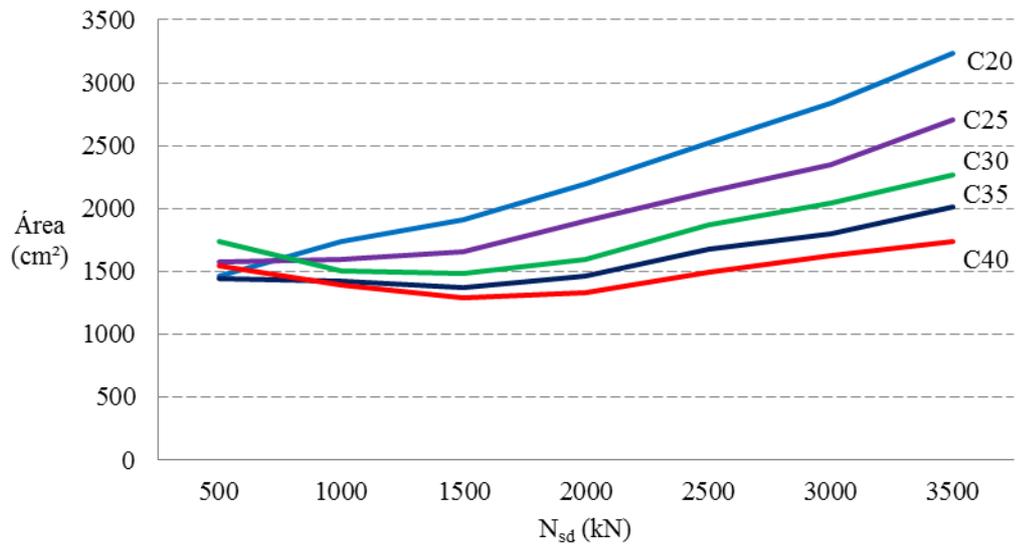


FIGURA 29 – Área de concreto da seção

Para as demais classes de resistência do concreto, a área da seção transversal tende a diminuir, chegando a um valor mínimo quando o par de esforços é formado por um momento solicitante de 32489 kN.cm e por um esforço normal solicitante de 1500 kN, visto que neste ponto também há redução no consumo de aço e forma. O consumo dos materiais volta a crescer à medida que o momento solicitante aumenta.

As Figuras 30 a 33 ilustram os resultados obtidos referentes ao consumo dos demais materiais e a taxa de armadura.

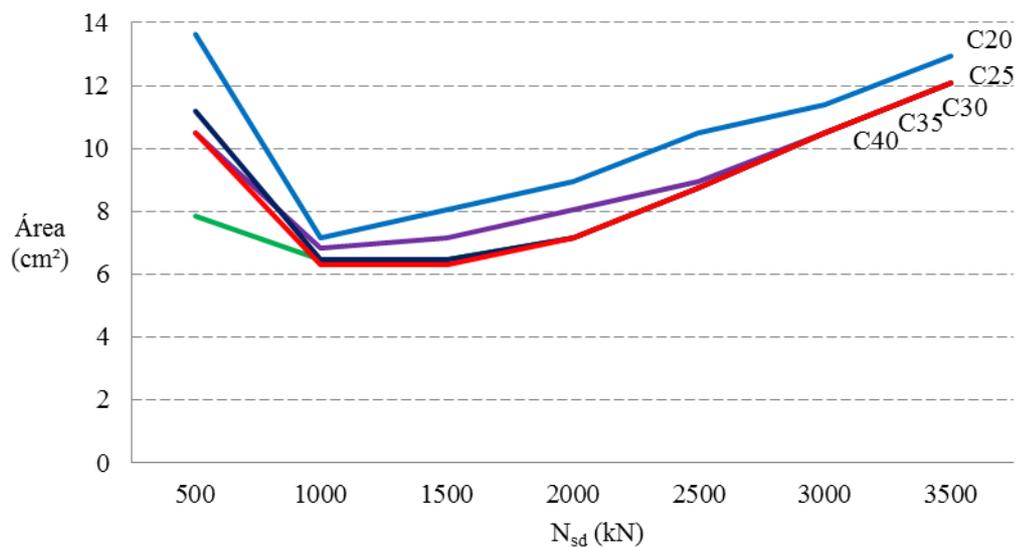


FIGURA 30 – Área de aço na seção

TABELA 13 – Combinações de esforços para $M_{ds} = 32489$ kN.cm

Classe	N_{ds} (kN)	Concreto (cm ²)	Aço (cm ²)	Forma (cm)	ρ	R\$/m
C20	500	1463	13,63	192	0,0093	187,39
	1000	1740	7,17	214	0,0041	170,19
	1500	1914	8,05	218	0,0042	180,69
	2000	2200	8,93	226	0,0041	195,64
	2500	2520	10,50	228	0,0042	212,40
	3000	2838	11,39	238	0,0040	228,99
	3500	3237	12,95	244	0,0040	249,35
C25	500	1577	10,50	204	0,0067	181,49
	1000	1596	6,84	206	0,0043	162,12
	1500	1660	7,17	206	0,0043	167,33
	2000	1896	8,05	206	0,0042	178,01
	2500	2133	8,93	212	0,0042	191,27
	3000	2349	10,50	220	0,0045	208,34
	3500	2701	12,07	220	0,0045	225,56
C30	500	1740	7,85	214	0,0045	178,95
	1000	1501	6,48	196	0,0043	157,67
	1500	1482	6,48	194	0,0044	156,30
	2000	1600	7,17	200	0,0045	165,63
	2500	1872	8,73	196	0,0047	179,48
	3000	2044	10,50	202	0,0051	195,86
	3500	2272	12,07	206	0,0053	211,89
C35	500	1444	11,18	190	0,0077	179,95
	1000	1425	6,48	188	0,0045	154,33
	1500	1368	6,48	182	0,0047	150,13
	2000	1460	7,17	186	0,0049	158,04
	2500	1675	8,73	184	0,0052	171,49
	3000	1794	10,50	190	0,0059	186,58
	3500	2015	12,07	192	0,0060	201,91
C40	500	1540	10,50	194	0,0068	183,22
	1000	1387	6,28	184	0,0045	152,60
	1500	1292	6,28	174	0,0049	145,47
	2000	1330	7,17	178	0,0054	152,87
	2500	1495	8,73	176	0,0058	165,13
	3000	1625	10,50	180	0,0065	179,89
	3500	1742	12,08	186	0,0069	194,10

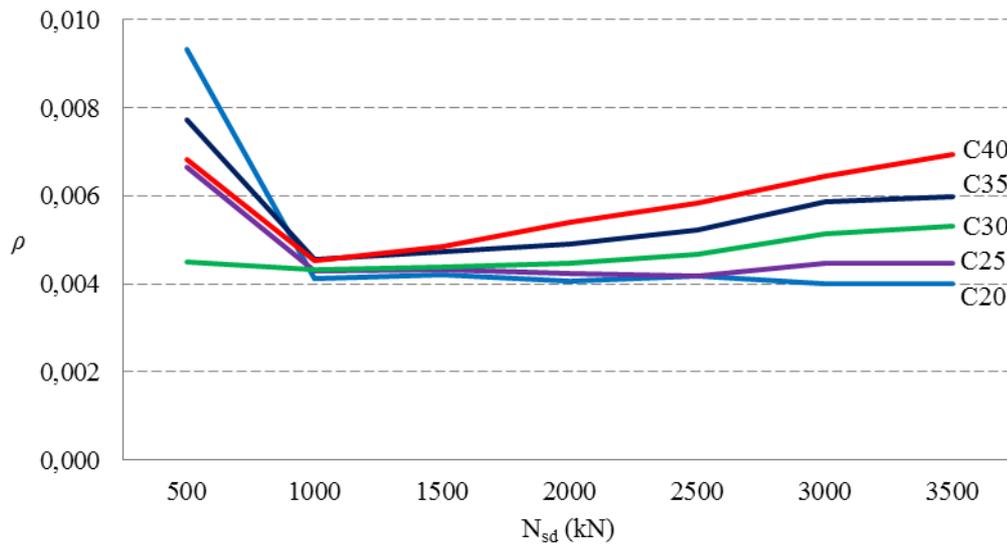


FIGURA 31 – Taxa de armadura da seção

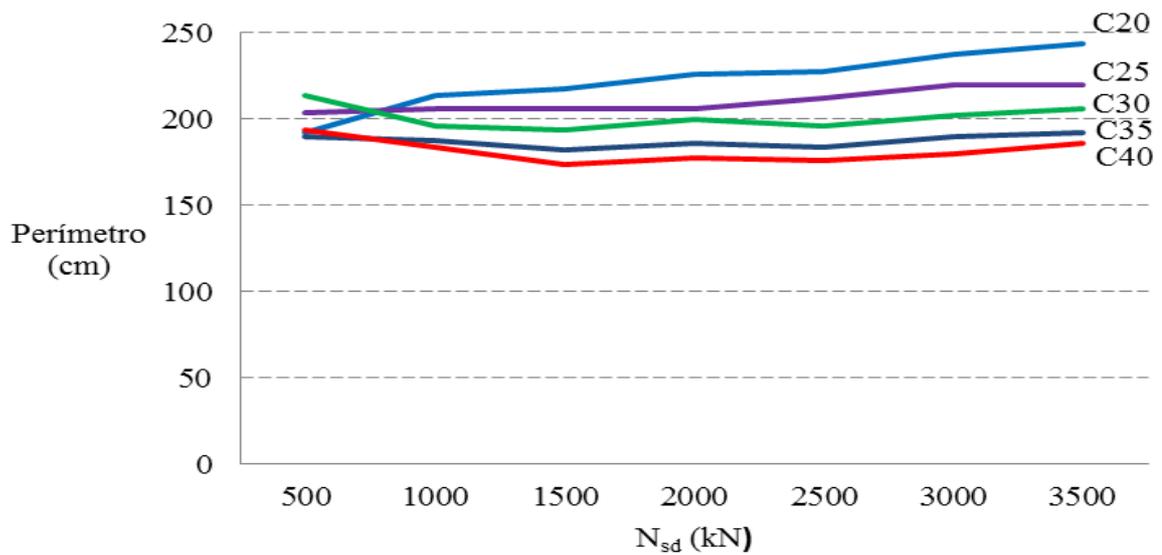


FIGURA 32 – Perímetro de forma da seção

De forma mais clara, na Figura 33 fica evidenciada a existência de uma combinação ótima de esforços que atuam concomitantemente na seção, quando está submetida à flexocompressão normal, e que não somente esforços mínimos conduzem a seções ótimas de menor custo. Esse comportamento pode ser justificado pelo fato de que neste ponto todos os materiais estão sendo utilizados em sua capacidade máxima.

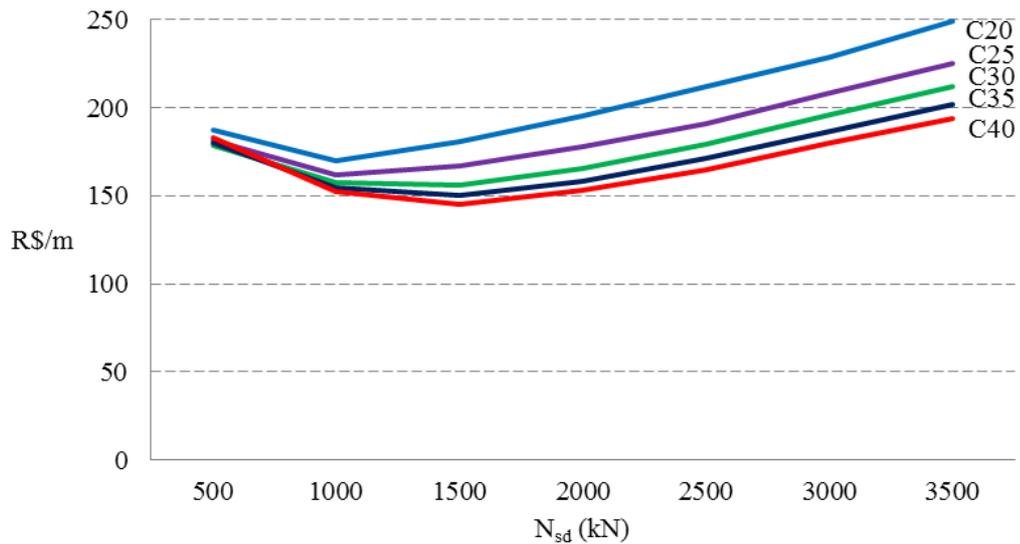


FIGURA 33 – Custo total da seção por metro linear

Entretanto, para se chegar a uma combinação ótima de esforços, ou próximo de uma, diversos fatores influem na análise estrutural, dos quais o principal é a liberdade na concepção da estrutura.

6.5 Análise da variação dos custos unitários dos materiais

Nesta seção é avaliada a influência da variação dos custos unitários dos materiais que compõem o custo final da seção ótima. Como referência, duas seções ótimas são geradas, ambas capazes de resistir ao par de esforços e utilizando os materiais e seus respectivos custos unitários apresentados na Tabela 10. Numa delas o concreto utilizado é de classe de resistência C20 e, na outra, o concreto de classe C40.

Com base nas seções de referência, o custo de cada material é alterado individualmente em 20% e 50% a mais e a menos, gerando quatro novas seções ótimas, com custos finais distintos.

6.5.1 Análise da alteração no custo unitário do concreto

Na Tabela 14 são apresentados os resultados das simulações para seções geradas empregando concreto C20, o qual tem o seu custo unitário alterado. Nota-se que um aumento ou redução de 20% no custo unitário leva a uma diferença respectiva de 5,90% e 5,7% no custo final da seção ótima, ao passo que a alteração de 50% no valor provocou uma alteração 14,7% na formação final do custo da seção ótima.

TABELA 14 – Variação no custo do concreto classe C20

	R\$ 122,50		R\$ 196,00		R\$ 245,00		R\$ 294,00		R\$ 367,50	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	2607	31,94	2607	51,10	2542	62,28	2542	74,74	2369	87,06
Aço (cm ²)	10,50	54,06	10,50	54,05	10,50	54,08	10,50	54,08	9,62	49,55
Forma (cm)	224	94,89	224	94,89	226	95,73	226	95,73	252	106,75
ρ	0,0040		0,0040		0,0041		0,0041		0,0041	
Custo Total (R\$/m)	180,89		200,04		212,09		224,55		243,36	
Diferença	-14,7%		-5,7%		0,0%		5,9%		14,7%	

Quando a mesma análise é feita em seções ótimas geradas empregando concreto C40, os resultados demonstram um aumento de 5,2% e 12,9% à medida que o custo é alterado em 20% e 50%, respectivamente. Quando o custo é reduzido nessa mesma proporção, a redução no custo final chega a 5,5% e 13,9%, respectivamente, como mostra a Tabela 15.

TABELA 15 – Variação no custo do concreto classe C40

	R\$ 152,50		R\$ 244,00		R\$ 305,00		R\$ 306,00		R\$ 457,50	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	1593	24,29	1495	36,48	1495	45,60	1387	50,76	1387	63,45
Aço (cm ²)	8,73	44,98	8,73	44,98	8,73	44,98	8,73	44,98	8,73	44,98
Forma (cm)	172	72,86	176	74,55	176	74,55	184	77,94	184	77,94
ρ	0,0055		0,0058		0,0058		0,0063		0,0063	
Custo Total (R\$/m)	142,13		156,01		165,13		173,68		186,37	
Diferença	-13,9%		-5,5%		0,0%		5,2%		12,9%	

Em relação ao consumo dos materiais nas seções ótimas geradas para ambas as classes de resistência do concreto, é notável a busca pelo algoritmo de otimização em diminuir a área de concreto à medida que o custo deste material aumenta.

Isso provoca também uma diminuição na área de aço da seção que utiliza concreto de classe C20 e de custo majorado em 50%, já que em todas as seções a quantidade de aço é forçada para atender à taxa mínima de armadura estipulada por norma, além de manter a capacidade resistente. Em seções de concreto de classe C40 a área de aço se mantém constante e suficiente para manter a capacidade resistente da seção, apresentando taxas de armadura maiores à medida que a área de concreto diminui.

Nos dois casos, o perímetro da seção tende a aumentar à medida que o algoritmo busca diminuir a área da seção transversal; conseqüentemente, o custo relativo deste insumo aumenta. Esse comportamento é mais evidenciado para o custo do concreto elevado em 50%, em que o algoritmo tenta manter a capacidade da seção com a mínima área de concreto, levando a seções de formas mais retangulares.

6.5.2 Análise da alteração no custo unitário da armadura

Da mesma forma que na análise anterior, as alterações nos custos da armadura seguiram em 20% e 50%, sendo comparadas a seções de referência geradas empregando concreto de classes C20 e C40, com base nos dados expostos na Tabela 10.

Analisando a Tabela 16, é possível notar que para seções geradas empregando concreto C20 houve um aumento de 5,1% no custo final da seção ótima em razão de um aumento de 20% no custo da armadura, chegando a 12,7% quando o custo unitário da armadura é elevado em 50%. Este último valor, como na análise anterior, é muito próximo de 12,37% observado por Argolo (2000) em comparação semelhante empregando o método dos Algoritmos Genéticos para classe de resistência C20.

TABELA 16 – Variação do custo da armadura empregando concreto C20

	R\$ 3,28		R\$ 5,25		R\$ 6,56		R\$ 7,87		R\$ 9,84	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	2490	61,00	2542	59,24	2542	62,28	2542	62,28	2542	62,28
Aço (cm ²)	11,18	28,80	10,50	43,29	10,50	54,08	10,50	64,87	10,50	81,11
Forma (cm)	226	95,73	226	100,82	226	95,75	226	95,73	226	95,73
ρ	0,0045		0,0041		0,0041		0,0041		0,0041	
Custo Total (R\$/m)	185,53		203,35		212,11		222,88		239,12	
Diferença	-12,5%		-4,1%		0,0%		5,1%		12,7%	

Quando a mesma análise é feita em seções ótimas geradas empregando concreto C40, os resultados demonstram um aumento de 5,4% e 13,6% à medida que o custo da armadura é majorado em 20% e 50%, respectivamente. Quando o custo unitário deste insumo é reduzido na mesma proporção, a redução no custo final é idêntica, como mostra a Tabela 17.

TABELA 17 – Variação do custo da armadura empregando concreto C40

	R\$ 3,28		R\$ 5,25		R\$ 6,56		R\$ 7,87		R\$ 9,84	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	1387	42,30	1387	42,30	1495	45,60	1512	45,60	1495	45,60
Aço (cm ²)	8,73	22,49	8,73	36,00	8,73	44,98	8,73	53,96	8,73	67,46
Forma (cm)	184	77,94	184	77,94	176	74,55	176	74,55	176	74,55
ρ	0,0063		0,0063		0,0058		0,0058		0,0058	
Custo Total (R\$/m)	142,73		156,24		165,13		174,11		187,61	
Diferença	-13,6%		-5,4%		0,0%		5,4%		13,6%	

Quando o consumo dos materiais é analisado, nota-se que houve um aumento de 6,47% na área de aço da seção que utiliza concreto de classe C20 e teve o custo da armadura reduzido em 50%, assim como uma redução de 2,05% na área de concreto. Para as demais seções, o consumo de materiais manteve-se constante.

Em seções que utilizam concreto de classe C40, o consumo deste material aumentou à medida que o custo da armadura assumiu valores maiores, diminuindo o perímetro de forma e mantendo a área de aço inalterada para todas as seções ótimas. Isso se deve ao fato de não existir outra possibilidade de combinações de barras longitudinais capazes de reduzir o custo

final ótimo da seção, compensando este custo maior da armadura com a redução do perímetro de forma, o que acarretou um aumento da área de concreto.

6.5.3 Análise da alteração no custo unitário da forma

Seções que utilizam concreto de classe C20 e apresentam variação no custo unitário da forma de 20%, a mais ou a menos, provocam no custo final ótimo uma variação respectiva de 9,0%. Quando essa variação de custo é de 50% a menos, a redução chega a 24,2%, ao passo que uma elevação de 50% causa um aumento de 22,2% no custo final da seção ótima, como mostra a Tabela 18.

TABELA 18 – Variação do custo da forma empregando concreto C20

	R\$ 21,18		R\$ 33,89		R\$ 42,36		R\$ 50,84		R\$ 63,54	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	2354	57,67	2542	62,28	2542	62,28	2542	62,28	2618	64,14
Aço (cm ²)	9,43	48,53	10,50	54,08	10,50	54,08	10,50	54,08	10,50	54,08
Forma (cm)	258	54,64	226	76,59	226	95,75	226	114,88	222	141,06
ρ	0,0040		0,0041		0,0041		0,0041		0,0040	
Custo Total (R\$/m)	160,84		192,95		212,11		231,24		259,28	
Diferença	-24,2%		-9,0%		0,0%		9,0%		22,2%	

Em seções que utilizam concreto de classe C40, a variação no custo unitário da forma causa alterações semelhantes no custo final da seção ótima, quando comparadas às que utilizam concreto de classe C20, como mostra a Tabela 19. Os resultados demonstram um aumento de 9,0% e 22,7% à medida que o custo unitário da forma é alterado em 20% e 50%, respectivamente; quando este é reduzido na mesma proporção, a redução no custo final da seção ótima chega a 9,4% e 23,6%, respectivamente.

TABELA 19 – Variação do custo da forma empregando concreto C40

	R\$ 21,18		R\$ 33,89		R\$ 42,36		R\$ 50,83		R\$ 63,54	
	Seção	(R\$/m)								
Concreto (cm ²)	1387	42,30	1387	42,30	1495	45,60	1495	45,60	1512	46,12
Aço (cm ²)	8,73	44,97	8,73	44,97	8,73	44,98	8,73	44,97	8,93	46,01
Forma (cm)	184	38,97	184	62,36	176	74,55	176	89,46	174	110,56
ρ	0,0063		0,0063		0,0058		0,0058		0,0059	
Custo Total (R\$/m)	126,24		149,63		165,13		180,03		202,69	
Diferença	-23,6%		-9,4%		0,0%		9,0%		22,7%	

Quando o custo unitário da forma aumenta, o algoritmo de otimização busca encontrar uma forma da seção transversal que apresente o menor perímetro, mesmo que esta seção transversal apresente uma área de concreto maior e, em alguns casos, force a consumir mais aço para atender à taxa mínima de armadura. Esse comportamento também é observado tanto em seções que utilizam concreto de classe C20 como nas que utilizam classe C40 e pode ser justificado porque a parcela representada pela forma é a que mais contribui para a formação do custo final da seção.

De modo geral, é possível notar que variações de 20% no custo dos insumos pouco alteram o consumo dos materiais e as dimensões da seção transversal ótima, mesma conclusão a que chegou Rodrigues Júnior (2005) em seu estudo. Esse comportamento é alterado quando as variações nos custos dos insumos são de 50%, mais evidenciado em seções que utilizam concreto de classe C20.

Convém ressaltar que os estudos analisados e apresentados neste trabalho referem-se aos valores e esforços apresentados, alterando-se no caso de novas combinações esforços e valores de materiais.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho tratou do problema de otimização de seções retangulares em concreto armado submetidas à flexocompressão normal, seguindo as prescrições da norma ABNT NBR 6118 (2007) e empregando o método de otimização *Simulated Annealing*.

Foram realizados comparativos entre o dimensionamento convencional de seções retangulares apresentados na literatura e o dimensionamento ótimo proposto neste trabalho. Também foram realizadas análises comparativas com seções ótimas geradas por outras técnicas de otimização propostas, além de se analisar a influência da variação da classe de resistência do concreto e dos esforços solicitantes no dimensionamento ótimo. Por fim, foi realizada uma avaliação da variação dos valores unitários dos materiais.

7.1 Conclusões

Com base nos resultados obtidos com a formulação implementada e feitas as comparações, pode-se afirmar que este trabalho atingiu seus objetivos, levando a concluir que:

- o processo de otimização aqui implementado mostra-se capaz de auxiliar nas decisões e eliminar algumas das incertezas no momento de determinar os parâmetros que conduzem a projetos mais eficientes e econômicos;
- o método *Simulated Annealing* mostrou-se eficiente, principalmente no tratamento das restrições impostas ao problema;
- quando comparado ao dimensionamento realizado com o auxílio de ábacos de iteração e com outras técnicas de otimização, a implementação do método *Simulated Annealing* demonstrou eficiência na busca por seções de menor custo;
- a implementação realizada com a possibilidade de a seção ser composta por diversos diâmetros de armadura contribuiu para a redução no custo final;

- o detalhamento da seção transversal ótima proposta pelo método é factível de execução prática;
- as seções ótimas, quando submetidas à flexocompressão normal, são as que utilizam concretos de classes de resistência maiores, comprovando a eficiência do uso dessas em pilares. Seções que utilizam classes de resistência inferiores apresentam elevados custos em razão da maior demanda de materiais;
- a parcela representada pela forma aparece como o maior contribuinte na formação do custo final das seções otimizadas, valor que se aproxima de 45,6%, seguido pelo concreto, com 28,7%, e pelo aço, que representa 25,7%;
- seções ótimas tendem a apresentar baixas taxas de armadura. Na maioria das seções geradas, essas taxas se aproximam dos valores mínimos estipulados pela norma ABNT NBR 6118 (2007), sendo mais evidente em seções que utilizam concretos de classes de resistência baixas;
- existe uma combinação de esforços ótima, que, juntamente com o dimensionamento ótimo, leva a estruturas globais ótimas, porém esses valores dependem de vários fatores, entre eles a concepção estrutural;
- observou-se que a topologia da seção transversal ótima pouco se altera quando a variação é de 20% no custo unitário dos materiais, sofrendo maiores alterações nas dimensões da seção transversal, quando a variação dos custos é de 50%.
- numa edificação, os pilares são elementos que podem apresentar diversas seções transversais; portanto, é o elemento mais apropriado a ser submetido a técnicas de otimização, já que vigas e lajes, geralmente, apresentam restrições dimensionais.

7.2 Sugestões de continuidade

Com o objetivo de ampliar e dar continuidade no processo de otimização desenvolvido no presente trabalho, são apresentadas as seguintes sugestões:

- estender a análise para seções submetidas à flexocompressão oblíqua;
- considerar as influências dos efeitos de segunda ordem relacionadas às condições de apoio e comprimento do pilar;
- levar em conta os efeitos localizados em pilares parede;
- ampliar a aplicação para outros tipos de seções transversais;
- implementar a análise da estrutura acoplada ao processo de dimensionamento a fim de buscar a melhor combinação de esforços que conduzam a um projeto ótimo.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. A. **Curso de concreto armado**. Rio Grande: Dunas, 2003. v. 3.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 - **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2003.

_____. NBR 8681 - **Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2004.

BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

BALLING, R.; YAO, X. Optimization of reinforced concrete frames. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 123, n.2, p. 193-202, Feb. 1997.

CAMP, C. V.; PEZESHK, S.; HANSSON, H. Flexural design of reinforced concrete frames using a genetic algorithm. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.129, n.1, p.106-116, Jan. 2003.

CERNY, V. Thermodynamical Approach to the Travelling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm. **Journal Optimization Theory Appl.**, p. 41-45, 1985.

CHAKRABARTY, B. K.. A Model for optimal design of reinforced concrete beam. **Computer & Structures**, v. 42, n.3, p. 447-451, 1992.

CHAVES, I. A. **Otimização de pilares de concreto armado mediante uniformização do índice de confiabilidade**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

COHN, M. Z.; DINOVIETZER, A.S. Application of structural optimization. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.120, n.2, p.617–650, Feb. 1994.

CORTÊS, C. F. M. **Otimização do projeto da superestrutura de pontes pré-fabricadas pelo método dos algoritmos genéticos**. Tese (Doutorado em Engenharia) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

DÍAZ, J.A.; MARTÍNEZ, A. A. Otimización de estructuras mediante algoritmos genéticos – **Revista de Obras Públicas**, n.3222, p. 63-68, Jun. 1993.

DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B**, v. 26, n. 1, p. 29–41. 1996.

HOLLAND, John H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Massachusetts, MIT Press. 1975.

KANAGASUNDARAM, S.; KARIHALOO, B. L. Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Structures. **Structural Optimization**, v.2, n.1, p.173-184, 1990.

KENNEDY, J.; EBERHART, R.; Particle Swarm Optimization. In: **Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks**, v. 4, pp. 1942–1948. 1995.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.D.; VECCHI, M.P. Optimization by Simulated Annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

KRIPKA, M. **Determinação do posicionamento ótimo dos apoios em edificações analisadas pelo modelo de grelhas**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1998.

KRIPKA, M. Otimização do custo de estruturas de concreto armado analisadas pelo modelo de grelha. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, V. USP, São Paulo. 14p, 2003. **Anais...** CD-ROM

LELLES, L.C. et al. Perfil ambiental qualitativo da extração de areia em cursos d'água. **Árvore**, Viçosa, v.29, n.3, p.439-444, 2005.

MARTÍNEZ MARTÍN, F. J. **Optimización heurística de pilas rectangulares huecas de hormigón armado**. Tese (Doutorado) – Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2007.

METROPOLIS, N. et al. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. **Journal of Chem. Phys.**, p 1087-1092, 1953.

MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón Armado**, v. 2, 13. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 1994.

NINA, T. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado**: aplicação a pórticos planos. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

PAYÁ ZAFORTEZA, I. J. **Optimización heurística de pórticos de edificación de hormigón armado**. Tese (Doutorado) – Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2007.

RAFIQ, M. Y.; SOUTHCOMBE, C. Genetic Algorithm in Optimal Design and Detailing of Reinforced Concrete Biaxial Columns Supported by a Declarative Approach for Capacity Checking, **Computers & Structures**, v. 69, n.4, p. 443-457,1998.

RATH, D.P.; AHLAWAT, A.S.; RAMASWAMY, A. Shape optimization of reinforced concrete flexural members. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.125, n.12, p.1439-1446, Dec. 1999.

ROCHA, A. P. **Emissões de carbono do setor de cimento dobraram no Brasil em 17 anos**. PINI Web. São Paulo, Set. 2009.

RODRIGUES JÚNIOR, S. J. **Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2005.

SANTOS, R. E. **A armação do concreto no Brasil: história da difusão do sistema construtivo concreto armado e da construção de sua hegemonia.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

SARMA, K. C.; ADELI, H. Cost optimization of concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.124, n.5, p.570-578, May 1998.

SARAMAGO, S. F. P. Métodos de otimização randômica: algoritmos genéticos e recozimento simulado. In: CNMAC, XXVI. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2003. **Anais...**

SILVA, P. S. **Projeto e análise de algoritmos.** Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1998.

SOARES, R. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão - aplicação a pavimentos.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design.** McGraw-Hill Book Company, 1984.

VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

YANG, M. F.; SHAO, C.A.; TSAI, T. H A. Code-based optimum design of reinforced concrete structures. **ICOTA**, p. 942-951, 1992.

ZIELINSKI Z., A.; LONG W.; TROITSKY M. S. Designing Reinforced Concrete Short-Tied Columns Using the Optimization Technique, **ACI Structural Journal**, v.92, n.5, p.619-625, 1995.